Compléments d'algèbre

« The closer one looks, the more subtle and remarkable Gaussian elimination appears. »

— Nick Trefethen (1955–)

Table des matières

1 Somme et produit, fonction polynôme

1.1 Somme

Définition 1.1

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n$ et $u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{n-1}, u_n \in \mathbb{C}$. On définit

$$\sum_{k=m}^{n} u_k := u_m + u_{m+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n.$$

Remarque

- ⇨ Lorsque $n = m-1$, la convention est de poser $\sum_{k=m}^{n} u_k := 0$. Cette convention permet d'écrire

$$\forall n \geqslant m, \quad \sum_{k=m}^{n} u_k = u_n + \sum_{k=m}^{n-1} u_k.$$

- ⇨ Si $m, n \in \mathbb{Z}$ sont tels que $n \geqslant m-1$, alors $\mathrm{Card}(\llbracket m, n \rrbracket) = n - m + 1$. En particulier, quel que soit $a \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=m}^{n} a = (n-m+1)\, a.$$

Exercice 1

⇨ Écrire avec le symbole $\sum$ les sommes suivantes, sachant que chacune d'elle est composée de $n+1$ termes.

$$-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 + \cdots, \qquad a_1 + a_4 + a_7 + \cdots$$

$$a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + \cdots, \qquad a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + \cdots.$$

Proposition 1.2

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} u_k + \mu \sum_{k=m}^{n} v_k.$$

Proposition 1.3

— Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Alors
$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m-p}^{n-p} u_{k+p}.$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}.$$

Remarques

⇨ En pratique, lorsque l'on souhaite faire la première transformation, on dit qu'on effectue le changement de variable $k \to k+p$.

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = « \sum_{k=m}^{k=n} u_k = \sum_{k+p=m}^{k+p=n} u_{k+p} = \sum_{k=m-p}^{k=n-p} u_{k+p} » = \sum_{k=m-p}^{n-p} u_{k+p}.$$

Le seconde transformation se fait de manière similaire, en utilisant cette fois la convention que si les bornes ne sont pas « dans le bon sens », on les échange ; on dit dans ce cas qu'on fait le changement de variable $k \to n-k$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = « \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{n-k=0}^{n-k=n} u_{n-k} = \sum_{k=n}^{k=0} u_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} u_{n-k} » = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}.$$

⇨ Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite. Si $m, n \in \mathbb{Z}$ sont tels que $n \geqslant m-1$

$$\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m.$$

On dit qu'une telle somme est *télescopique*.

Exercices 2

⇨ 1. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire une expression simple de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en effectuant le changement de variable $k \to k+1$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} k 2^k.$$

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant les racines $(2n+1)$-ièmes de l'unité, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Définition 1.4

Soir $r \in \mathbb{C}$. Une suite (u_n) est dite *en progression arithmétique de raison* r lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

Proposition 1.5

Soit (u_n) une suite en progression arithmétique et $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $n \geqslant m - 1$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} u_k &= \frac{u_m + u_n}{2} \cdot (n - m + 1) \\ &= \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \cdot (\text{nombre de termes})\,.\end{aligned}$$

Proposition 1.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Définition 1.7

Soit $q \in \mathbb{C}$. Une suite (u_n) est dite *en progression géométrique de raison* q lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

Proposition 1.8

Soit (u_n) une suite en progression géométrique dont la raison $q \in \mathbb{C}$ est différente de 1 et $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} u_k &= \frac{u_m - u_{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{\text{premier terme} - \text{terme suivant}}{1 - q}.\end{aligned}$$

Exercices 3

⇨ Montrer que la suite de terme général

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

est convergente.

