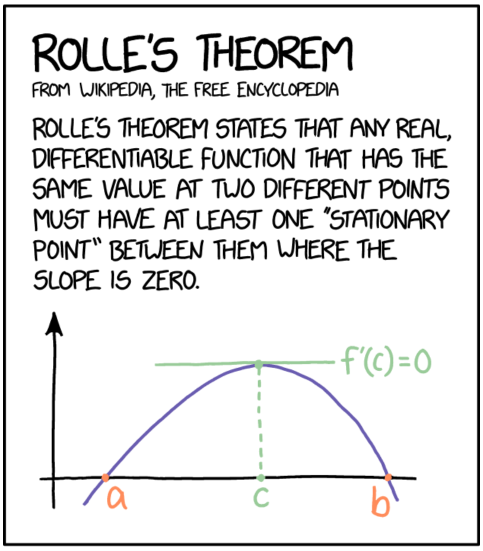
Dérivation

« Le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite, à condition que les deux points soient bien en face l'un de l'autre. »

— Pierre Dac (1893–1975)



EVERY NOW AND THEN, I FEEL LIKE THE MATH EQUIVALENT OF THE CLUELESS ART MUSEUM VISITOR SQUINTING AT A PAINTING AND SAYING "C'MON, MY KID COULD MAKE THAT."

Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Fonction dérivable, dérivées successives

1.1 Définition

Définition 1.1

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est *dérivable* en $x_0 \in \mathcal{D}$ lorsque le *taux d'accroissement*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 ; si tel est le cas, on note $f'(x_0)$ cette limite que l'on appelle *nombre dérivé* de f en x_0. La propriété « est dérivable en x_0 » est locale en x_0.

Remarques

⇨ Un changement de variable montre que f est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}$ si et seulement si

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie lorsque h tend vers 0.

⇨ Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}$, son graphe admet une tangente d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Cette tangente est horizontale si et seulement si $f'(x_0) = 0$. Lorsque le taux d'accroissement de f en x_0 tend vers $\pm\infty$, le graphe de f admet une tangente verticale.

Définition 1.2

— On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est *dérivable à gauche* en $x_0 \in \mathcal{D}$ lorsque le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 par la gauche ; si tel est le cas, on note $f'_g(x_0)$ cette limite que l'on appelle nombre dérivé à gauche de f en x_0. La propriété « est dérivable à gauche en x_0 » est locale à gauche, au sens large, en x_0.

— On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est *dérivable à droite* en $x_0 \in \mathcal{D}$ lorsque le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 par la droite ; si tel est le cas, on note $f'_d(x_0)$ cette limite que l'on appelle nombre dérivé à droite de f en x_0. La propriété « est dérivable à droite en x_0 » est locale à droite, au sens large, en x_0.

Proposition 1.3

Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}$ si et seulement si les objets ci-dessous susceptibles d'avoir un sens

$$f'_g(x_0) \quad \text{et} \quad f'_d(x_0)$$

existent et sont égaux. Si tel est le cas, $f'(x_0)$ est cette valeur commune.

Exercice 1

⇨ Étudier la dérivabilité des fonctions d'expression

$$|x| \quad \text{et} \quad \frac{x}{1 + |x|}$$

en 0.

Proposition 1.4

Une fonction dérivable en un point est continue en ce point.

Remarque

⇨ La réciproque de cette proposition est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0.

Proposition 1.5

Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}$ si et seulement si elle y admet un développement limité à l'ordre 1. Si tel est le cas

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h).$$

Définition 1.6

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$.

— On dit que f est *dérivable* lorsqu'elle est dérivable en tout point de $\mathcal{D}$.

— Si A est une partie de $\mathcal{D}$, on dit que f est *dérivable sur* A lorsque la restriction de f à A est dérivable.

