

# Continuité, limites

« Un mathématicien est une machine à transformer le café en théorèmes. »

— PAUL ERDÖS (1913-1996)

« Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée! »

— JOHN VON NEUMANN (1903-1957)

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Fonction numérique, topologie élémentaire</b>	<b>1</b>
1.1	Propriété locale . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Limite</b>	<b>2</b>
2.1	Définition, propriétés élémentaires . . . . .	2
2.2	Limite et ordre sur $\mathbb{R}$ . . . . .	4
2.3	Limite à gauche, à droite . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Continuité</b>	<b>6</b>
3.1	Continuité ponctuelle . . . . .	6
3.2	Continuité sur une partie . . . . .	8
3.3	Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	9
3.4	Théorème de compacité . . . . .	10
3.5	Continuité uniforme . . . . .	11

## 1 Fonction numérique, topologie élémentaire

### Définition 1.1

On appelle *fonction numérique* toute fonction définie sur une partie  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Remarques

- ⇒ Dans la suite de ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désignera le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .
- ⇒ Il arrive que l'on définisse une fonction par son expression «  $f(x)$  ». C'est alors au lecteur de déterminer son domaine de définition, c'est-à-dire l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}$  pour lesquels «  $f(x)$  » a un sens.

### Définition 1.2

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  et  $A$  une partie de  $\mathcal{D}$ . On dit que  $f$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  sur  $A$  lorsque la restriction de  $f$  à  $A$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$ .

### 1.1 Propriété locale

#### Définition 1.3

On dit que  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  est définie au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  lorsque, pour tout voisinage  $\mathcal{V}$  de  $a$ ,  $\mathcal{D} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ .

#### Proposition 1.4

Une fonction  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  est définie au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  si et seulement si il existe une suite d'éléments de  $\mathcal{D}$  qui tend vers  $a$ .

### Définition 1.5

On dit que  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  lorsqu'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $a$  tel que  $f$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{D} \cap \mathcal{V}$ .

### Remarques

⇒ La fonction  $\sin$  est croissante sur  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Elle est donc croissante au voisinage de 0.

⇒ Une fonction  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  est bornée au voisinage de  $a \in \mathbb{R}$  si et seulement si

$$\exists \eta > 0, \quad \exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x)| \leq M.$$

Une fonction  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  est bornée au voisinage de  $+\infty$  si et seulement si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad x \geq m \implies |f(x)| \leq M.$$

### Définition 1.6

On dit qu'une propriété  $\mathcal{P}$  est *locale en*  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  lorsque, quelles que soient les fonctions  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  et  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  définies au voisinage de  $a$ , si il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $a$  tel que

$$\forall x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{V}, \quad g(x) = f(x)$$

alors  $\mathcal{P}(f)$  est vrai si et seulement si  $\mathcal{P}(g)$  est vrai.

### Définition 1.7

On dit qu'un élément  $a \in \mathcal{D}$  est *intérieur* à  $\mathcal{D}$  lorsqu'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $a$  tel que  $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}$ .

### Remarque

⇒ Si  $I$  est un intervalle, un élément  $a \in I$  est intérieur à  $I$  si et seulement si ce n'est pas une de ses extrémités.

## 2 Limite

### 2.1 Définition, propriétés élémentaires

#### Définition 2.1

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction définie au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $l \in \mathbb{K}$ . On dit que  $f(x)$  tend vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  et on note

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$$

lorsque, quel que soit le voisinage  $\mathcal{W}$  de  $l$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $a$  tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad x \in \mathcal{V} \implies f(x) \in \mathcal{W}.$$

La propriété « tend vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  » est locale en  $a$ .

### Remarque

⇒ En pratique, on utilisera les caractérisations suivantes :

— Pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $l \in \mathbb{K}$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

— Pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $l = -\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |x - a| \leq \eta \implies f(x) \leq M.$$

— Pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $l = +\infty$

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq m.$$

— Pour  $a = -\infty$  et  $l \in \mathbb{K}$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad x \leq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

— Pour  $a = -\infty$  et  $l = -\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, x \leq A \implies f(x) \leq M.$$

— Pour  $a = -\infty$  et  $l = +\infty$

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, x \leq A \implies f(x) \geq m.$$

— Pour  $a = +\infty$  et  $l \in \mathbb{K}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, x \geq B \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

— Pour  $a = +\infty$  et  $l = -\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, x \geq B \implies f(x) \leq M.$$

— Pour  $a = +\infty$  et  $l = +\infty$

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, x \geq B \implies f(x) \geq m.$$

### Exercice 1

⇒ Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante telle que

$$f(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Montrer que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Que dire si  $f$  n'est pas croissante ?

