Compléments d'analyse

« Le calcul infinitésimal est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots : majorer, minorer, approcher. »

— Jean Dieudonné (1906–1992)

« Les hommes sont comme les chiffres, ils n'acquièrent de valeur que par leur position. »

— Napoléon Bonaparte (1769–1821)

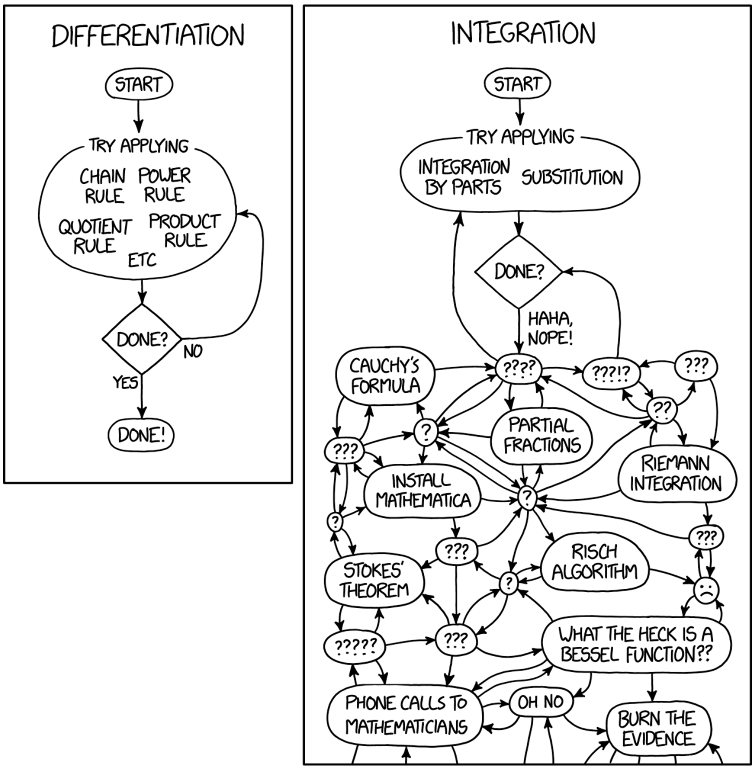


Table des matières

1 Le corps ordonné $\mathbb{R}$

1.1 La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Proposition 1.1

La relation d'ordre $\leqslant$ définie sur $\mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes.
- Elle est totale.
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant b \quad \text{ou} \quad b \leqslant a.$$
- Elle est compatible avec l'addition.
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad a + c \leqslant b + c.$$
- Elle est compatible avec la multiplication.
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad [0 \leqslant a \quad \text{et} \quad 0 \leqslant b] \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant ab.$$

Remarques
- La relation $\leqslant$ étant antisymétrique sur $\mathbb{R}$, 0 est le seul réel à la fois positif et négatif.
- Si $a, b \in \mathbb{R}$, la négation de « $a \leqslant b$ » est « $a > b$ ».
- Deux réels a et b sont de même signe si et seulement si $ab \geqslant 0$. On dit qu'ils sont de même signe au sens strict lorsque $ab > 0$.
- Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $a^2 \geqslant 0$.

Exercices 1
- Soit a, b deux réels positifs. Montrer que
$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$
- Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Montrer que $a = b = c$.

Proposition 1.2

$$\begin{aligned}
\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad & [a \leqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant d] \quad \Longrightarrow \quad a + c \leqslant b + d \\
\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad & [a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c] \quad \Longrightarrow \quad ac \leqslant bc \\
\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad & [0 \leqslant a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c \leqslant d] \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant ac \leqslant bd \\
\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad & 0 \leqslant a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant a^n \leqslant b^n.
\end{aligned}$$

Remarque
- On peut multiplier une inégalité de signe quelconque par un réel négatif. Dans ce cas, l'inégalité change de sens.

Exercice 2
- L'assertion suivante est-elle vraie ?
$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad [a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c \leqslant d] \Longrightarrow ac \leqslant bd$$

Proposition 1.3

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors
$$0 < a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}.$$

Proposition 1.4

$$\begin{array}{rl}
\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}, & [a \leqslant b \quad \text{et} \quad c < d] \implies a+c < b+d \\
\forall a,b,c \in \mathbb{R}, & [a < b \quad \text{et} \quad 0 < c] \implies ac < bc \\
\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}, & [0 \leqslant a < b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c < d] \implies 0 \leqslant ac < bd \\
\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, & 0 \leqslant a < b \implies 0 \leqslant a^n < b^n.
\end{array}$$

Définition 1.5

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$. On définit

$$\begin{array}{rr}
[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}, &]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\
]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}, & [a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}, \\
[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}, &]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\
]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}, &]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.
\end{array}$$

1.2 Valeur absolue

Définition 1.6

Pour tout réel a, on définit sa *valeur absolue*, notée $|a|$ par

$$|a| := \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Remarques

⇨ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^2 = |a|^2$.

⇨ Si a et b sont deux réels, on définit la distance de a à b, notée $\mathrm{d}(a,b)$ par

$$\mathrm{d}(a,b) := |a-b|.$$

Exercice 3

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Exprimer $\min(a,b)$ et $\max(a,b)$ à l'aide de a, b et de la valeur absolue.