Remarque

⇨ Si A est une partie de $\mathcal{D}$ et que f est dérivable en tout point de A, alors f est dérivable sur A. Cependant la réciproque est fausse. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) \coloneqq |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

Proposition 1.7

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur un domaine *élémentaire* et $\mathcal{D} = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ la décomposition de $\mathcal{D}$ en composantes connexes. Alors f est dérivable sur $\mathcal{D}$ si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f est dérivable sur I_k.

Remarque

⇨ Une fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ si et seulement si elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Proposition 1.8

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

— Si f est dérivable sur $I \cap]a, +\infty[$, elle est dérivable en tout point de $I \cap]a, +\infty[$. De plus, en notant g la restriction de f à $I \cap]a, +\infty[$, on a

$$\forall x \in I \cap]a, +\infty[, \quad f'(x) = g'(x).$$

— Si f est dérivable sur $I \cap [a, +\infty[$, elle est dérivable à droite en a et en tout point de $I \cap]a, +\infty[$. De plus, en notant g la restriction de f à $I \cap [a, +\infty[$, on a

$$f_d'(a) = g'(a) \quad \text{et} \quad \forall x \in I \cap]a, +\infty[, \quad f'(x) = g'(x).$$

Exercice 2

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{a}{1+bx} & \text{si } x < 0 \\ \mathrm{e}^x \cos x & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

1.2 Théorèmes usuels

Proposition 1.9

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ deux fonctions dérivables en x_0.

— Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en x_0 et

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0).$$

— fg est dérivable en x_0 et

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0).$$

— Si $f(x_0) \neq 0$, alors f ne s'annule pas au voisinage de x_0 et $1/f$ est dérivable en x_0. De plus

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

— Si $g(x_0) \neq 0$, alors g ne s'annule pas au voisinage de x_0 et f/g est dérivable en x_0. De plus

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Proposition 1.10

Soit f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\,f'(x_0).$$

Exercice 3

⇨ Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{x+2}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

Proposition 1.11

Soit f une bijection continue d'un intervalle I sur un intervalle J et $y_0 \in J$. Si f est dérivable en $x_0 = f^{-1}(y_0)$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$. De plus, si tel est le cas

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)} \\ &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}.\end{aligned}$$

Proposition 1.12

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$.

— Alors $\overline{f}$ est dérivable en x_0 si et seulement si f l'est. De plus, si tel est le cas

$$\overline{f}\,'(x_0) = \overline{f'(x_0)}.$$

— De même, f est dérivable en x_0 si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. De plus, si tel est le cas

$$f'(x_0) = \mathrm{Re}(f)'(x_0) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)'(x_0).$$

— Enfin, si f est dérivable en x_0, il en est de même pour e^f et

$$\left(\mathrm{e}^f\right)'(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{e}^{f(x_0)}$$

1.3 Fonction dérivée, dérivées successives

Définition 1.13

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ une fonction. On note $\mathcal{D}_{f'}$ l'ensemble des $x \in \mathcal{D}$ en lesquels f est dérivable. On définit la *fonction dérivée* de f, notée f', par

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{f'} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}.$$

Définition 1.14

Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est une fonction, on définit par récurrence la *dérivée n-ième* de f de la manière suivante :

— On pose $f^{(0)} := f$.

— Si $n \in \mathbb{N}$, on définit $f^{(n+1)}$ comme étant la dérivée de $f^{(n)}$.

Si $x_0 \in \mathcal{D}$, on dit que f est dérivable n fois en x_0 lorsque $f^{(n)}$ est définie en x_0 ; cette notion est locale en x_0.

Remarques

- On dit qu'une fonction est dérivable n fois lorsqu'elle est dérivable n fois en tout point de son domaine de définition.
- Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$, et $A \subset \mathcal{D}$. On dit que f est dérivable n fois sur A lorsque la restriction de f à A est dérivable n fois.

Proposition 1.15

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ deux fonctions dérivables n fois.

- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable n fois et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x).$$

- fg est dérivable n fois et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

  Cette formule est appelée formule de Leibniz.
- Si g ne s'annule pas, alors f/g est dérivable n fois.