⇨ Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n} k x^k.$$

Proposition 1.9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} u_{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} u_{2k+1}$$

Exercice 4

⇨ Calculer la somme

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k.$$

1.2 Produit

Définition 1.10

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n$ et $u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{n-1}, u_n \in \mathbb{C}$. On définit

$$\prod_{k=m}^{n} u_k := u_m \cdot u_{m+1} \cdots u_{n-1} \cdot u_n.$$

Remarques

- Lorsque $n = m-1$, la convention est de poser $\prod_{k=m}^{n} u_k := 1$. Cette convention permet d'écrire

$$\forall n \geqslant m, \quad \prod_{k=m}^{n} u_k = u_n \prod_{k=m}^{n-1} u_k.$$

- Si $m, n \in \mathbb{Z}$ sont tels que $n \geqslant m-1$. Alors, quel que soit $a \in \mathbb{C}$

$$\prod_{k=m}^{n} a = a^{n-m+1}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Exercice 5

- Exprimer, à l'aide de factorielles, les produits

$$\prod_{k=1}^{n} (2k) \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n} (2k+1).$$

Proposition 1.11

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors

$$\prod_{k=m}^{n} u_k v_k = \left(\prod_{k=m}^{n} u_k\right)\left(\prod_{k=m}^{n} v_k\right).$$

1.3 Somme et produit doubles

On parle de somme double lorsqu'il y a deux indices. Pour sommer les éléments $u_{i,j}$ d'un tableau à n lignes et m colonnes, on peut procéder d'au moins deux manières : une sommation en lignes ou en colonnes. Évidemment, le résultat est le même.

Proposition 1.12

Soit $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ et $(u_{i,j})$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{i=m_1}^{n_1} \sum_{j=m_2}^{n_2} u_{i,j} = \sum_{j=m_2}^{n_2} \sum_{i=m_1}^{n_1} u_{i,j}.$$

Remarque

- Cette somme est parfois notée

$$\sum_{\substack{m_1 \leqslant i \leqslant n_1 \\ m_2 \leqslant j \leqslant n_2}} u_{i,j} \quad \text{ou} \quad \sum_{(i,j)\in[\![m_1,n_1]\!]\times[\![m_2,n_2]\!]} u_{i,j}.$$

Exercices 6

- Calculer

$$\sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} ij \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} (i+j).$$

⇨ Calculer

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} \binom{i}{j}.$$

⇨ Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k$$

en remarquant astucieusement que $k = \sum_{i=1}^{k} 1$.

Proposition 1.13

Soit $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors

$$\left(\sum_{i=m_1}^{n_1} u_i\right)\left(\sum_{j=m_2}^{n_2} v_j\right) = \sum_{i=m_1}^{n_1}\sum_{j=m_2}^{n_2} u_i v_j.$$

Exercices 7

⇨ Calculer

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |i-j|.$$

⇨ Calculer

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{n-k} \frac{k}{s+k}.$$

1.4 Fonction polynôme

Dans la suite de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.14

On appelle *fonction polynôme* à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute fonction $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad P(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n.$$

L'ensemble des fonctions polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$.

Remarque

⇨ On dit qu'une fonction polynôme $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ est de *degré* $n \in \mathbb{N}$ lorsqu'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $a_n \neq 0$ et

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad P(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n.$$

Exercice 8

⇨ 1. Montrer que pour tout $n \in [\![0, 3]\!]$, il existe une fonction polynôme P_n de degré n telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = P_n(\cos x).$$

2. Généraliser ce résultat pour $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.15

Si $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, on appelle *racine* de P tout élément $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Remarques

⇨ Le calcul des racines des fonctions polynôme de degré 2 se fait en utilisant le discriminant.

⇨ Il n'y a pas de méthode systématique pour trouver les racines des fonctions polynôme de degré supérieur. En effet, on peut montrer qu'il n'existe pas de formule générale permettant de calculer les racines des fonctions polynôme de degré 3 ou plus avec des radicaux réels. Et même si on s'autorise les racines n-ièmes de nombres complexes, il n'existe pas de formule générale permettant de déterminer les racines de fonctions polynôme de degré 5 ou plus. Cependant, il existe différentes techniques qui sont efficaces pour certaines fonctions polynôme.