### Proposition 2.2

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction définie au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $l \in \mathbb{K}$ . Alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$$

si et seulement si, pour toute suite  $(u_n)$  d'éléments de  $\mathcal{D}$  tendant vers  $a$ , la suite  $(f(u_n))$  tend vers  $l$ .

### Remarques

⇒ Si  $f$  est définie en  $a \in \mathbb{R}$  et admet une limite en  $a$ , cette limite est  $f(a)$ .

⇒ Cette proposition est utile pour prouver qu'une fonction  $f$  n'a pas de limite en  $a$ . Pour cela, il suffit de trouver deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a.$$

et telles que les suites de terme général  $f(u_n)$  et  $f(v_n)$  aient des limites distinctes.

### Exercices 2

⇒ Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction périodique admettant une limite finie en  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est constante.

⇒ Montrer que la fonction d'expression  $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$  n'a pas de limite en 0.

### Proposition 2.3

Si  $f$  admet une limite  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) en  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors cette limite est unique. Si tel est le cas, on écrit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l.$$

### Proposition 2.4

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $l \in \mathbb{K}$ . On suppose que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l.$$

Alors

$$|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} |l| \quad \text{et} \quad \overline{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \bar{l}.$$

### Proposition 2.5

Soit  $f$  une fonction complexe définie au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $l \in \mathbb{C}$ . Alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \iff \left[ \operatorname{Re}[f(x)] \xrightarrow{x \rightarrow a} \operatorname{Re}(l) \text{ et } \operatorname{Im}[f(x)] \xrightarrow{x \rightarrow a} \operatorname{Im}(l) \right].$$

### Proposition 2.6

- Les théorèmes usuels portant sur les combinaisons linéaires, les produits et les quotients de limites de suites restent vrais pour les fonctions.
- Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  tendant vers  $l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$  en  $a$  et  $g$  une fonction définie au voisinage de  $l_1$  tendant vers  $l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) en  $l_1$ . Si  $g \circ f$  est définie au voisinage de  $a$ , alors

$$(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_2.$$

### Remarques

- $\Rightarrow$  Comme pour les suites, la somme d'une fonction admettant une limite finie en  $a$  et d'une fonction n'admettant pas de limite en  $a$  n'admet pas de limite en  $a$ . Les autres théorèmes de ce type sont souvent faux; par exemple, il est possible qu'une fonction  $f$  n'admette pas de limite en  $a$  bien que  $g \circ f$  admette une limite en  $a$ .
- $\Rightarrow$  Soit  $f$  et  $g$  sont deux fonctions réelles définies sur  $\mathcal{D}$ . On définit les fonctions  $\sup(f, g)$  et  $\inf(f, g)$  par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \sup(f, g)(x) := \max(f(x), g(x)) \quad \text{et} \quad \inf(f, g)(x) := \min(f(x), g(x)).$$

Si  $f$  et  $g$  admettent pour limites respectives  $l_f$  et  $l_g \in \mathbb{R}$  en  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors

$$\sup(f, g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \max(l_f, l_g) \quad \text{et} \quad \inf(f, g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \min(l_f, l_g).$$

## 2.2 Limite et ordre sur $\mathbb{R}$

### Proposition 2.7

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction admettant une limite finie en  $a$ . Alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .

### Proposition 2.8

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $f(x)$  tend vers  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  lorsque  $x$  tend vers  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ .

- Si  $f$  est majorée par  $M \in \mathbb{R}$ , alors  $l \leq M$ .
- Si  $f$  est minorée par  $m \in \mathbb{R}$ , alors  $l \geq m$ .

### Proposition 2.9

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $f(x)$  tend vers  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  lorsque  $x$  tend vers  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ .

- Si  $M$  est un réel tel que  $l < M$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $a$  tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad x \in \mathcal{V} \implies f(x) \leq M.$$

- Si  $m$  est un réel tel que  $l > m$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $a$  tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad x \in \mathcal{V} \implies f(x) \geq m.$$

### Remarques

- $\Rightarrow$  En pratique, il conviendra d'expliciter les voisinages. Par exemple, si  $f(x)$  tend vers  $l < M$  lorsque  $x$  tend vers  $a \in \mathbb{R}$ , il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad |x - a| \leq \eta \implies f(x) \leq M.$$

- $\Rightarrow$  Si une fonction complexe  $f$  admet une limite  $l \in \mathbb{C}$  non nulle en  $+\infty$ , il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad x \geq m \implies f(x) \neq 0.$$

### Théorème 2.10: Théorème des gendarmes

Soit  $f, g$  et  $h : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

On suppose que  $f$  et  $h$  admettent la même limite finie  $l \in \mathbb{R}$  en  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . Alors

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l.$$

### Proposition 2.11

Soit  $f$  et  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leq g(x)$$

et  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ .

- Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ , alors  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ .
- Si  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$ , alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$ .

### Proposition 2.12

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction,  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $l \in \mathbb{K}$  et  $g$  une fonction réelle positive telle que

- $\forall x \in \mathcal{D}, \quad |f(x) - l| \leq g(x)$ ,
- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .

Alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l.$$

### Exercice 3

$\Rightarrow$  Déterminer la limite, si elle existe, de la fonction d'expression  $\frac{x}{2+\sin(\frac{1}{x})}$  en 0.

## 2.3 Limite à gauche, à droite

### Définition 2.13

- Soit  $f$  une fonction définie au voisinage à gauche de  $a \in \mathbb{R}$  et  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). On dit que  $f$  admet  $l$  pour *limite à gauche* en  $a$  lorsque la restriction de  $f$  à  $\mathcal{D} \cap ]-\infty, a[$  admet  $l$  pour limite en  $a$ . Si tel est le cas, on note

$$f(x) \xrightarrow[x < a]{x \rightarrow a} l.$$

La propriété « tend vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  par la gauche » est locale à gauche en  $a$ .

- Soit  $f$  une fonction définie au voisinage à droite de  $a \in \mathbb{R}$  et  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). On dit que  $f$  admet  $l$  pour *limite à droite* en  $a$  lorsque la restriction de  $f$  à  $\mathcal{D} \cap ]a, +\infty[$  admet  $l$  pour limite en  $a$ . Si tel est le cas, on note

$$f(x) \xrightarrow[x > a]{x \rightarrow a} l.$$

La propriété « tend vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  par la droite » est locale à droite en  $a$ .

### Remarque

$\Rightarrow$  On définit de même les notions de limite à gauche au sens large, de limite à droite et de limite épointée (pour  $x \neq a$ ). On écrit alors respectivement

$$f(x) \xrightarrow[x \leq a]{x \rightarrow a} l, \quad f(x) \xrightarrow[x \geq a]{x \rightarrow a} l, \quad f(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \rightarrow a} l.$$

### Proposition 2.14

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a$  et  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). Alors  $f(x)$  tend vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  si et seulement si, les objets ci-dessous susceptibles d'avoir un sens

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x), \quad f(a) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$$

existent et sont égaux à  $l$ .

## Remarques

⇒ Par exemple, si  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$ , et  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors  $f(x)$  tend vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers 0 si et seulement si

$$f(x) \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}}{\longrightarrow} l \quad \text{et} \quad f(x) \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} l.$$

De même, si  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  et  $l \in \mathbb{R}$ , alors  $f(x)$  tend vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers 0 si et seulement si

$$f(0) = l \quad \text{et} \quad f(x) \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} l.$$

⇒ On a bien entendu des théorèmes similaires faisant intervenir les limites au sens large. Par exemple, si  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $f(x)$  tend vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  si et seulement si

$$f(x) \underset{\substack{x \rightarrow a \\ x \leq a}}{\longrightarrow} l \quad \text{et} \quad f(x) \underset{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}}{\longrightarrow} l.$$

## Exercice 4

⇒ Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ .

## Théorème 2.15: Théorème de la limite monotone

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante sur un intervalle  $I$ .