Proposition 1.16

Si f et g sont deux fonctions dérivables n fois, alors $g \circ f$ est dérivable n fois.

Remarque

- Si $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est dérivable n fois, alors la fonction $g : x \mapsto f(ax)$ est dérivable n fois et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax).$$

Exercices 4

- Donner la dérivée n-ième des fonctions $x \mapsto x^2 f(x)$ et $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^x$.
- Calculer la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto \cos^3 x$.
- Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \mathrm{e}^{-x^2}.$$

  Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est bornée.

Proposition 1.17

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J, dérivable n fois sur I. Alors f^{-1} est dérivable n fois sur J si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad f'(x) \neq 0.$$

1.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 1.18

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ lorsqu'elle est dérivable n fois et sa dérivée n-ième est continue. On note $\mathcal{C}^n(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^n$.

Remarques

- Les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ sont les fonctions continues.
- Une fonction peut être dérivable sur $\mathbb{R}$ sans que sa dérivée soit continue. Par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

  est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'est pas continue en 0.

- Si on note $\mathcal{D}^n$ l'ensemble des fonctions dérivables n fois, on a
$$\mathcal{C}^0 \supset \mathcal{D}^1 \supset \mathcal{C}^1 \supset \mathcal{D}^2 \supset \mathcal{C}^2 \cdots$$
On peut montrer que toutes ces inclusions sont strictes.
- Si A est une partie de $\mathcal{D}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur A lorsque la restriction de f à A est de classe $\mathcal{C}^n$.

Exercice 5

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.19

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques

- Une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si elle est dérivable n fois quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
- Les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le domaine sur lequel elle sont dérivables.

Proposition 1.20

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.
- Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$.
- fg est de classe $\mathcal{C}^n$.
- Si g ne s'annule pas, alors f/g est de classe $\mathcal{C}^n$.

Proposition 1.21

Si $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

Définition 1.22

Soit f une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On dit que f est un $\mathcal{C}^n$-*difféomorphisme* de I sur J lorsque f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^n$.

Proposition 1.23

Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Une bijection f de classe $\mathcal{C}^n$ de l'intervalle I sur l'intervalle J est un $\mathcal{C}^n$-difféomorphisme si et seulement si f' ne s'annule pas.

Exercices 6

- Soit f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à x associe xe^x. Montrer que f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme. Calculer un développement limité de f^{-1} en 0 à l'ordre 3.
- Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^5(x) + f(x) + x = 0.$$

2 Théorème de Rolle et applications

2.1 Extrémum local

Définition 2.1

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $x_0 \in \mathcal{D}$. On dit que
- f présente un *maximum global* en x_0 lorsque
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$
- f présente un *maximum local* en x_0 lorsque
$$\exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant f(x_0).$$

— f présente un *minimum global* en x_0 lorsque

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

— f présente un *minimum local* en x_0 lorsque

$$\exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant f(x_0).$$

Remarque

⇨ On peut indifféremment utiliser « maximums » ou « maxima » pour le pluriel de « maximum ». De même, on peut utiliser « minimums » ou « minima » pour le pluriel de « minimum ».

Exercice 7

⇨ Rechercher les extrémums de la fonction d'expression $|x(x-1)|$ sur $[0, 2]$.

Proposition 2.2

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un extrémum local en un point x_0 intérieur à $\mathcal{D}$. Si elle est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques

⇨ Attention, ce n'est pas parce que f' s'annule en x_0 que f y admet un extrémum local. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ a une dérivée qui s'annule en 0 mais n'admet pas d'extrémum local en ce point.

