Déterminants

Table des matières

1 Déterminant

1.1 Forme n-linéaire alternée

Définition 1.1

Soit $E_1, \dots, E_n$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit qu'une application $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ est *n-linéaire* lorsqu'elle est linéaire par rapport à chacune des variables, c'est-à-dire lorsque quel que soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n$, on a

$$\forall x, y \in E_i, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \varphi\left(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x + \mu y, x_{i+1}, \dots, x_n\right) =$$

$$\lambda\varphi\left(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n\right) + \mu\varphi\left(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n\right).$$

Si $F = \mathbb{K}$, on dit que φ *est une forme n-lineaire.*

Remarques

- Lorsque $n = 2$, on parle d'application *bilinéaire.*
- L'ensemble des applications n-linéaires de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F.
- Si $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ est n-linéaire, $i \in [\![1, n]\!]$ et $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n$, alors $\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$.
- On dit qu'une application φ est une *forme n-linéaire sur E* lorsque c'est une application n-linéaire de E^n dans $\mathbb{K}$.

Exemples

- Si X est un ensemble, l'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) \times \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) \\ (f, g) & \longmapsto & fg \end{array}$$

  est bilinéaire.
- Si E, F, G sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, l'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

  est bilinéaire. De manière similaire, si $r, q, p \in \mathbb{N}$, l'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{array}$$

  est bilinéaire.

⇨ Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E. Alors

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \varphi_k(x_k) \end{array}$$

est une forme n-linéaire sur E.

⇨ Dans le plan euclidien, le produit scalaire est bilinéaire. Dans l'espace euclidien orienté, le produit scalaire et le produit vectoriel sont bilinéaires.

Définition 1.2

On dit qu'une forme φ, n-linéaire sur E, est *alternée* lorsqu'elle est nulle sur toute famille de vecteurs dont au moins deux sont égaux.

Remarques

⇨ Autrement dit, la forme n-linéaire $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ est alternée lorsque

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in E, \quad \forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad [i \neq j \quad \text{et} \quad x_i = x_j] \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

⇨ L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est noté $\Lambda_n(E)$. C'est un sous-espace vectoriel de l'espace des formes n-linéaires sur E.

Proposition 1.3

Soit φ une forme n-linéaire alternée sur E. Alors, on ne change pas la valeur de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ en ajoutant à l'une de ses variables une combinaison linéaire des autres.

Remarque

⇨ En particulier, si $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, alors $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Proposition 1.4

Soit φ une forme n-linéaire alternée sur E. Alors

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in E, \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \quad \varphi\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) = \epsilon(\sigma)\varphi\left(x_1, \ldots, x_n\right).$$

On dit que φ est *antisymétrique*.

Remarque

⇨ Une forme n-linéaire alternée est donc antisymétrique. Réciproquement, si $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, les formes antisymétriques sont alternées.

Proposition 1.5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et φ une forme n-linéaire alternée sur E. Alors

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in E, \quad \varphi\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} e^\star_{\sigma(k)}(x_k)\right) \varphi\left(e_1, \ldots, e_n\right).$$

Remarque

⇨ En particulier, si φ et ψ sont deux formes n-linéaires alternées sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n qui prennent la même valeur sur une base de E, alors $\varphi = \psi$.

Théorème 1.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors, il existe une unique forme n-linéaire alternée φ sur E telle que $\varphi\left(e_1, \ldots, e_n\right) = 1$.

Proposition 1.7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors $\Lambda_n(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

1.2 Déterminant d'une famille de n vecteurs

Définition 1.8

Si $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on appelle *déterminant relativement à la base* $\mathcal{B}$, et on note $\det_{\mathcal{B}}$, l'unique forme n-linéaire alternée sur E telle que $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E, on appelle *déterminant de la famille* $(x_1, \dots, x_n)$ *relativement à la base* $\mathcal{B}$ le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque

⇨ On en déduit que si $\mathcal{B}$ est une base de E, $x_1, \dots, x_n \in E$ et $A := \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Proposition 1.9

Soit $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' := (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. Alors

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, \quad \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Remarque

⇨ En particulier, si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont des bases de E

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'').$$

Proposition 1.10

Soit $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

— Alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

— Autrement dit, $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

1.3 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 1.11

Si $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique scalaire, appelé *déterminant de* f et noté $\det f$, tel que pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, \quad \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

En particulier, si $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E

$$\det f = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Exercice 1

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et s une symétrie de E. On note p la dimension de $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id})$. Montrer que $\det s = (-1)^p$.

Proposition 1.12

— $\det \mathrm{Id}_E = 1$

— Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\det(\lambda f) = \lambda^n \det f.$$

— Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$\det(g \circ f) = \det g \cdot \det f.$$

Exercice 2

⇨ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}$ si et seulement si n est pair.

Proposition 1.13

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est un isomorphisme si et seulement si

$$\det f \neq 0.$$

De plus, si tel est le cas

$$\det f^{-1} = \frac{1}{\det f}.$$

Remarque

⇨ On en déduit que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(E) & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \\ f & \longmapsto & \det f \end{array}$$

est un morphisme de groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ dans $(\mathbb{K}^*, \times)$.