Proposition 1.16

Soit $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors α est une racine de P si et seulement si il existe $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad P(z) = (z - \alpha)Q(z).$$

Remarques

⇨ La factorisation effective se fait par division euclidienne. Par exemple, si $P(z) := z^3 + 3z^2 + 3z + 2$, on remarque que $P(-2) = 0$ donc $P(z)$ se factorise par $z + 2$ et la division euclidienne s'effectue de la manière suivante.

$$\begin{array}{rrrr|l}
z^3 & +3z^2 & +3z & +2 & z+2 \\ \cline{5-5}
z^3 & +2z^2 & & & z^2+z+1 \\ \cline{1-4}
 & z^2 & +3z & +2 & \\
 & z^2 & +2z & & \\ \cline{2-4}
 & & z & +2 & \\
 & & z & +2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

donc $z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = (z + 2)(z^2 + z + 1)$. Puisque les racines de $Q(z) := z^2 + z + 1$ sont j et j^2, on en déduit que les racines de P sont $-2, \mathrm{j}$ et j^2.

⇨ Si P est une fonction polynôme à coefficients entiers, il existe une technique efficace pour déterminer rapidement ses racines rationnelles. Soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ tels que $P(z) := a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$. Si r est une racine rationnelle de P, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $r = p/q$. Puisque $P(r) = 0$, on en déduit que

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + \cdots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

En multipliant par q^n, on obtient

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

On en déduit que

$$a_n p^n = -q \left(a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right)$$

et donc que q divise $a_n p^n$. Or q et p sont premiers entre eux donc q et p^n sont premiers entre eux. D'après le lemme de Gauss, on en déduit que q divise a_n. De même, on montre que p divise a_0. Comme il existe un nombre fini de diviseurs d'un entier non nul, les racines rationnelles sont donc à chercher parmi un nombre fini d'éléments. Par exemple, si $P(z) := 3z^3 + 5z^2 + 5z + 2$, et si p/q est une racine rationnelle mise sous forme irréductible de P, alors p divise 2 et q divise 3. Donc $p \in \{-2, -1, 1, 2\}$ et $q \in \{1, 3\}$. Les racines rationnelles éventuelles de P sont donc parmi $\{-2, -1, 1, 2, -2/3, -1/3, 1/3, 2/3\}$. Si on teste tous ces rationnels, on se rend compte que $-2/3$ est une racine de P. $P(z)$ se factorise donc par $3z + 2$ et une division euclidienne nous donne $P(z) = (3z + 2)(z^2 + z + 1)$. Les racines de P sont donc $-2/3, \mathrm{j}$ et j^2.

⇨ D'autres techniques permettent de trouver les racines d'une fonction polynôme de degré $n \geqslant 3$. Par exemple, pour certaines fonctions polynôme, ramener la recherche de leurs racines à la recherche des racines n-ièmes d'un nombre complexe.

Proposition 1.17

Une fonction polynôme $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus n racines.

Remarques

⇨ Soit $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ une fonction polynôme et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n.$$

Si P admet au moins $n + 1$ racines, alors $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

⇨ Soit $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ et R une partie de $\mathbb{K}$ telle que

$$\forall z \in R, \quad a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0.$$

Si R possède au moins $n + 1$ éléments (en particulier si R est infini), alors $a_n = b_n, \ldots, a_0 = b_0$.

⇨ Si P est une fonction polynôme non nulle, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ et une unique famille $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $a_n \neq 0$ et

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n.$$

On dit que n est le *degré* de P et que $a_0, \ldots, a_n$ sont ses *coefficients*.

2 Trigonométrie

2.1 Égalité modulaire

Définition 2.1

Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que a est *congru à* b *modulo* m et on note

$$a \equiv b \ [m]$$

lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + km$.

Exercice 9

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Quel est le lien logique entre

$$« \, a \equiv b \ [2\pi] \, » \quad \text{et} \quad « \, a \equiv b \ [\pi] \, » \, ?$$

Proposition 2.2

— Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$a_1 \equiv b_1 \ [m] \quad \text{et} \quad a_2 \equiv b_2 \ [m].$$

Alors, quels que soient $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$,

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 \equiv k_1 b_1 + k_2 b_2 \ [m].$$

— Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$a \equiv b \ [m].$$

Alors, si $c \in \mathbb{R}_+^*$

$$ac \equiv bc \ [mc].$$

Remarques

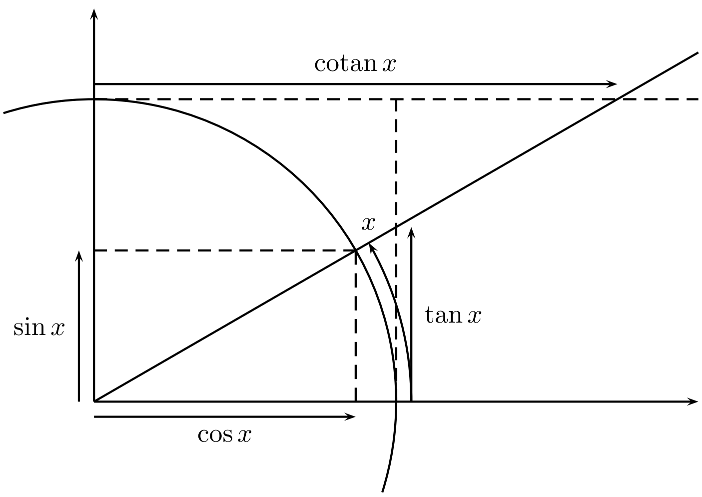
⇨ On en déduit qu'on peut raisonner avec les « $\equiv$ » de la même manière qu'avec « $=$ » pour résoudre les équations.
- — On peut passer une expression d'un côté à l'autre du « $\equiv$ » en changeant son signe.
- — On peut multiplier les deux côtés du signe « $\equiv$ » par un même coefficient $c \in \mathbb{R}_+^*$. Il suffit juste de multiplier le modulo par c.

Ces deux transformations permettent de raisonner par équivalence.

⇨ Si $a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}_+^*$, alors l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \equiv a \ [m]$ est noté

$$a + m\mathbb{Z} := \{a + km : k \in \mathbb{Z}\}.$$

2.2 Formules de trigonométrie



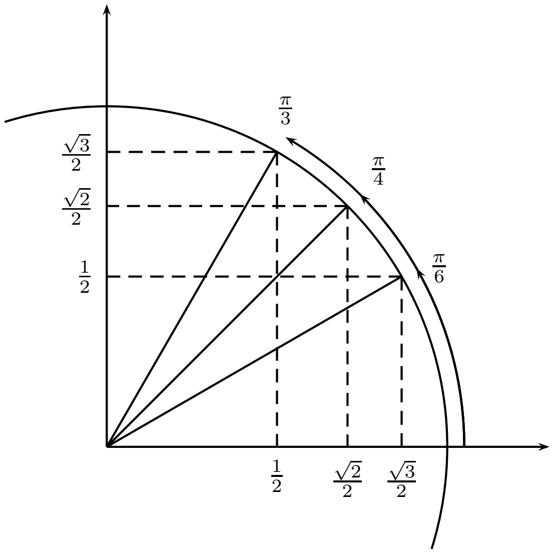
Définition 2.3

On définit le *sinus*, le *cosinus*, la *tangente* et la *cotangente* d'un angle x exprimé en radians sur le cercle trigonométrique de rayon 1 comme ci-dessus. En particulier $\tan x$ n'est défini que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, cotan x n'est défini que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Remarque

⇨ On rappelle les principales valeurs remarquables.



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	indéfini
$\operatorname{cotan} x$	indéfini	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

⇨ Si $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, alors

$$\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x}.$$

Proposition 2.4

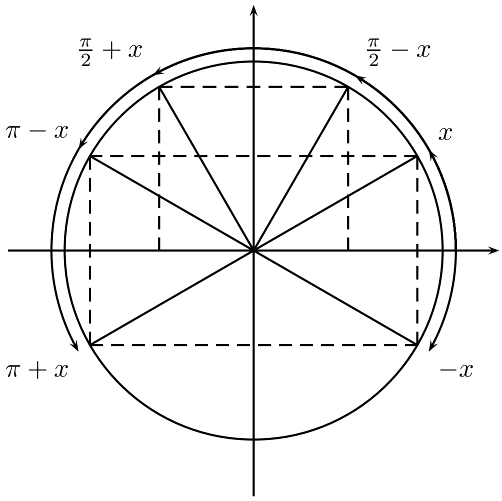
D'après Pythagore, on a

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$
$$1 + \operatorname{cotan}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Proposition 2.5: Symétries

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x \\ \tan(-x) &= -\tan x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos(\pi + x) &= -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x \\ \tan(\pi + x) &= \tan x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(\pi - x) &= \sin x \\ \tan(\pi - x) &= -\tan x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\operatorname{cotan} x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \operatorname{cotan} x \end{aligned}$$



Remarques

➯ Il est important de retrouver rapidement ces formules en dessinant le cercle trigonométrique et un « petit » angle x vérifiant $0 < x < \pi/4$.