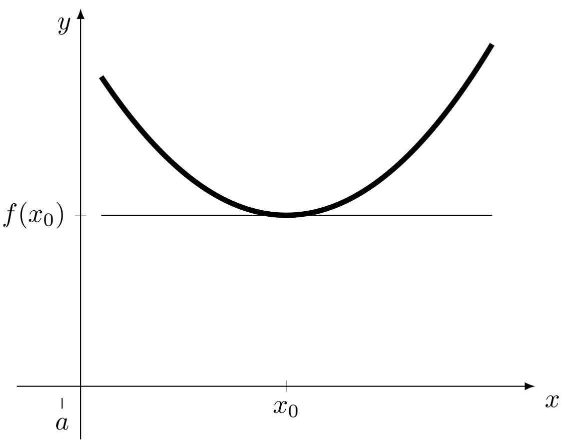
⇨ Les extrémums locaux d'une fonction f définie sur $\mathcal{D}$ sont donc à chercher parmi les bornes de $\mathcal{D}$, les points où f n'est pas dérivable et ceux où la dérivée de f est nulle.

⇨ Si $f'(x_0) = 0$ et f est assez régulière, un développement limité permet généralement de déterminer si f admet un maximum ou un minimum local en x_0. En effet, supposons que

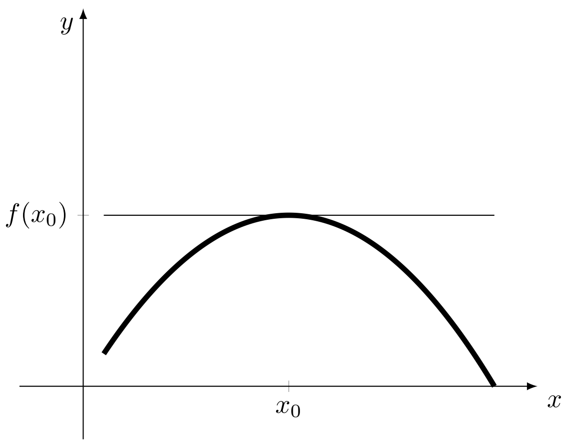
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h^\omega + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^\omega)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\omega \geqslant 2$.

— Supposons que ω est pair. Si $\alpha > 0$, alors f admet un minimum local en x_0. Si $\alpha < 0$, alors f admet un maximum local en x_0.

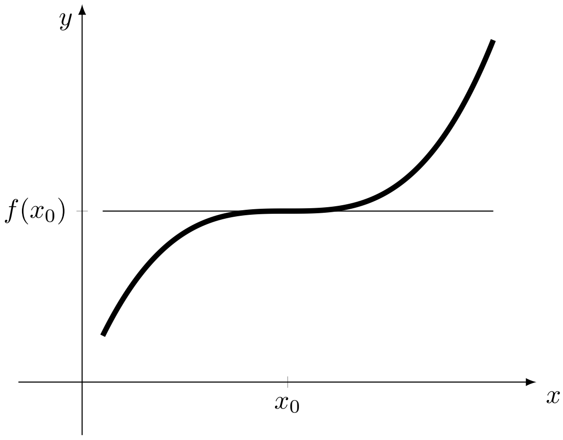


$\alpha > 0$ et ω pair



$\alpha < 0$ et ω pair

— Si ω est impair et que x_0 est intérieur à $\mathcal{D}$, f n'admet pas d'extrémum local en x_0.



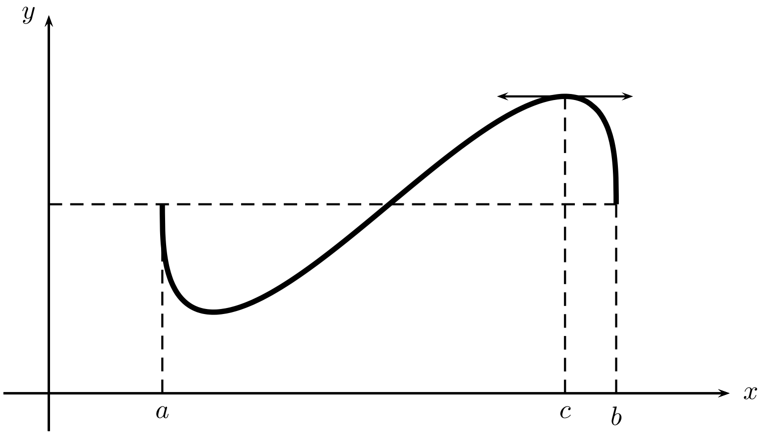
$\alpha > 0$ et ω impair

2.2 Théorème de Rolle, accroissements finis

Dans cette section, lorsqu'on considèrera un segment $[a, b]$, on supposera que $a < b$.