Proposition 1.7

$$\begin{array}{rl}
\forall a \in \mathbb{R}, & |a| \geqslant 0 \\
\forall a \in \mathbb{R}, & |a| = 0 \iff a = 0 \\
\forall a \in \mathbb{R}, & |-a| = |a| \\
\forall a,b \in \mathbb{R}, & |ab| = |a|\,|b|.
\end{array}$$

Remarques

⇨ Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $|a^n| = |a|^n$. Si de plus $a \neq 0$, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, $|a^n| = |a|^n$.

⇨ De cette proposition, on déduit les résultats suivants sur la distance entre deux réels.

$$\begin{array}{rl}
\forall a,b \in \mathbb{R}, & \mathrm{d}(a,b) \geqslant 0 \\
\forall a,b \in \mathbb{R}, & \mathrm{d}(a,b) = 0 \iff a = b \\
\forall a,b \in \mathbb{R}, & \mathrm{d}(b,a) = \mathrm{d}(a,b).
\end{array}$$

Exercice 4

⇨ Soit $a > 0$ et $x, y \geqslant a$. Montrer que

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}\,|x-y|.$$

Proposition 1.8

Soit a un réel. Alors
$$|a| = \max\{a, -a\}.$$

Remarques

⇨ En particulier, si M est un réel positif, pour montrer que $|a| \leqslant M$ il suffit de montrer que
$$a \leqslant M \quad \text{et} \quad -a \leqslant M.$$

⇨ Soit a un réel et M un réel positif. Alors
$$|a| \leqslant M \quad \Longleftrightarrow \quad -M \leqslant a \leqslant M$$
$$|a| \geqslant M \quad \Longleftrightarrow \quad [a \leqslant -M \quad \text{ou} \quad a \geqslant M].$$

Exercice 5

⇨ Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\cos(x)\sin(y) \geqslant -1$.

Proposition 1.9

Soit a et b deux réels. Alors
$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$
De plus, l'égalité a lieu si et seulement si a et b sont de même signe.

Proposition 1.10

Soit a et b deux réels. Alors
$$||a| - |b|| \leqslant |a-b| \quad \text{et} \quad |a+b| \geqslant |a| - |b|.$$

Remarque

⇨ Soit a, b, $c \in \mathbb{R}$. Alors
$$|\mathrm{d}(a,b) - \mathrm{d}(b,c)| \leqslant \mathrm{d}(a,c) \leqslant \mathrm{d}(a,b) + \mathrm{d}(b,c).$$

Exercice 6

⇨ Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |a-b| \leqslant |a| - |b|$.
— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 \leqslant b^2 \Longleftrightarrow |a| \leqslant |b|$.
— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |a-b| \leqslant |a| + |b|$.
— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant b \Longrightarrow |a| \leqslant |b|$.
— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |a-b| \geqslant |a| - |b|$.
— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |a| \leqslant |b| + |b-a|$.

Proposition 1.11

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Alors
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Exercice 7

⇨ Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(\theta_k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

1.3 Racine

Définition 1.12

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

— Si n est pair et $a \geqslant 0$, il existe un unique réel positif x tel que $x^n = a$. On le note $\sqrt[n]{a}$.
— Si n est impair, il existe un unique réel x tel que $x^n = a$. On le note $\sqrt[n]{a}$.

Remarques

⇨ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

— Si n est pair et $a \geqslant 0$, alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = a \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{a} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt[n]{a}$$

— Si n est pair et $a < 0$, l'équation $x^n = a$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$.
— Si n est impair, alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = a \quad \iff \quad x = \sqrt[n]{a}$$

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
— Si n est pair
$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R}_+, \quad & \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \\ \forall a \in \mathbb{R}, \quad & \sqrt[n]{a^n} = |a|. \end{aligned}$$
— Si n est impair
$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R}, \quad & \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \\ & \sqrt[n]{a^n} = a. \end{aligned}$$

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
— Si n est pair
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x^n \leqslant y^n \quad \iff \quad |x| \leqslant |y|.$$
— Si n est impair
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x^n \leqslant y^n \quad \iff \quad x \leqslant y.$$

Proposition 1.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
— Si n est pair
$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$
— Si n est impair
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

1.4 Partie entière, approximation

Proposition 1.14

$\mathbb{R}$ possède la propriété
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad n\varepsilon \geqslant x.$$
On dit que $\mathbb{R}$ est *archimédien*.

Remarque

⇨ En particulier, si on note x le volume d'eau de l'océan et ε le volume que peut contenir une petite cuillère, l'archimédisme de $\mathbb{R}$ nous permet de montrer qu'une personne (patiente) arrivera à vider l'océan à l'aide de cette petite cuillère.

Définition 1.15

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que
$$n \leqslant x < n + 1.$$
Cet entier est appelé *partie entière* de x et est noté $\lfloor x \rfloor$.