➯ Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x \qquad \text{et} \qquad \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin x.$$

En particulier $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = 0$.

➯ Quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcccc} \cos x = \cos y & \iff & [x \equiv y\ [2\pi] & \text{ou} & x \equiv -y\ [2\pi]] \\ \sin x = \sin y & \iff & [x \equiv y\ [2\pi] & \text{ou} & x \equiv \pi - y\ [2\pi]] \end{array}$$

➯ Quels que soient $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$

$$\tan x = \tan y \quad \iff \quad x \equiv y\ [\pi].$$

Exercices 10

➯ Calculer

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right), \qquad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right), \qquad \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right).$$

➯ Résoudre l'équation $\sin x = \cos x$.

Proposition 2.6: Addition des arcs

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{aligned}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Remarque

➯ Si $a, b \in \mathbb{R}$ ne sont pas tous les deux nuls, on pourra factoriser $a \cos x + b \sin x$ de la manière suivante.

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x\right)$$

Puisque

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\theta_0 = a/\sqrt{a^2+b^2}$ et $\sin\theta_0 = b/\sqrt{a^2+b^2}$. On a alors

$$\begin{aligned} a \cos x + b \sin x &= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta_0 \cos x + \sin\theta_0 \sin x) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x - \theta_0). \end{aligned}$$

Exercice 11

⇨ Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$.

Proposition 2.7: Angle double

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x\\ &= 2\cos^2 x - 1\\ &= 1 - 2\sin^2 x\\ \sin(2x) &= 2\cos x \sin x\\ \tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1+\cos(2x)}{2}\\ \sin^2 x &= \frac{1-\cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

Exercices 12

⇨ Exprimer $\cos(\pi/8)$ à l'aide de radicaux.

⇨ Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_n \coloneqq \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right).$$

Simplifier $p_n \sin(a/2^n)$ puis en déduire la limite de la suite (p_n).

Proposition 2.8: Linéarisation

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]\\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]\\ \cos a \sin b &= \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]\end{aligned}$$

Exercice 13

⇨ Linéariser $\cos^3 x$, $\cos x \sin^2 x$, puis $\sin^4 x$.

Proposition 2.9: Factorisation

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \qquad \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\begin{aligned}\tan p + \tan q &= \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}\\ \tan p - \tan q &= \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}\end{aligned}$$

Exercice 14

⇨ En multipliant par $\sin(x/2)$, calculer

$$A \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad B \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx).$$

Proposition 2.10

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \pi\ [2\pi]$. Alors, en posant $t := \tan(x/2)$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Si de plus, $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

3 Récurrence linéaire

3.1 Récurrence linéaire d'ordre 1

Définition 3.1

Si (a_n) et (b_n) sont deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, l'équation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + a_n u_n = b_n$$

dont l'inconnue est la suite (u_n) est appelée *récurrence linéaire d'ordre 1*.

Proposition 3.2

Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors, les solutions de la récurrence linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a u_n$$

sont les suites (u_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \lambda a^n$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 3.3

Soit (a_n) et (b_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si (v_n) est une solution « particulière » de la récurrence linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + a_n u_n = b_n$$

alors, les solutions de cette récurrence linéaire sont les suites $(v_n + u_n)$ où (u_n) parcourt l'ensemble des solutions de la récurrence linéaire homogène associée

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + a_n u_n = 0.$$

Exercices 15

⇨ Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer le n-ième terme de la suite (u_n) définie par

$$u_0 := a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} := \frac{3}{2} u_n + 5.$$

⇨ On considère la récurrence linéaire

$$(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - 2u_n = n^2.$$

1. Déterminer une solution polynomiale de (E).
2. En déduire toutes les solutions.

Remarques

⇨ *Méthode de la similitude* : Si l'on cherche les suites vérifiant la récurrence linéaire $u_{n+1} = a u_n + b$, on introduit la fonction $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par $f(z) := az + b$.