1.4 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 1.14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *déterminant de* A et on note $\det A$ le déterminant des vecteurs colonnes de A relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Remarques

⇨ Le déterminant est donc une forme n-linéaire alternée par rapport aux colonnes de la matrice.

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Cependant, cette formule comporte une somme de $n!$ termes. Il est donc déconseillé de l'utiliser pour un calcul effectif de déterminant.

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, son déterminant est noté

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Proposition 1.15

Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

— Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E, alors

$$\det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det\left[\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)\right].$$

— Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$\det f = \det\left[\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\right].$$

Proposition 1.16

— $\det I_n = 1$

— Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

— Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Remarque

⇨ Il n'existe aucune formule permettant de calculer $\det(A+B)$ en fonction de $\det A$ et de $\det B$. En particulier, toute formule du type $\det(A+B) = \det A + \det B$ est fausse.

Proposition 1.17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si

$$\det A \neq 0.$$

De plus, si tel est le cas

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}.$$

Remarque

⇨ On en déduit que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \\ & A & \longmapsto & \det A \end{array}$$

est un morphisme de groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ dans $(\mathbb{K}^*, \times)$.

Proposition 1.18

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\det A^\top = \det A.$$

Remarque

⇨ On en déduit que le déterminant est une forme n-linéaire alternée par rapport aux lignes de la matrice.

Exercice 3

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que $\det A = 0$.

2 Calcul de déterminant

2.1 Méthode du pivot

Proposition 2.1

Soit la matrice

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).$$

Alors $\det A = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$.

Remarques

⇨ Le déterminant de la matrice de taille nulle est 1.

⇨ Si $a \in \mathbb{K}$, le déterminant de la matrice à une ligne et une colonne (a) est a.

Exercice 4

⇨ Soit $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Calculer le rang de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad a_{i,j} := \cos(\theta_i + \theta_j).$$

Proposition 2.2

Soit T une matrice triangulaire supérieure

$$T := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & (0) & \ddots & \star \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors

$$\det T = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Remarque

➾ En particulier, le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.

Proposition 2.3

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\det A = \lambda \det B.$$

Proposition 2.4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

— Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ne modifient pas les déterminants.

— Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $C_i \leftarrow \lambda C_i$ multiplient les déterminants par λ.

— Les opérations élémentaires $L_i \leftrightarrow L_j$ et $C_i \leftrightarrow C_j$ multiplient les déterminants par -1.

Remarques

➾ Plus généralement, si à une colonne, on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes, on ne change pas le déterminant. De même, si à une ligne, on ajoute une combinaison linéaire des autres lignes, on ne change pas non plus le déterminant.

➾ Toute permutation des colonnes multiplie le déterminant par la signature de cette permutation. De même, toute permutation des lignes multiplie le déterminant par la signature de cette permutation.

Exercice 5

➾ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a+b & 2a & 2a \\ 2b & a+b & 2a \\ 2b & 2b & a+b \end{vmatrix}$$

2.2 Développement par rapport à une colonne

Définition 2.5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— On appelle *mineur* d'indice $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice A.

— On appelle *cofacteur* d'indice $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, et on note $A_{i,j}$, le scalaire $A_{i,j} := (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.

Remarque

➾ On retiendra que la matrice des $(-1)^{i+j}$ comporte des 1 sur la diagonale et qu'on passe de ± 1 à son opposé lorsqu'on change de ligne ou de colonne.

Proposition 2.6: Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}. \end{aligned}$$

— Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Exercices 6

⇨ Soit $u, v \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{pmatrix}$$

⇨ Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels la matrice suivante est inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & (0) \\ 1 & 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 & 1 \\ (0) & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Proposition 2.7: Déterminant de Vandermonde

On appelle Vandermonde de la famille $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ le déterminant

$$V(x_0, \ldots, x_n) \coloneqq \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

On a

$$V(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Remarque

⇨ Soit $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$, $n+1$ éléments deux à deux distincts et $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$. Soit $P \coloneqq a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}_n[X]$. Alors

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(x_k) = y_k$$

si et seulement si

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n. \end{cases}$$

Le déterminant de la matrice de ce système est un Vandermonde qui est non nul car les x_k sont deux à deux distincts. On retrouve le fait que ce système est de Cramer et donc qu'il admet une unique solution, résultat au cœur de la définition des polynômes interpolateurs de Lagrange.

2.3 Comatrice

Définition 2.8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *comatrice* de A et on note $\operatorname{Com} A$ la matrice des cofacteurs de A

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad [\operatorname{Com} A]_{i,j} \coloneqq (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$

Proposition 2.9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$A(\operatorname{Com} A)^\top = (\operatorname{Com} A)^\top A = (\det A)\, I_n.$$

En particulier, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{Com} A)^\top.$$

Remarque

⇨ La matrice

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

est inversible si et seulement si $\det A = ad - cb$ est non nul. De plus, si tel est le cas

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Cependant, on évitera d'utiliser une telle formule en pratique.

Exercice 7

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que son inverse est à coefficients entiers si et seulement si $\det A \in \{-1, 1\}$.