Remarques

⇨ Si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor a/b \rfloor$ est le quotient de la division euclidienne de a par b.
⇨ Soit $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $na \leqslant x < (n+1)a$.
⇨ On définit de même la partie entière supérieure de $x \in \mathbb{R}$, notée $\lceil x \rceil$, comme l'unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n - 1 < x \leqslant n$. Si x est entier, alors $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$. Sinon, $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

Exercices 8

⇨ Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
⇨ Montrer que la partie entière est une fonction croissante.
⇨ Soit $\alpha \in [0, 1[$. Montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\frac{n-1}{n} \leqslant \alpha < \frac{n}{n+1}.$$

Définition 1.16

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On appelle *valeur approchée* de a à la précision ε tout réel b tel que $|a-b| \leqslant \varepsilon$. Si $b \leqslant a$ (respectivement $b \geqslant a$), on dit que b est une valeur approchée de a par *défaut* (respectivement, par *excès*).

Remarques

⇨ On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels. $\mathbb{Q}$ est stable par les opérations usuelles d'addition, de soustraction, de multiplication et de division.

Définition 1.17

On dit qu'un réel a est *décimal* lorsqu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$a = m \cdot 10^{-n}.$$

Remarques

⇨ Un nombre décimal est rationnel. Cependant $1/3$ est rationnel, mais n'est pas décimal.

⇨ L'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres décimaux est stable par les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, mais pas par division.

Proposition 1.18

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, $d = \lfloor 10^n a \rfloor \cdot 10^{-n} \in \mathcal{D}$ est une approximation par défaut de a à la précision 10^{-n}.

1.5 Intervalle

Définition 1.19

On appelle *droite numérique achevée* et on note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on adjoint deux éléments notés $-\infty$ et $+\infty$. On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'une relation d'ordre totale en prolongeant la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$ et en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Remarque

⇨ On prolonge aussi de manière naturelle l'addition et la multiplication sans toutefois définir $(+\infty) - (+\infty)$ et $0 \times (\pm\infty)$.

Définition 1.20

On dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est un *intervalle* lorsqu'elle est de la forme

$$\varnothing, \qquad \mathbb{R}, \qquad [a,b], \qquad]a,b[, \qquad [a,b[, \qquad]a,b],$$

$$[a,+\infty[, \qquad]a,+\infty[, \qquad]-\infty,b], \qquad]-\infty,b[$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

Remarques

⇨ En particulier, pour $a = b$, $[a,b] = \{a\}$ est un intervalle. On dit qu'un intervalle est *non trivial* lorsqu'il contient au moins 2 points.

⇨ Si I est un intervalle non vide, il existe un unique couple $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $I = [a,b]$, $I =]a,b]$, $I = [a,b[$ ou $I =]a,b[$. On dit que a et b sont les *extrémités* de I. L'intervalle I est dit *ouvert* lorsqu'il ne contient pas ses extrémités c'est-à-dire lorsqu'il est vide, ou qu'il est de la forme $]a,b[$ où $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

⇨ Dans ce cours, une partie de $\mathbb{R}$ notée I ou J sera implicitement un intervalle.

2 Fonction réelle d'une variable réelle

2.1 Définition

Définition 2.1

On appelle *fonction réelle* toute fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarques

⇨ Il sera essentiel de ne pas confondre une fonction avec son expression. Par exemple parler de la fonction $\sin x$ est une erreur grave. On parlera plutôt de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui au réel x associe le réel $\sin x$.

⇨ Par abus de langage, il est courant que les énoncés demandent à l'élève de donner le domaine de définition d'une fonction donnée par une expression (par exemple $\sqrt{x}$). Dans ce cas, il faut donner l'ensemble $\mathcal{D}$ des x pour lesquels cette expression à un sens (ici, $\mathbb{R}_+$). La fonction f sera alors la fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, qui à x associe cette expression en x.

Exercice 9

⇨ Déterminer le domaine de définition de la fonction d'expression

$$f(x) := \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Définition 2.2

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$.

— Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $\lambda f + \mu g$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)(x) := \lambda f(x) + \mu g(x).$$

— On définit la fonction fg par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (fg)(x) := f(x)g(x).$$

— Si f ne s'annule en aucun point de $\mathcal{D}$, on définit $1/f$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{1}{f}\right)(x) := \frac{1}{f(x)}.$$

2.2 Symétries

Définition 2.3

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ *symétrique par rapport à 0*, c'est-à-dire tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad -x \in \mathcal{D}.$$

On dit que

— f est *paire* lorsque

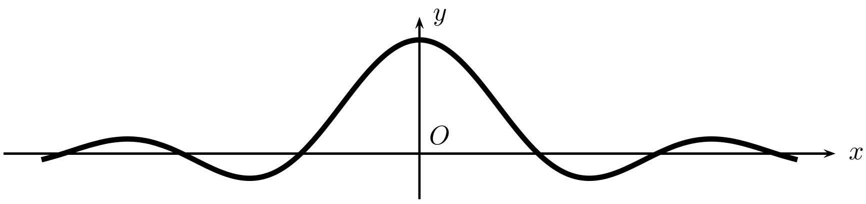
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(-x) = f(x).$$

— f est *impaire* lorsque

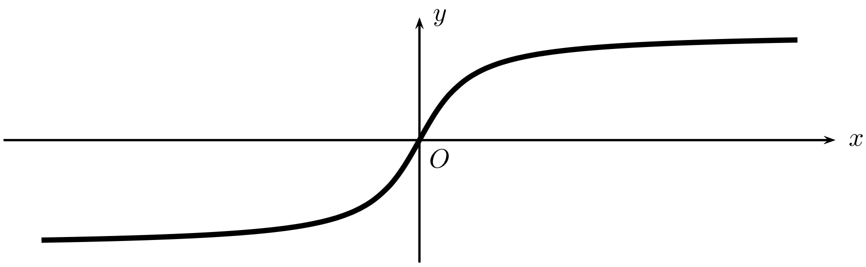
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(-x) = -f(x).$$

Remarques

⇨ Si f est paire, la droite (Oy) est un axe de symétrie du graphe de f.