Théorème 2.3: Théorème de Rolle

Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Exercice 8

⇨ Soit f une fonction dérivable n fois sur l'intervalle I admettant $n+1$ zéros. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I. Retrouver le fait qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n admet au plus n racines réelles.

Remarque

⇨ Cette proposition est fausse si f est à valeurs complexes. Par exemple, si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

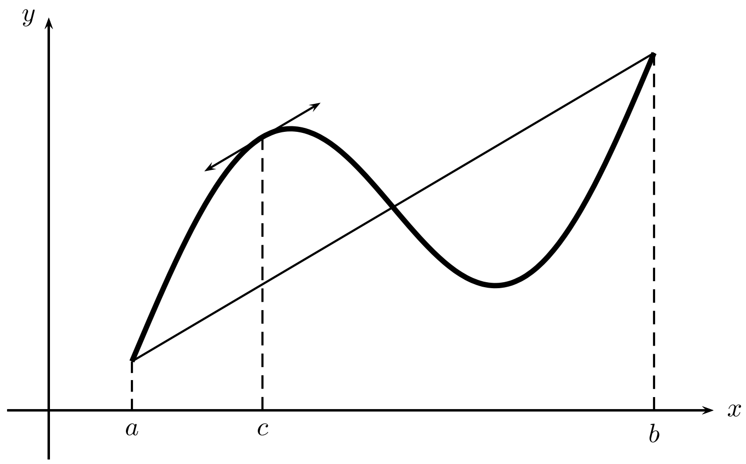
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f(0) = f(2\pi)$ mais f' ne s'annule pas.

Théorème 2.4: Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Remarque

⇨ Remarquons que le taux d'accroissement $(f(b) - f(a))/(b - a)$ est une grandeur invariante par échange de a et b. Par conséquent, si f est dérivable sur I, quels que soient $a, b \in I$ tels que $a \neq b$, il existe c strictement compris entre a et b tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

⇨ Puisque c est strictement compris entre a et b, il arrive qu'on l'écrive sous la forme

$$c = \theta a + (1 - \theta) b$$

avec $\theta \in]0, 1[$.

Proposition 2.5: Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in]a, b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M.$$

Alors

$$m\,(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M\,(b - a)\,.$$

Proposition 2.6: Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant M.$$

Alors

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x - y|\,.$$

Autrement dit, f est M-lipschitzienne.

Remarque

⇨ Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment est lipschitzienne.

2.3 Dérivation et monotonie

Proposition 2.7

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Alors

— f est croissante si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0.$$

— f est décroissante si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0.$$

Remarque

⇨ Ce théorème reste vrai lorsque f est continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I et que sa dérivée y est de signe constant. Par exemple, si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) \geqslant 0$$

alors f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercices 9

⇨ Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) := \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}.$$

⇨ Calculer

$$\inf_{x,y>0} \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

Proposition 2.8

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 0.$$

Exercice 10

⇨ Soit $\alpha > 0$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ définie sur un intervalle I est α-Hölderienne lorsqu'il existe $C \geqslant 0$ tel que

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C\, |x-y|^{\alpha}.$$

Montrer que si $\alpha > 1$, alors f est constante.

Proposition 2.9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Alors f est strictement croissante si et seulement si

— $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$,

— Il n'existe pas d'intervalle non trivial sur lequel f' est nulle.

Remarques

⇨ On rappelle qu'un intervalle non trivial est un intervalle qui contient au moins deux points.

⇨ Rappelons au passage qu'une fonction croissante qui n'est pas strictement croissante est constante sur un intervalle non trivial.