- Si  $a \in I$  n'est pas une borne de  $I$ ,  $f$  admet une limite finie à gauche (au sens strict) et une limite finie à droite (au sens strict) en  $a$ . De plus

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

- Si  $a$  est la borne supérieure de  $I$ ,  $f$  admet une limite en  $a$ . Cette limite est finie si  $f$  est majorée, et est égale à  $+\infty$  sinon.
- Si  $a$  est la borne inférieure de  $I$ ,  $f$  admet une limite en  $a$ . Cette limite est finie si  $f$  est minorée, et est égale à  $-\infty$  sinon.

## Remarques

⇒ Une proposition similaire existe pour les fonctions décroissantes.

⇒ Si  $f : ]-\infty, a[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction croissante admettant une limite  $l \in \mathbb{R}$  en  $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , alors

$$\forall x \in ]-\infty, a[, \quad f(x) \leq l.$$

De plus, si  $f$  est strictement croissante, alors

$$\forall x \in ]-\infty, a[, \quad f(x) < l.$$

## 3 Continuité

### 3.1 Continuité ponctuelle

#### Définition 3.1

On dit qu'une fonction  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  est *continue* en  $x_0 \in \mathcal{D}$  lorsque

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\longrightarrow} f(x_0).$$

La propriété « est continue en  $x_0$  » est locale en  $x_0$ . On appelle domaine de continuité de  $f$  l'ensemble des  $x_0 \in \mathcal{D}$  en lesquels  $f$  est continue.

## Remarques

⇒ La continuité de  $f$  en  $x_0$  s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

- ⇒ Une fonction  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  est continue en  $x_0 \in \mathcal{D}$  si et seulement si elle admet une limite en  $x_0$ .
- ⇒ On dit qu'une fonction  $f$  est *continue à droite* en  $x_0$  lorsque

$$f(x) \xrightarrow[x > x_0]{x \rightarrow x_0} f(x_0).$$

De même, on définit la notion de *continuité à gauche*. Une fonction est continue en  $x_0$  si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en  $x_0$ .

- ⇒ On dit qu'une fonction  $f$  admet une *discontinuité de première espèce* en  $x_0$  lorsqu'elle admet des limites à droite et à gauche et lorsque l'une de ces limites est différente de  $f(x_0)$ . Par exemple, la fonction partie entière admet une discontinuité de première espèce en tout point  $x_0 \in \mathbb{Z}$ .
- ⇒ Les fonctions valeur absolue, puissance (en particulier les puissances entières et les racines  $n$ -ièmes),  $\ln$ ,  $\exp$ , les fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques, directes et réciproques sont continues en tout point de leur domaine de définition.
- ⇒ Une fonction continue en  $x_0$  est bornée au voisinage de  $x_0$ .

### Exercice 5

⇒ Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est discontinue en 0 et que cette discontinuité n'est pas de première espèce.

### Définition 3.2

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction définie au voisinage d'un point  $a \in \mathbb{R}$  n'appartenant pas à  $\mathcal{D}$ . Lorsque  $f(x)$  admet une limite finie  $l \in \mathbb{K}$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ , on dit que  $f$  est *prolongeable par continuité* en  $a$ . La fonction

$$\hat{f} : \mathcal{D} \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

est alors appelée *prolongement par continuité* de  $f$  en  $a$ . C'est une fonction continue en  $a$ .

### Proposition 3.3

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction et  $x_0 \in \mathcal{D}$ . Alors  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si pour toute suite  $(u_n)$  d'éléments de  $\mathcal{D}$  convergeant vers  $x_0$

$$f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x_0).$$

### Remarques

⇒ Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $I$  et  $(u_n)$  une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

Alors, si  $(u_n)$  admet une limite  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ , c'est une borne de  $I$  ou un point fixe de  $f$ .

- ⇒ Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues en tout point de  $\mathbb{R}$ . Si elles coïncident sur  $\mathbb{Q}$ , alors  $f = g$ .
- ⇒ Cette proposition est utile pour prouver qu'une fonction  $f$  n'est pas continue en  $x_0$ . Pour cela, il suffit de trouver une suite  $(u_n)$  convergeant vers  $x_0$  telle que la suite de terme général  $f(u_n)$  ait une limite différente de  $f(x_0)$ .