⇨ Si f est impaire, O est un centre de symétrie du graphe de f.



⇨ Si f est paire ou impaire, pour étudier f, il suffit d'étudier sa restriction à $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$.

Exercice 10

➯ Montrer que la fonction d'expression

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

est impaire.

Définition 2.4

Soit $T \in \mathbb{R}$ et f une fonction dont le domaine de définition vérifie

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad x+T \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad x-T \in \mathcal{D}$$

On dit que f est T-*périodique*, ou que T est une *période* de f, lorsque

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x+T) = f(x).$$

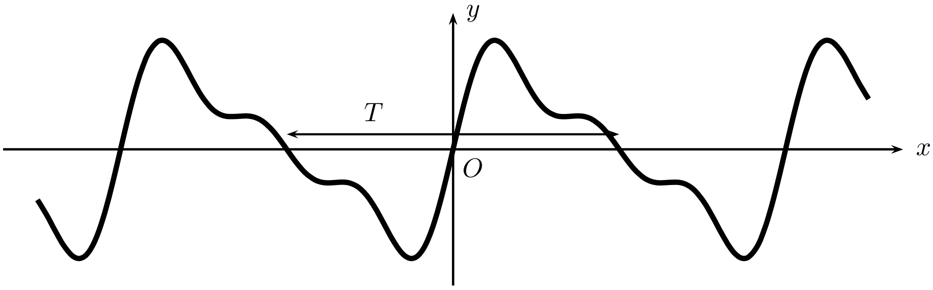
Lorsque f admet une période non nulle, on dit que f est *périodique*.

Remarques

➯ Si f est T-périodique, alors

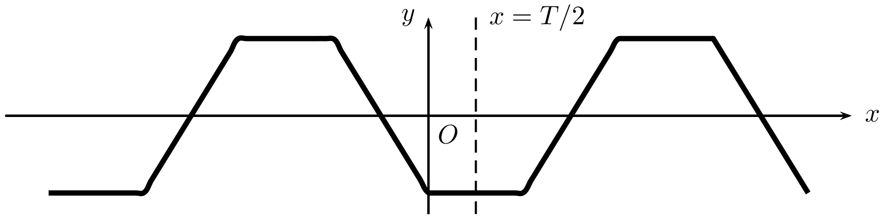
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(x+kT) = f(x).$$

➯ Si f est T-périodique, la translation de vecteur $T\,\overrightarrow{e_1}$ laisse stable le graphe de f.



Pour étudier f, il suffit d'étudier sa restriction à $\mathcal{D} \cap [a, a+T]$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$.

➯ S'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $f(T-x) = f(x)$, la droite d'équation $x = T/2$ est un axe de symétrie du graphe de f.



Exercices 11

➯ La fonction

$$f(x) := \sin(2x) + \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$

est-elle périodique ?

➯ Montrer que le graphe de la fonction

$$f(x) := \ln\left(x^2+x+1\right)$$

admet un axe de symétrie.

➯ Tracer le graphe d'une fonction quelconque f, puis celui des fonctions

$$x \mapsto f(x)+a, \qquad x \mapsto f(x+a), \qquad x \mapsto f(a-x), \qquad x \mapsto f(ax), \qquad x \mapsto af(x).$$

Proposition 2.5

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et f une bijection de A dans B. Alors le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la première bissectrice des axes $[Ox)$ et $[Oy)$.

2.3 Monotonie

Définition 2.6

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. On dit que

— f est *croissante* lorsque

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

— f est *décroissante* lorsque

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y).$$

— f est *strictement croissante* lorsque

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$

— f est *strictement décroissante* lorsque

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y).$$

Remarques

⇨ Les fonctions constantes sont les seules fonctions qui sont à la fois croissantes et décroissantes.

⇨ Une fonction peut n'être ni croissante, ni décroissante. C'est le cas de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

⇨ Si f est strictement monotone, elle est injective.

⇨ Attention, il est possible que f soit croissante sans que

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant f(y) \Longrightarrow x \leqslant y.$$

C'est notamment le cas des fonctions constantes qui sont croissantes mais pour lesquelles $f(x) \leqslant f(y)$ quelle que soit la position de x par rapport à y. Cependant, si f est strictement croissante, par contraposée, on a bien

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant f(y) \Longrightarrow x \leqslant y.$$

⇨ D'après la remarque précédente, si f est strictement croissante et $x_0 \in \mathcal{D}$ est un zéro de f, pour placer $x \in \mathcal{D}$ par rapport à x_0, il suffit de déterminer le signe de $f(x)$.

⇨ Les effets des opérations usuelles sur les propriétés de monotonie sont résumés dans les tableaux ci-dessous.