2.4 Théorème de la limite de la dérivée

Proposition 2.10

— Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et que

$$f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}]{} l \in \mathbb{K}.$$

Alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.

— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et que

$$f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}]{} \pm\infty.$$

Alors

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} \pm\infty.$$

Autrement dit, le graphe de f admet une demi-tangente verticale en x_0. En particulier, la fonction f n'est pas dérivable en x_0.

Exercices 11

⇨ Montrer que

$$\frac{\mathrm{Arcsin}\,(-1+h) + \frac{\pi}{2}}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} +\infty$$

⇨ Soit $f : \left]-\pi, \pi\right[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \left]-\pi, \pi\right[, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

3 Convexité

3.1 Définition, propriétés élémentaires

Proposition 3.1

Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Alors

$$« [x_1, x_2] » = \{tx_1 + (1-t)x_2 : t \in [0,1]\}.$$

Remarques

- On en déduit qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si

$$\forall x, y \in I, \quad \forall t \in [0,1], \quad tx + (1-t)y \in I.$$

- On dit qu'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est *affine* lorsqu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = ax + b.$$

  Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est affine, alors

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad \forall t \in [0,1], \quad \varphi(tx_1 + (1-t)x_2) = t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2).$$

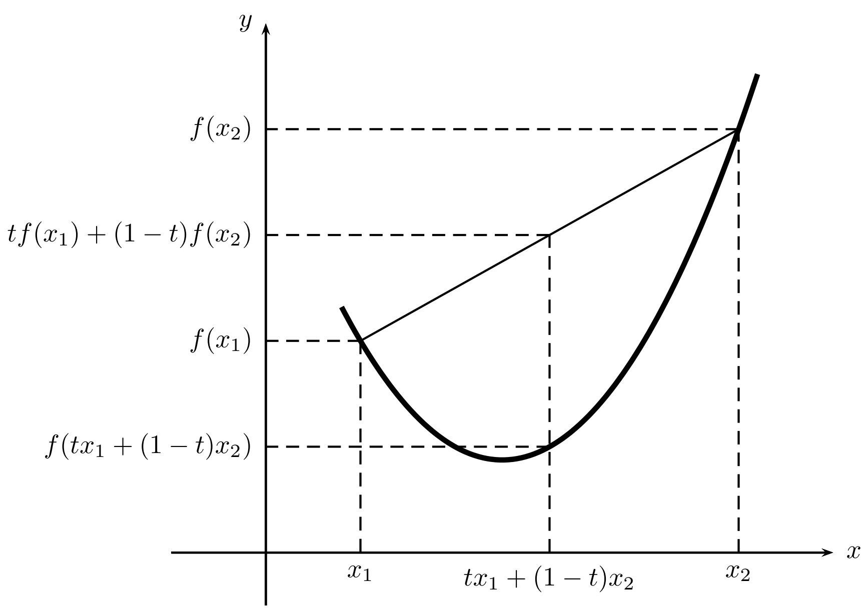
- Si I est un intervalle

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in I, \quad \forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+, \quad t_1 + \cdots + t_n = 1 \quad \Longrightarrow \quad t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \in I.$$

Définition 3.2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle I. On dit que f est *convexe* lorsque

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad \forall t \in [0,1], \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$



Remarques

- Les fonctions affines sont convexes.
- Une combinaison linéaire positive de fonctions convexes est convexe. Cependant, si f est une fonction convexe, en général, $-f$ ne l'est pas.