### Exercices 6

- ⇒ Montrer que la fonction caractéristique de  $\mathbb{Q}$  est discontinue en tout point.
- ⇒ Quelles sont les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continues en tout point de  $\mathbb{R}$ , telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

### Proposition 3.4: Théorèmes usuels

Soit  $f$  et  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  deux fonctions continues en  $x_0 \in \mathcal{D}$ . Alors

- Si  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda f + \mu g$  est continue en  $x_0$ .
- $fg$  est continue en  $x_0$ .
- Si  $g(x_0) \neq 0$ ,  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $x_0$  et  $f/g$  est continue en  $x_0$ .

### Proposition 3.5: Théorèmes usuels

Soit  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{K}$  deux fonctions telles que  $g \circ f$  est défini au voisinage de  $x_0 \in \mathcal{D}_f$ . Si  $f$  est continue en  $x_0$  et  $g$  est continue en  $f(x_0)$ , alors  $g \circ f$  est continue en  $x_0$ .

#### Remarque

⇒ La somme d'une fonction continue en  $x_0$  et d'une fonction discontinue en  $x_0$  est discontinue en  $x_0$ . Les autres propositions de ce type peuvent être fausses. Par exemple, si  $f$  et  $g$  sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := x \quad \text{et} \quad g(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

alors  $f$  est continue en 0 et  $g$  ne l'est pas. Pourtant  $f \cdot g$  l'est. On retiendra que les réciproques des théorèmes usuels peuvent être fausses.

### Proposition 3.6

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue en  $x_0 \in \mathcal{D}$ . Alors  $\bar{f}$  et  $|f|$  sont continues en  $x_0$ .

### Proposition 3.7

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction et  $x_0 \in \mathcal{D}$ . Alors

$$[f \text{ est continue en } x_0] \iff [\operatorname{Re}(f) \text{ et } \operatorname{Im}(f) \text{ sont continues en } x_0].$$

#### Remarque

⇒ Si  $f$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$  continue en  $x_0$ , alors  $e^f$  est continue en  $x_0$ .

#### Exercice 7

⇒ Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{e^{ix} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ i & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}$ .

## 3.2 Continuité sur une partie

### Définition 3.8

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ .

- On dit que  $f$  est *continue* lorsqu'elle est continue en tout point de  $\mathcal{D}$ .
- Si  $A$  est une partie de  $\mathcal{D}$ , on dit que  $f$  est continue sur  $A$  lorsque la restriction de  $f$  à  $A$  est continue.

#### Remarque

⇒ Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  et  $A$  une partie de  $\mathcal{D}$ . Si  $f$  est continue en tout point de  $A$ , alors  $f$  est continue sur  $A$ . Cependant, la réciproque est fautive. En effet, si  $f$  est la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  mais n'est pas continue en 0.

### Définition 3.9

Soit  $k \in \mathbb{R}_+$ . On dit qu'une fonction  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  est *k-lipschitzienne* lorsque

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

#### Exercice 8

⇒ Montrer que les fonctions « valeur absolue » et « sinus » sont 1-lipschitziennes.



### Proposition 3.10

Une fonction lipschitzienne est continue.

Dans la suite du cours d'analyse, on s'intéressera le plus souvent à des fonctions dont le domaine de définition est une partie relativement simple de  $\mathbb{R}$ . Afin de formaliser cela, une partie de  $\mathbb{R}$  sera dite *élémentaire* lorsque c'est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. Par exemple  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$  sont des parties élémentaires de  $\mathbb{R}$  alors que  $\mathbb{Q}$  n'en est pas une. Notons que cette définition est propre à ce cours. Les parties élémentaires de  $\mathbb{R}$  jouissent de nombreuses propriétés :  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}$  sont des parties élémentaires, une union finie de parties élémentaires est une partie élémentaire, une intersection finie de parties élémentaires est une partie élémentaire, le complémentaire d'une partie élémentaire est une partie élémentaire. Autrement dit, tout ensemble construit à partir de parties élémentaires à l'aide d'un nombre fini d'opérations est élémentaire.

