Dénombrement

Table des matières

1 Cardinal

1.1 Équipotence

Définition 1.1

Soit A et B deux ensembles. On dit que A est *équipotent* à B lorsqu'il existe une bijection de A dans B.

Proposition 1.2

La relation « est équipotent à » est une relation d'équivalence.

Remarques

- ⇨ Une fois que nous aurons défini le cardinal d'un ensemble fini, nous verrons que deux ensembles finis sont équipotents si et seulement si ils ont le même nombre d'éléments.
- ⇨ Il est possible qu'un ensemble soit équipotent à l'une de ses parties strictes ; ces ensembles sont infinis. Par exemple l'application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$ qui à n associe $n+1$ est une bijection, ce qui montre que $\mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{N}^*$. Pourtant $\mathbb{N}^*$ est une partie stricte de $\mathbb{N}$. De même, l'application f de $[0,1]$ dans $[0,2]$ qui à x associe $2x$ est une bijection. Pourtant $[0,1]$ est une partie stricte de $[0,2]$.
- ⇨ Il existe des ensembles infinis qui ne sont pas équipotents. Par exemple, on peut montrer que, quel que soit l'ensemble X, les ensembles X et $\mathcal{P}(X)$ ne sont pas équipotents. En particulier $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne sont pas équipotents. Il existe donc des ensembles infinis qui ont « plus d'éléments » que d'autres.
- ⇨ On dit qu'un ensemble est *dénombrable* lorsqu'il est équipotent à $\mathbb{N}$. On peut montrer que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. On peut montrer cependant que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. On dit qu'un ensemble est *au plus dénombrable* lorsqu'il est fini ou dénombrable.

1.2 Ensemble fini, cardinal

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[\![1, n]\!] \coloneqq \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}$. En particulier $[\![1, 0]\!] = \varnothing$, $[\![1, 1]\!] = \{1\}$, $[\![1, 2]\!] = \{1, 2\}$, $[\![1, 3]\!] = \{1, 2, 3\}$, etc.

Définition 1.3

On dit qu'un ensemble A est *fini* lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que A est équipotent à $[\![1, n]\!]$. On dit qu'il est *infini* dans le cas contraire.

Définition 1.4

Soit A un ensemble fini. Alors il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que A est équipotent à $[\![1, n]\!]$. On l'appelle *cardinal* de A et on le note $\mathrm{Card}(A)$ ou $|A|$.

Remarques

- ⇨ Un ensemble A est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si il existe une bijection de $[\![0, n[\![$ dans A.
- ⇨ Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leqslant b + 1$. L'ensemble $[\![a, b]\!]$ est fini de cardinal $b - a + 1$.

Proposition 1.5

Soit A un ensemble fini et B un ensemble. Alors, A et B sont équipotents si et seulement si B est fini et $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$.

Exercices 1

- ⇨ Dénombrer les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3a + b = 833$.
- ⇨ On a utilisé 6921 chiffres (les caractères d'imprimerie) pour numéroter les pages d'un dictionnaire. Combien de pages ce dictionnaire contient-il ? Chaque page est numérotée une seule fois, la première portant le numéro 1.

Définition 1.6

Soit A une partie de $\mathbb{N}$.

- — Si A est fini, il est l'image d'une unique application strictement croissante de $[\![1, \mathrm{Card}(A)]\!]$ dans $\mathbb{N}$.
- — Sinon, A est infini et il est l'image d'une unique application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Une telle application est appelée une *énumération* de A.

Proposition 1.7

Une partie de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée.

Proposition 1.8

Soit E un ensemble fini et A une partie de E. Alors

- — A est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.
- — $A = E$ si et seulement si $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$.

Proposition 1.9

Soit E et F deux ensembles. Alors

- — Si F est fini, il existe une injection de E dans F si et seulement si E est fini et $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.
- — Si E est fini et F est non vide, il existe une surjection de E dans F si et seulement si F est fini et $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.
- — Si l'un des ensembles est fini, il existe une bijection de E dans F si et seulement si l'autre est fini et $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Proposition 1.10: Principe des tiroirs

Soit E et F deux ensembles finis tels que $\mathrm{Card}(F) < \mathrm{Card}(E)$ et f une application de E dans F. Alors, il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.