Exercice 12

- Montrer que les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.3: Inégalité de Jensen

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un intervalle I. Alors

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in I, \quad \forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+,$$

$$t_1 + \cdots + t_n = 1 \quad \Longrightarrow \quad f(t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n) \leqslant t_1 f(x_1) + \cdots + t_n f(x_n).$$

3.2 Convexité et dérivation

Proposition 3.4: Lemme des 3 pentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

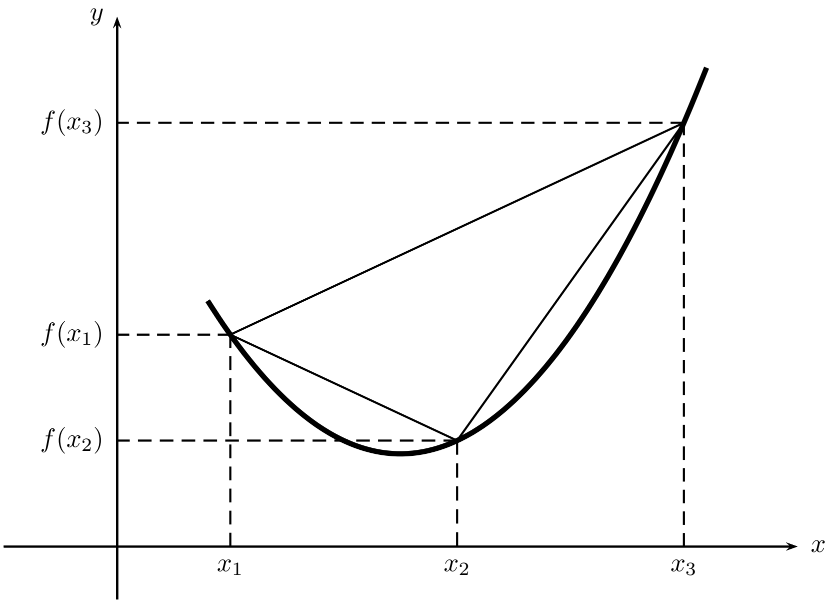
— Si f est convexe, quels que soient $x_1, x_2, x_3 \in I$ tels que $x_1 < x_2 < x_3$, on a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

— Réciproquement, si quels que soient $x_1, x_2, x_3 \in I$ tels que $x_1 < x_2 < x_3$, on a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

alors f est convexe.



Exercice 13

⇨ Montrer que sur $\mathbb{R}$, une fonction convexe majorée est constante.

Proposition 3.5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Alors f est convexe si et seulement si, pour tout $x_0 \in I$, la fonction

$$\begin{array}{rccc} \tau_{x_0} : & I \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array}$$

est croissante.

Proposition 3.6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

— Alors f est dérivable à gauche et à droite en tout point intérieur à I.

— En particulier, f est continue en tout point intérieur à I.

Remarque

⇨ Remarquons qu'une fonction convexe peut très bien ne pas être dérivable en un point intérieur à I comme le montre l'exemple de la valeur absolue en 0. De même, une fonction convexe peut être discontinue aux bornes de son intervalle de définition comme le montre l'exemple de la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \text{ ou } x=1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Proposition 3.7

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un intervalle I. Si $x_0 \in I$ est un point en lequel f est dérivable, alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right).$$

Autrement dit, le graphe de f est au-dessus de ses tangentes.

Proposition 3.8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Proposition 3.9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors f est convexe si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad f''(x) \geqslant 0.$$

Remarques

⇨ La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto 1/x$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

⇨ On dit qu'une fonction réelle définie sur un intervalle I est *concave* lorsque

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad \forall t \in [0,1], \quad f\left(tx_1 + (1-t)\,x_2\right) \geqslant tf\left(x_1\right) + (1-t)\,f\left(x_2\right).$$

Une fonction f est concave si et seulement si $-f$ est convexe. On en déduit que toutes les propositions énoncées pour les fonctions convexes ont leur équivalent pour les fonctions concaves. En particulier, les fonctions concaves sont en dessous de leur tangentes et une fonction deux fois dérivable sur un intervalle est concave si et seulement si sa dérivée seconde est négative.

Exercices 14

⇨ Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x, \qquad \forall x \in \left]-1, +\infty\right[, \quad \ln(1+x) \leqslant x$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi} \cdot x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

⇨ Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

C'est l'inégalité arithmético-géométrique qui se démontre facilement pour $n = 2$.