On dit que deux intervalles  $I$  et  $J$  sont *bien disjoints* lorsque  $I \cup J$  n'est pas un intervalle. En particulier deux intervalles bien disjoints sont disjoints. Mais la réciproque est fautive comme le montre l'exemple de  $I = [0, 1]$  et  $J = ]1, 2]$  qui sont disjoints mais qui ne sont pas bien disjoints. On montre que si  $A$  est une partie élémentaire de  $\mathbb{R}$ , à réordonnement près, il existe un unique  $n$ -uplet  $(I_1, \dots, I_n)$  d'intervalles deux à deux bien disjoints tels que  $A = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$ . On dit que les  $I_k$  sont les *composantes connexes* de  $A$ . Enfin, on dit que  $a \in \mathbb{R}$  est une *extrémité* de  $A$  lorsque c'est l'extrémité d'un des  $I_k$ .

Si  $\mathcal{D}$  est une partie élémentaire, une fonction  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  est définie au voisinage de  $a \in \overline{\mathcal{D}}$  si et seulement si  $a$  est un élément ou une extrémité de  $\mathcal{D}$ . D'autre part, un élément  $a \in \mathcal{D}$  est intérieur à  $\mathcal{D}$  si et seulement si ce n'est pas une extrémité de  $\mathcal{D}$ .

#### Exercice 9

- $\Rightarrow$  Montrer que  $\mathcal{D} := \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$  est une partie élémentaire. Si  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ , déterminer
- L'ensemble des  $a \in \mathbb{R}$  pour lesquels  $f$  est définie au voisinage de  $a$ .
  - L'ensemble des  $a \in \mathcal{D}$  intérieurs à  $\mathcal{D}$ .

### Proposition 3.11

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction définie sur un domaine *élémentaire* et  $\mathcal{D} = I_1 \cup \dots \cup I_n$  la décomposition de  $\mathcal{D}$  en composantes connexes. Alors  $f$  est continue si et seulement si, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f$  est continue sur  $I_k$ .

### Proposition 3.12

- Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .
- Si  $f$  est continue sur  $I \cap ]a, +\infty[$ , elle est continue en tout point de  $I \cap ]a, +\infty[$ .
  - Si  $f$  est continue sur  $I \cap [a, +\infty[$ , elle est continue à droite en  $a$  et en tout point de  $I \cap ]a, +\infty[$ .

## 3.3 Théorème des valeurs intermédiaires

### Théorème 3.13: Théorème des valeurs intermédiaires

Soit  $f$  une fonction réelle continue sur  $[a, b]$ . Si  $y_0 \in \llbracket f(a), f(b) \rrbracket$ , il existe  $x_0 \in [a, b]$  tel que  $f(x_0) = y_0$ .

#### Remarques

- $\Rightarrow$  Une fonction réelle continue ne s'annulant pas sur un intervalle  $I$  est de signe constant.
- $\Rightarrow$  Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  telle que

$$\forall x \in I, \quad [f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x) = 1].$$

Alors  $f$  est constante. Plus généralement, si sur un intervalle, une fonction continue prend un nombre fini de valeurs, alors elle est constante.

#### Exercice 10

- $\Rightarrow$  Soit  $f$  une fonction continue de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ . Montrer que  $f$  admet un point fixe.

### Proposition 3.14

Soit  $f$  une fonction réelle continue sur  $]a, b[$  admettant respectivement pour limite  $l_a$  et  $l_b \in \overline{\mathbb{R}}$  en  $a$  et  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Si  $y_0 \in \llbracket l_a, l_b \rrbracket$ , il existe  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $f(x_0) = y_0$ .

### Exercice 11

⇒ Montrer que tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

#### Proposition 3.15

L'image d'un intervalle par une fonction réelle continue est un intervalle.

#### Remarques

⇒ Cette proposition est une reformulation du théorème des valeurs intermédiaires.

⇒ Il est possible que les intervalles  $I$  et  $f(I)$  ne soient pas de même nature (ouvert, fermé, ouvert à gauche et fermé à droite). Par exemple, si  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

on a  $f(]-\infty, +\infty[) = ]0, 1]$ .

#### Théorème 3.16: Théorème de la bijection

— Soit  $f$  une fonction continue, strictement croissante sur  $[a, b]$ . Alors elle réalise une bijection de  $[a, b]$  sur

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

— Soit  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $f$  une fonction continue, strictement croissante sur  $]a, b[$ . On pose

$$l_a := \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{et} \quad l_b := \lim_{x \rightarrow b} f(x).$$

Alors  $f$  réalise une bijection de  $]a, b[$  sur

$$f(]a, b[) = ]l_a, l_b[.$$

#### Proposition 3.17

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction réelle continue strictement monotone sur  $I$ . Alors  $f$  induit une bijection de l'intervalle  $I$  sur l'intervalle  $J := f(I)$  et sa bijection réciproque  $f^{-1} : J \rightarrow I$  est continue sur  $J$ .