— *Combinaison linéaire positive*

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	×
décroissante	×	décroissante

— *Produit de fonctions positives*

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	×
décroissante	×	décroissante

— *Inverse d'une fonction strictement positive ou strictement négative*

f	croissante	décroissante
1/f	décroissante	croissante

— *Composition*

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	décroissante
décroissante	décroissante	croissante

Lorsque c'est possible, il est souvent bien plus judicieux de déterminer la monotonie d'une fonction à partir de ces règles plutôt qu'à partir de l'étude du signe de la dérivée. En effet, cette méthode est bien plus rapide et source de beaucoup moins d'erreurs.

Exercices 12

⇨ Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

n'est ni croissante, ni décroissante.

⇨ Déterminer la monotonie des fonctions d'expressions

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x + \sqrt{1+x}}, \qquad \sqrt{x+1} - \sqrt{x}.$$

2.4 Fonction majorée, minorée, bornée

Définition 2.7

On dit qu'une fonction réelle f est
- *majorée* lorsque
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant M.$$
- *minorée* lorsque
$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \geqslant m.$$

Exercice 13

⇨ Montrer que la fonction d'expression $x\mathrm{e}^{-x}$ est majorée sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.8

On dit qu'une fonction réelle ou complexe f est *bornée* lorsque

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Exercice 14

⇨ Montrer que la fonction d'expression $\frac{x}{1+x^2}$ est bornée par $1/2$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.9

Une fonction réelle est bornée si et seulement si elle est minorée et majorée.

Définition 2.10

Soit f et g deux fonctions de domaine $\mathcal{D}$. On dit que f est inférieure à g et on note $f \leqslant g$ lorsque

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant g(x).$$

Remarques

⇨ La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$. Elle n'est pas totale.

⇨ La négation de $f \leqslant g$ s'écrit
$$\exists x \in \mathcal{D}, \quad f(x) > g(x).$$

3 Fonction continue, fonction dérivable

3.1 Limite

Dans ce chapitre, on ne définira pas précisément la notion de limite. On se basera sur la définition intuitive suivante.

Définition 3.1

Étant donné une fonction f et $a, l \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a, lorsque, quitte à rendre x proche de a, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on souhaite de l. Dans ce cas, on note

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$

Proposition 3.2

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions telles que $f(x)$ et $g(x)$ tendent respectivement vers l_f et $l_g \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a. Alors
- Si λ et μ sont deux réels
$$\lambda f(x) + \mu g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda l_f + \mu l_g.$$

— On a

$$f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_f l_g.$$

— Si $l_f \neq 0$

$$\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{l_f}.$$

— Plus généralement, si $l_g \neq 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{l_f}{l_g}.$$

Proposition 3.3

Soit f et g deux fonctions. On suppose que $f(x)$ tend vers $l_f \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et que $g(x)$ tend vers $l_g \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers l_f. Alors $g(f(x))$ tend vers l_g lorsque x tend vers a.

Remarque

⇨ De nombreuses autres règles existent mélangeant limites finies et infinies. Elles sont résumées dans les tableaux ci-dessous où la présence d'une croix représente une forme indéterminée.

— *Somme*
Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et $l_g \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f+g$

l_f \ l_g	$-\infty$	$l_g \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\times$
$l_f \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$l_f + l_g$	$+\infty$
$+\infty$	$\times$	$+\infty$	$+\infty$

— *Opposé*
Si f est une fonction admettant pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $-f$

l	$-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$
	$+\infty$	$-l$	$-\infty$

— *Multiplication par un scalaire*
Si f est une fonction admettant pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf

λ \ l	$-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\lambda < 0$	$+\infty$	λl	$-\infty$
$\lambda > 0$	$-\infty$	λl	$+\infty$

— *Produit*
Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et $l_g \in \overline{\mathbb{R}}$, alors fg

l_f \ l_g	$-\infty$	$l_g < 0$	0	$l_g > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\times$	$-\infty$	$-\infty$
$l_f < 0$	$+\infty$	$l_f l_g$	0	$l_f l_g$	$-\infty$
$l_f = 0$	$\times$	0	0	0	$\times$
$l_f > 0$	$-\infty$	$l_f l_g$	0	$l_f l_g$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\times$	$+\infty$	$+\infty$

— *Inverse*
Si f est une fonction admettant pour limite l, alors $1/f$

l	$-\infty$	$l < 0$	0^-	0	0^+	$l > 0$	$+\infty$
	0	$1/l$	$-\infty$	$\times$	$+\infty$	$1/l$	0

— *Exponentiation*
Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et l_g, alors f^g

l_f \ l_g	$-\infty$	$l_g < 0$	0	$l_g > 0$	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	$\times$	0	0
$0 < l_f < 1$	$+\infty$	$l_f^{l_g}$	1	$l_f^{l_g}$	0
1	$\times$	1	1	1	$\times$
$1 < l_f$	0	$l_f^{l_g}$	1	$l_f^{l_g}$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	$\times$	$+\infty$	$+\infty$

Exercice 15

⇨ Déterminer les limites en 0 de x^x et $x^{\frac{1}{\ln x}}$; en déduire que « 0^0 » est une forme indéterminée. De même, déterminer la limite en $+\infty$ de $(1+1/x)^x$; en déduire que « $1^{+\infty}$ » est une forme indéterminée.

3.2 Continuité

Définition 3.4

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est *continue* en $x_0 \in \mathcal{D}$ lorsque

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0).$$

On dit que f est continue lorsque, quel que soit $x_0 \in \mathcal{D}$, f est continue en x_0.