Exercices 2

- ⇨ Soit $n \geqslant 2$. En supposant que la relation « est ami avec » est symétrique, montrer que dans une assemblée de

n personnes, il y en a au moins deux qui ont le même nombre d'amis.

⇨ Soit $x_1, \dots, x_{n+1} \in [0,1]$. Montrer qu'il existe $i, j \in [\![1, n+1]\!]$ tels que $i \neq j$ et

$$|x_i - x_j| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Proposition 1.11

Soit E un ensemble fini, F un ensemble et f une application de E dans F. Alors

— $f(E)$ est un ensemble fini et $\operatorname{Card}(f(E)) \leqslant \operatorname{Card}(E)$

— $\operatorname{Card}(f(E)) = \operatorname{Card}(E)$ si et seulement si f est injective.

Si de plus F est un ensemble fini.

— $\operatorname{Card}(f(E)) \leqslant \operatorname{Card}(F)$

— $\operatorname{Card}(f(E)) = \operatorname{Card}(F)$ si et seulement si f est surjective.

Proposition 1.12

Soit E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F.

— Si f est injective et $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$, alors f est bijective.

— Si f est surjective et $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$, alors f est bijective.

Autrement dit, si $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$, alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est bijective} \iff f \text{ est surjective.}$$

2 Dénombrement

2.1 Dénombrement élémentaire

Proposition 2.1

Soit E un ensemble fini et A, B deux parties disjointes de E, c'est-à-dire telles que $A \cap B = \varnothing$. Alors

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B).$$

Remarques

⇨ Le « ou exclusif » se traduit donc par un $+$ en dénombrement.

⇨ Si A et B sont deux parties disjointes, leur réunion est parfois notée $A \sqcup B$.

Proposition 2.2

Soit E un ensemble fini.

— Si A est une partie de E

$$\operatorname{Card}\left(\bar{A}\right) = \operatorname{Card}(E) - \operatorname{Card}(A).$$

— Si A et B sont deux parties de E

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B) - \operatorname{Card}(A \cap B).$$

— Si $(A_1, \dots, A_n)$ est une partition de E, alors

$$\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(A_1) + \cdots + \operatorname{Card}(A_n).$$

Remarque

⇨ L'avantage du passage au complémentaire est qu'il permet de prendre la négation de la propriété qui définit l'ensemble. Cela donne parfois une phrase plus simple à manipuler et donc un ensemble plus simple à dénombrer.

Exercices 3

⇨ Quel est le nombre d'entiers entre 1 et 100 qui ne sont pas divisibles par 3 ?

⇨ Dénombrer

$$A := \{n \in [\![1, 100]\!] \mid 2|n \text{ ou } 3|n\}.$$

⇨ Quel est le nombre de rythmes de n temps que l'on peut composer uniquement avec des noires (1 temps) et des blanches (2 temps) ?

Proposition 2.3: Formule du crible

Soit $A_1, \dots, A_n$ des parties d'un même ensemble fini E. Alors

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right).$$

Remarque

⇨ Par exemple, pour $n = 3$, la formule du crible s'écrit

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right) &= \operatorname{Card}(A_1) + \operatorname{Card}(A_2) + \operatorname{Card}(A_3) \\ &\quad - [\operatorname{Card}(A_2 \cap A_3) + \operatorname{Card}(A_1 \cap A_3) + \operatorname{Card}(A_1 \cap A_2)] \\ &\quad + \operatorname{Card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Proposition 2.4

— Si A et B sont deux ensembles finis, alors $A \times B$ est fini et

$$\operatorname{Card}\left(A \times B\right) = \operatorname{Card}(A)\operatorname{Card}(B).$$