#### Remarque

⇒ La fonction  $\sin$  est strictement croissante sur  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Comme  $\sin(-\pi/2) = -1$  et  $\sin(\pi/2) = 1$ , elle réalise une bijection de  $[-\pi/2, \pi/2]$  sur  $[-1, 1]$ . Sa bijection réciproque, la fonction Arcsin est donc continue sur  $[-1, 1]$ .

### Exercice 12

⇒ Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) := xe^x$$

Montrer que  $f$  réalise une bijection continue de  $\mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{R}_+$ , que  $f^{-1}$  est continue et que

$$f^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

#### Proposition 3.18

Soit  $f$  une fonction réelle, continue et injective sur un intervalle  $I$ . Alors  $f$  est strictement monotone.

## 3.4 Théorème de compacité

#### Définition 3.19

Soit  $f$  une fonction réelle définie sur un ensemble non vide  $X$ . Si  $f$  est majorée sur  $X$ ,  $\{f(x) : x \in X\}$  est une partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$ . Elle admet donc une borne supérieure notée

$$\sup_{x \in X} f(x).$$

On dit que cette borne est atteinte lorsqu'il existe  $x_0 \in X$  tel que

$$f(x_0) = \sup_{x \in X} f(x)$$

c'est-à-dire lorsque l'ensemble  $\{f(x) : x \in X\}$  admet un plus grand élément ; si tel est le cas, la borne supérieure est notée

$$\max_{x \in X} f(x).$$

### Remarques

⇒ On définit de même la notion de borne inférieure.

⇒ Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := x(1-x).$$

Alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes sur  $[0, 1]$ .

$$\sup_{x \in [0,1]} x(1-x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \inf_{x \in [0,1]} x(1-x) = f(0) = f(1) = 0.$$

⇒ Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) := \frac{1}{x}.$$

Alors  $f$  n'est pas majorée sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus, elle est minorée mais n'atteint pas sa borne inférieure sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$\inf_{x \in \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{x} = 0.$$

### Théorème 3.20: Théorème de compacité

Sur un segment, une fonction réelle continue est bornée et atteint ses bornes.

### Remarque

⇒ Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  est une fonction continue, on applique souvent ce théorème à la fonction  $|f|$ . Il existe donc  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x)| \leq M.$$

### Exercice 13

⇒ Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a, b]$  telle que  $\forall x \in [a, b], \quad 0 \leq f(x) < 1$ . Montrer que si  $(u_n)$  est une suite d'éléments de  $[a, b]$ , alors

$$f(u_n)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

### Proposition 3.21

L'image d'un segment par une fonction réelle continue est un segment.

## 3.5 Continuité uniforme

### Définition 3.22

On dit qu'une fonction  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  est *uniformément continue* lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}, \quad |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

### Exercice 14

⇒ 1. Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

2. En déduire que la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x}$ , définie sur  $\mathbb{R}_+$ , est uniformément continue.

### Proposition 3.23

Si  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  est uniformément continue, alors elle est continue.

### Remarques

⇒ Nous verrons que la réciproque est fautive, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions continues qui ne sont pas uniformément continues.

⇒ Soit  $f$  une fonction continue. Alors

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall y \in \mathcal{D}, \quad |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Les deux premiers quantificateurs étant de même nature, on peut les échanger, donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall y \in \mathcal{D}, \quad |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Une fonction est donc uniformément continue lorsqu'on peut échanger les quantificateurs portant sur  $x$  et  $\eta$ , c'est-à-dire lorsqu'il est possible de choisir  $\eta$  indépendamment de  $x$ .

⇒ Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

### Exercice 15

⇒ 1. Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction uniformément continue. Montrer que si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites d'éléments de  $\mathcal{D}$  telles que  $u_n - v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , alors

$$f(u_n) - f(v_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

2. En déduire que la fonction  $f : x \mapsto x^2$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , n'est pas uniformément continue.

### Théorème 3.24: Théorème de Heine

Sur un segment, une fonction continue est uniformément continue.