Proposition 3.5: Théorèmes usuels

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors
- Quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue.
- La fonction fg est continue.
- Si g ne s'annule pas, f/g est continue.

Proposition 3.6: Théorèmes usuels

La composée de deux fonctions continues est continue.

Théorème 3.7: Théorème de la bijection

- Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leqslant b$) une fonction continue, strictement croissante. Alors

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)].$$

  De plus f réalise une bijection de $[a,b]$ sur $[f(a), f(b)]$. Autrement dit, pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe un unique $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$.
- Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ (où $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$) une fonction continue, strictement croissante. On pose

$$l_a := \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{et} \quad l_b := \lim_{x \to b} f(x).$$

  Alors

$$f(]a,b[) =]l_a, l_b[.$$

  De plus f réalise une bijection de $]a,b[$ sur $]l_a, l_b[$. Autrement dit, pour tout $y \in]l_a, l_b[$, il existe un unique $x \in]a,b[$ tel que $y = f(x)$.

Remarques

⇨ Ce théorème reste valide dans de nombreuses autres situations, par exemple lorsque f est strictement décroissante et que son domaine de définition est un intervalle semi-ouvert. Par exemple, si $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue, strictement décroissante, en posant

$$l := \lim_{x \to +\infty} f(x),$$

alors $f([a, +\infty[) =]l, f(a)]$ et f réalise une bijection de $[a, +\infty[$ sur $]l, f(a)]$.

⇨ Ce théorème permet de calculer $f(A)$ lorsque A est une réunion d'intervalles $A = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ sur lesquels f est continue et strictement monotone. Il suffit pour cela de remarquer que

$$f(A) = f(I_1) \cup \cdots \cup f(I_n).$$

Proposition 3.8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de I sur l'intervalle $J := f(I)$. De plus
- f^{-1} est strictement monotone, de même sens de variation que f.
- f^{-1} est continue.

3.3 Dérivabilité

Définition 3.9

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$. On dit que f est *dérivable* en x_0 lorsque

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers x_0. Dans ce cas, on note $f'(x_0)$ cette limite que l'on appelle *nombre dérivé* de f en x_0. On dit que f est dérivable lorsqu'elle est dérivable en tout point de $\mathcal{D}$.

Remarques

- Si f est dérivable en x_0, la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est tangente au graphe de f en x_0.
- Lorsque
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} \pm\infty,$$
le graphe de f admet une tangente verticale en x_0. Une telle fonction n'est pas dérivable en x_0.
- On dit qu'une fonction f est dérivable à gauche en x_0 lorsque l'expression
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 par la gauche. Si tel est le cas, cette limite est notée $f'_g(x_0)$. On définit de même la notion de dérivabilité à droite. Une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et que $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.
- Si f et g sont des fonctions telles qu'en x_0, $f(x_0) = g(x_0)$, on ne peut rien en conclure sur $f'(x_0)$ et $g'(x_0)$. En particulier, il est absurde de dire que parce que $f(x_0) = 0$, on peut en déduire que $f'(x_0) = 0$. On dira qu'on peut dériver des identités, mais pas des égalités.

Proposition 3.10

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$. Si f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.

Remarque

- La réciproque de cette proposition est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 mais qui n'est pas dérivable en 0.

Exercice 16

- Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et $b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$
soit dérivable en 0.

Définition 3.11

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction. On note $\mathcal{D}'$ l'ensemble des $x_0 \in \mathcal{D}$ en lesquels f est dérivable. On définit la *fonction dérivée* de f, notée f' par

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$$

Remarque

- Les fonctions usuelles sont dérivables en tout point de leur ensemble de définition, excepté la fonction $x \mapsto |x|$ qui n'est pas dérivable en 0 et les fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ qui ne sont pas dérivables en 0 pour $n \geqslant 2$.

$\mathcal{D}$	$f(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$
$\mathbb{R}^*$	$x^n \quad (n \in \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}_+^*$	$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}^*$	$\ln \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$	$\operatorname{cotan} x$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$	$-\left(1 + \operatorname{cotan}^2 x\right) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Proposition 3.12: Théorèmes usuels

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors

— Quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$$

— La fonction fg est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

— Si f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $1/f$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

— Plus généralement, si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, f/g est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Proposition 3.13: Théorèmes usuels

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. Si f et g sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) g'(f(x)).$$

Remarque

⇨ En particulier, si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et $n \in \mathbb{N}$, la fonction g définie sur $\mathcal{D}$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad g(x) := f(x)^n$$

est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad g'(x) = nf'(x)f(x)^{n-1}.$$

⇨ Si $f(x) := a(x)/b(x)^\alpha$, il est bon d'écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a(x)b(x)^{-\alpha}$ avant de dériver f.

⇨ Attention, ce n'est pas parce que les théorèmes usuels ne peuvent pas s'appliquer en un point qu'on peut en conclure que la fonction n'y est pas dérivable.

Exercices 17

⇨ Montrer que la dérivée d'une fonction paire (resp. impaire, T-périodique) est impaire (resp. paire, T-périodique).