Plus généralement, si $A_1, \dots, A_n$ sont des ensembles finis, $A_1 \times \cdots \times A_n$ est fini et

$$\operatorname{Card}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{Card}(A_k).$$

— Si A est un ensemble fini et $n \in \mathbb{N}$, alors A^n est fini et

$$\operatorname{Card}\left(A^n\right) = \operatorname{Card}(A)^n.$$

Remarque

⇨ La formule $\operatorname{Card}\left(A_1 \times \cdots \times A_n\right) = \operatorname{Card}(A_1) \cdots \operatorname{Card}(A_n)$ dit simplement que lorsque l'on doit faire une succession « et » de choix indépendants, on dénombre ces choix et on les multiplie.

Exercices 4

⇨ Montrer que dans un village de 700 personnes, deux au moins ont les mêmes initiales.

⇨ Combien de menus différents peut-on faire avec 4 entrées, 6 plats et 2 desserts ?

⇨ Quel est le nombre de mots de 4 lettres contenant au moins un « e » ?

Proposition 2.5

— Soit E et F deux ensembles finis. Alors $\mathcal{F}\left(E, F\right) = F^E$ est fini et

$$\operatorname{Card}\left(\mathcal{F}\left(E, F\right)\right) = \operatorname{Card}\left(F^E\right) = \operatorname{Card}(F)^{\operatorname{Card}(E)}.$$

— Soit E un ensemble fini. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et

$$\operatorname{Card}\left(\mathcal{P}(E)\right) = 2^{\operatorname{Card}(E)}.$$

Exercice 5

⇨ Quel est le nombre de possibilités de répartir p boules distinctes dans n urnes distinctes ?

⇨ Une urne contient n boules distinctes. On effectue p tirages successifs avec remise (c'est-à-dire que l'on remet la boule dans l'urne après chaque tirage). Combien y-a-t-il de possibilités ?

⇨ De combien de manières peut-on descendre $n + 1$ marches (donc n « paliers »), en en sautant éventuellement certaines ?

Proposition 2.6: Lemme des bergers

Soit E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall y \in F, \quad \operatorname{Card}\left(f^{-1}\left(\{y\}\right)\right) = p.$$

Alors $\operatorname{Card}(E) = p \operatorname{Card}(F)$.

Remarque

⇨ Soit E l'ensemble des pattes des moutons foulant un pré, F l'ensemble des moutons du pré et f l'application de E dans F qui à chaque patte associe son propriétaire. Comme chaque mouton a 4 pattes

$$\forall m \in F, \quad \text{Card}\left(f^{-1}\left(\{m\}\right)\right) = 4.$$

On en déduit que le nombre de pattes foulant le pré est égal à quatre fois le nombre de moutons. C'est de cet exemple que la proposition précédente tire son nom de « lemme des bergers ».

2.2 Arrangement, combinaison

Définition 2.7: p-listes

Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}$. On appelle *p-liste* d'éléments de E tout p-uplet $(a_1, \ldots, a_p) \in E^p$.

Exercice 6

⇨ Si $E = \{1, 2, 3\}$, donner les 2-listes d'éléments de E.

Remarques

⇨ Les p-listes d'éléments de E sont les fonctions de $[\![1, p]\!]$ dans E.

⇨ Choisir une p-liste, c'est choisir p éléments de E en tenant compte de l'*ordre* et en autorisant les *répétitions*.

Proposition 2.8: Nombre de listes

Soit E un ensemble de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$. Alors, il existe

$$n^p$$

p-listes d'éléments de E.

Définition 2.9: p-arrangements

Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}$. On appelle *p-arrangement* d'éléments de E toute p-liste $(a_1, \ldots, a_p) \in E^p$ telle que

$$\forall i, j \in [\![1, p]\!], \quad i \neq j \quad \Longrightarrow \quad a_i \neq a_j.$$

Exercice 7

⇨ Si $E = \{1, 2, 3\}$, donner les 2-arrangements d'éléments de E.