⇨ Étudier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions d'expression

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \left(x^3 + 2x + 1\right) \mathrm{e}^{x^2}, \qquad \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

⇨ Étudier la dérivablité et calculer la dérivée de la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ par

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) := \sqrt{1 - \cos x}.$$

Proposition 3.14

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I, dérivable et strictement monotone. Elle réalise donc une bijection de I sur l'intervalle $J := f(I)$. On pose

$$A := \{x \in I \mid f'(x) = 0\}.$$

Alors f^{-1} est dérivable en tout point de $J \setminus f(A)$ et

$$\forall y \in J \setminus f(A), \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

3.4 Dérivées successives

Définition 3.15

Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est une fonction, on définit par récurrence la *dérivée n-ième* de f de la manière suivante

— On pose $f^{(0)} := f$.

— Si $n \in \mathbb{N}$, on définit $f^{(n+1)}$ comme étant la dérivée de $f^{(n)}$.

Si $x_0 \in \mathcal{D}$, on dit que f est dérivable n fois en x_0 lorsque $f^{(n)}$ est définie en x_0. On dit que f est dérivable n fois lorsqu'elle est dérivable n fois en tout point de son domaine de définition.

Proposition 3.16

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables n fois.

— Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable n fois et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x).$$

— fg est dérivable n fois.

— Si g ne s'annule pas, alors f/g est dérivable n fois.

Proposition 3.17

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. Si f et g sont dérivables n fois, alors $g \circ f$ est dérivable n fois.

Définition 3.18

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ lorsqu'elle est dérivable et que sa dérivée est continue.

Proposition 3.19

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

— Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

— fg est de classe $\mathcal{C}^1$.

— Si g ne s'annule pas, alors f/g est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 3.20

La composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

3.5 Dérivation et monotonie

Proposition 3.21

Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Alors

— f est croissante si et seulement si
$$\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0.$$

— f est décroissante si et seulement si
$$\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0.$$

Remarque

⇨ Cette proposition est fausse lorsque le domaine de définition de f n'est pas un intervalle. Par exemple la fonction
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1/x \end{array}$$
n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ bien qu'elle soit dérivable et que sa dérivée soit négative. Cependant ses restrictions aux intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les deux décroissantes.

Exercice 18

⇨ Montrer que
$$\forall x \in [0,1], \quad x \leqslant \left(1 + \frac{x}{2}\right) \ln(1+x).$$

Proposition 3.22

Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante si et seulement si
$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 0.$$

Remarque

⇨ Cette proposition est fausse lorsque le domaine de f n'est pas un intervalle.

Proposition 3.23

Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Si

— $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$

— Le nombre de points de I où f' s'annule est fini.

alors f est strictement croissante.

Remarques

⇨ La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ bien qu'elle soit dérivable et que sa dérivée s'annule en 0.

⇨ Une fonction croissante qui n'est pas strictement croissante est constante sur un intervalle non trivial. Ces fonctions sont donc rares. Cependant, il est toujours plus délicat de montrer qu'une fonction est strictement croissante que croissante. Lorsqu'on a besoin de la stricte monotonie, il convient donc d'être particulièrement attentif. Inversement, il est inutile de prouver la stricte monotonie si seule la monotonie nous est utile.

Exercice 19

⇨ Combien de racines réelles possède le polynôme $P(x) \coloneqq x^3 - 3x - 1$?

3.6 Dérivation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 3.24

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$. On dit que f est dérivable en x_0 lorsque $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. Si c'est le cas, on définit le nombre dérivé de f en x_0 par
$$f'(x_0) \coloneqq \mathrm{Re}(f)'(x_0) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)'(x_0).$$
On dit que f est dérivable lorsque f est dérivable en tout point de $\mathcal{D}$.

Proposition 3.25: Théorèmes usuels

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables. Alors

— Quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

— La fonction fg est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

— Si f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $1/f$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

— Plus généralement, si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, f/g est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Proposition 3.26

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Alors la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad g(x) \coloneqq \mathrm{e}^{f(x)}$$

est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}.$$

Proposition 3.27

Soit f une fonction complexe, dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 0.$$

Remarque

⇨ On dit que'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ lorsque ses parties réelles et imaginaires le sont. Comme pour les fonctions à valeurs réelles, on montre qu'une combinaison linéaire, un produit, un quotient ainsi que l'exponentielle de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

4 Intégration, primitive

Dans la suite de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Primitive

Définition 4.1

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$. On appelle *primitive* de f toute fonction dérivable $F : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad F'(x) = f(x).$$

Proposition 4.2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Alors les primitives de f sont les fonctions $F_C : I \to \mathbb{K}$ définies sur I par

$$\forall x \in I, \quad F_C(x) \coloneqq F(x) + C$$

où $C \in \mathbb{K}$.

Remarque

⇨ Si la fonction d'expression $F(x)$ est une primitive de la fonction d'expression $f(x)$, on écrira

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x).$$

Il faudra rester vigilant avec cette notation. Par exemple

$$\int 1 \, \mathrm{d}x = x \quad \text{et} \quad \int 1 \, \mathrm{d}x = x + 1$$

mais $x \neq x + 1$. On ne l'utilisera donc que pour calculer des primitives et on s'abstiendra de toute lecture autre que de la gauche vers la droite. On s'abstiendra aussi de l'utiliser avec des inégalités.

4.2 Intégration et régularité

Proposition 4.3

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On définit sur I la fonction F par

$$\forall x \in I, \quad F(x) \coloneqq \int_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

En particulier, F est une primitive de f.

Proposition 4.4

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors f admet une primitive. Plus précisément, pour tout $x_0 \in I$, il existe une unique primitive F de f s'annulant en x_0. De plus

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Théorème 4.5: Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$. Alors, si F est une primitive de f

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

4.3 Intégration et inégalité

Proposition 4.6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues et $a, b \in I$. On suppose que

$$a \leqslant b \quad \text{et} \quad \left[\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leqslant g(x)\right].$$

Alors

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x.$$

4.4 Intégration par parties, changement de variable

Proposition 4.7: Intégration par parties

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. Soit G une primitive de g. Alors, si $a, b \in I$

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{dérive}} \overbrace{g(x)}^{\text{intègre}} \, \mathrm{d}x = \left[f(x)G(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) \, \mathrm{d}x.$$

Exercice 20

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit I_n par

$$I_n \coloneqq \int_0^1 t^n \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$$

Calculer I_0 et trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

Remarque

⇨ Si f est dérivable et que G est une primitive de g, alors

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{dérive}} \overbrace{g(x)}^{\text{intègre}} \,\mathrm{d}x = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 4.8: Changement de variables

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. Soit J un intervalle, $\bar{x} : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a_x, b_x \in I$ et $a_t, b_t \in J$ tels que

$$a_x = \bar{x}\left(a_t\right) \quad \text{et} \quad b_x = \bar{x}\left(b_t\right).$$

Alors

$$\int_{a_t}^{b_t} f(\bar{x}(t)) \frac{d\bar{x}}{dt}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a_x}^{b_x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 21

⇨ Calculer

$$\int_0^{\pi} \ln\left(1+\cos^2 x\right) \sin(2x)\,\mathrm{d}x$$

4.5 Calcul de primitive

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle à partir d'une expression en les fonctions usuelles, on cherche une primitive F de f. Puisque f est une expression en les fonctions usuelles, elle est en particulier continue, donc admet une primitive. Le problème du calcul de primitive est d'expliciter une telle fonction.

Il est d'abord essentiel de connaitre par cœur les primitives des fonctions usuelles.

$\mathcal{D}$	$f(x)$	$F(x)$
$\mathbb{R}$	$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\mathbb{R}^*$	$x^n \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x$

Ensuite, il existe de nombreuses techniques à connaitre pour calculer certaines primitives.

— **Polynômes**
Le calcul d'une primitive d'une fonction polynôme se fait de manière immédiate

$$\int \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right) \mathrm{d}x = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

— **Polynômes-exponentielle**
Le calcul d'une primitive d'une fonction polynôme-exponentielle, c'est-à-dire de

$$\int \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right) \mathrm{e}^{cx}\,\mathrm{d}x$$

se fait facilement par récurrence en effectuant une intégration par parties

$$\int \underbrace{\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right)}_{\text{dérive}} \overbrace{\mathrm{e}^{cx}}^{\text{intègre}} \,\mathrm{d}x.$$

De cette manière, on abaisse le degré du polynôme. Il suffit de réitérer le procédé jusqu'à faire disparaitre le terme polynomial.

Exercice 22

⇨ Calculer

$$\int (2x+3)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$

— **Polynômes-sinus/cosinus**
On calcule de même toute primitive du produit d'une fonction polynôme et d'une fonction sinus ou cosinus.

Exercice 23

⇨ Calculer

$$\int x\cos x \,\mathrm{d}x.$$

— **Exponentielle-sinus/cosinus** Pour calculer des primitives de la forme

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x,$$

on passe par l'exponentielle complexe. On fait de même si un polynôme est en facteur d'une telle expression.

Exercice 24

⇨ Calculer

$$\int \mathrm{e}^{2x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x.$$

— **Polynôme-logarithme**
Le calcul d'une primitive d'une fonction polynôme-logarithme, c'est-à-dire de

$$\int \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right)\ln x \,\mathrm{d}x$$

se fait facilement par intégration par parties

$$\int \overbrace{\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right)}^{\text{intègre}} \underbrace{\ln x}_{\text{dérive}} \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 25

⇨ Calculer

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x$$

— **Polynômes en** $\sin$ **et** $\cos$
Pour le calcul de primitives de polynômes en sin et cos, c'est-à-dire de :

$$\int \sin^n x\cos^m x\,\mathrm{d}x \quad \text{où } n, m \in \mathbb{N}$$

on peut, lorsque n ou m est impair effectuer un changement de variable pour se ramener à un calcul de primitive de polynôme.

— Si m est impair, soit $m' \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2m'+1$. On effectue alors le changement de variable $t = \sin x$.

$$\begin{aligned}\int \sin^n x\cos^m x\,\mathrm{d}x &= \int \sin^n x\cos^{2m'+1} x\,\mathrm{d}x\\ &= \int \sin^n x\left(1-\sin^2 x\right)^{m'}\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= \int t^n\left(1-t^2\right)^{m'}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

— Si n est impair, on effectue le changement de variable $t = \cos x$.

— Si n et m sont pairs, on effectue une linéarisation de l'expression.

Exercice 26

⇨ Calculer

$$\int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x, \qquad \int \cos^2 x\sin^5 x\,\mathrm{d}x, \qquad \int \cos^2 x\sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$