Remarques

⇨ Les p-arrangements d'éléments de E sont les fonctions injectives $[\![1, p]\!]$ dans E.

⇨ Choisir un p-arrangement, c'est choisir p éléments de E en tenant compte de l'*ordre* et en n'autorisant pas les *répétitions*.

Proposition 2.10: Nombre d'arrangements

Soit E un ensemble de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$. Alors il existe

$$A_n^p := \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

p-arrangements d'éléments de E.

Remarque

⇨ Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, alors

$$A_n^p = \underbrace{n\,(n-1)\cdots(n-(p-1))}_{p \text{ termes}}.$$

Exercices 8

⇨ On répartit p boules distinctes dans n urnes distinctes. Quel est le nombre de répartitions pour lesquelles chaque urne contient au plus une boule ?

⇨ Une urne contient n boules distinctes. On effectue p tirages successifs sans remise. Combien y-a-t-il de possibilités ?

Proposition 2.11

— Il existe A_n^p injections d'un ensemble à $p \in \mathbb{N}$ éléments dans un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments.
— Il existe $n!$ bijections d'un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments dans un ensemble à n éléments.

Remarque

⇨ En particulier, si E est un ensemble à n éléments, il existe $n!$ bijections de E dans E. De telles applications sont appelées des *permutations* de E.

Exercice 9

⇨ Combien d'anagrammes peut-on former avec les mots « maths », « chimie » et « anagramme » ?

Définition 2.12: p-combinaisons

Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}$. On appelle *p-combinaison* d'éléments de E toute partie de E à p éléments.

Remarque

⇨ Choisir une p-combinaison, c'est choisir p éléments de E sans tenir compte de l'*ordre* et en n'autorisant pas les *répétitions*.

Proposition 2.13: Nombre de combinaisons

Soit E un ensemble de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$. Alors il existe

$$C_n^p := \begin{cases} \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

p-combinaisons d'éléments de E.

Remarques

⇨ Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, alors

$$C_n^p = \frac{\overbrace{n\,(n-1)\cdots(n-(p-1))}^{p \text{ termes}}}{p!}.$$

⇨ Le nombre de combinaisons C_n^p est aussi noté $\binom{n}{p}$. Nous utiliserons par la suite cette notation qui est la notation internationale.

Exercices 10

⇨ Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. Dénombrer les tirages possibles si on tire 3 boules
— successivement et avec remise.
— successivement et sans remise.
— simultanément.

⇨ Un code de coffre-fort est composé de 6 chiffres entre 0 et 9 dont l'ordre compte. Dénombrer
— tous les codes possibles.
— les codes dont tous les chiffres sont distincts.
— les codes ne contenant pas 0.
— les codes contenant au plus deux fois le chiffre 1.
— les codes contenant autant de chiffres pairs que de chiffres impairs.
— les codes contenant la succession 123 quelque-part.
— les codes strictement croissants.

⇨ Quel est le nombre de manières de répartir p boules indiscernables dans n urnes distinctes sachant qu'on ne peut pas mettre plus d'une boule par urne ?

⇨ Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x_1 + \cdots + x_n = p$ dans $\{0, 1\}^n$.

⇨ Combien peut-on former de mots contenant p fois la lettre O et q fois la lettre I ?

⇨ Quel est le nombre de manières de répartir p boules indiscernables dans n urnes distinctes ?

⇨ Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x_1 + \cdots + x_n = p$ dans $\mathbb{N}^n$.

⇨ Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

⇨ Combien y a-t-il d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

Proposition 2.14

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in [\![0, n]\!], \qquad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$
$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \qquad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$
$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \qquad \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

Remarque

⇨ La dernière formule est parfois appelée « formule du capitaine » ou formule du « comité président ».

Proposition 2.15

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$
$$\forall a, b, n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{p=0}^{n} \binom{a}{p}\binom{b}{n-p} = \binom{a+b}{n}.$$

Remarque

⇨ La seconde formule est appelée formule de Vandermonde.

Proposition 2.16: Binôme de Newton

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p.$$