— Si $a = 1$, une récurrence immédiate nous montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nb.$$

— Sinon, f admet un unique point fixe $\omega \in \mathbb{K}$ et, pour tout $z \in \mathbb{K}$, $f(z) = a(z-\omega)+\omega$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \omega = a(u_n - \omega)$$

et une récurrence immédiate donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(u_0 - \omega) + \omega.$$

⇨ *Méthode de la sommation télescopique* : Si l'on cherche les suites vérifiant la récurrence linéaire $u_{n+1} = au_n + b_n$ où $a \in \mathbb{K}^*$, on commence par remarquer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{k+1}}{a^{k+1}} - \frac{u_k}{a^k} = \frac{b_k}{a^{k+1}},$$

puis on somme cette relation pour k allant de 0 à $n-1$. On obtient une somme télescopique, puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n}{a^n} - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{a^{k+1}}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 a^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k a^{n-(k+1)}.$$

3.2 Récurrence linéaire d'ordre 2

Proposition 3.4

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On souhaite trouver les suites (u_n) vérifiant

$$(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $z^2 = az + b$.
- Si cette équation admet deux racines distinctes r_1 et $r_2 \in \mathbb{C}$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
- Si cette équation admet une racine double $r \in \mathbb{C}^*$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := (\lambda + \mu n)\, r^n$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Exercices 16

⇨ Calculer le n-ième terme de la suite de Fibonacci définie par

$$F_0 := 1, \qquad F_1 := 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} := F_{n+1} + F_n.$$

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer le n-ième terme de la suite (u_n) définie par

$$u_0 := a, \quad u_1 := b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} := \frac{1}{u_{n+1}^2 u_n}.$$

Remarques

⇨ La suite de Fibonacci est ainsi nommée en hommage à Leonardo Pisano (Leonard de Pise, 1170–1240) appelé aussi Leonardo Fibonacci, qui avait publié cette suite en 1202. Il avait lu le travail de Al-Khwarizmi (780–850), un mathématicien Persan. Le livre de Fibonacci contient le problème suivant. Combien de couples de lapins peuvent naître d'un couple de lapin en un an ? Pour résoudre ce problème, on sait que :
- Jusqu'au premier mois inclus, il n'y a qu'un couple de lapins.
- Chaque couple de lapin donne naissance à un couple tous les mois.
- Chaque jeune couple devient fertile à l'âge d'un mois.

Avant le travail de Fibonacci, la suite (F_n) a déjà été étudiée par les Indiens qui se demandaient combien de rythmes de n temps il était possible de faire avec des noires et des blanches.

⇨ Tout comme pour les récurrences linéaires d'ordre 1, afin de résoudre une récurrence linéaire de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c_n,$$

il suffit d'en trouver une solution particulière (v_n) et d'y ajouter les solutions de la récurrence linéaire homogène associée $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Proposition 3.5

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On souhaite trouver les suites (u_n) vérifiant

$$(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $z^2 = az + b$.

— Si cette équation admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

— Si cette équation admet une racine double $r \in \mathbb{R}^*$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := (\lambda + \mu n)\, r^n$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

— Si cette équation admet deux racines complexes conjuguées $re^{\mathrm{i}\omega}$ et $re^{-\mathrm{i}\omega}$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := [\lambda \cos(\omega n) + \mu \sin(\omega n)]\, r^n$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Remarque

⇨ Dans le cas où l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées, les solutions de (E) peuvent s'écrire sous la forme
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \lambda \sin(\omega n - \varphi) r^n$$
où $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$. Lors de la recherche effective de tels coefficients, quitte à changer φ en $\varphi + \pi$, on impose souvent $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Exercices 17

⇨ Soit (u_n) la suite définie par
$$u_0 := 1, \quad u_1 := 0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} := 2u_{n+1} - 4u_n.$$
Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $u_n = 0$.

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer le n-ième terme de la suite (u_n) définie par
$$u_0, u_1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} := 2\cos(\alpha)\, u_{n+1} - u_n.$$

4 Système linéaire

4.1 Système linéaire à q équations et p inconnues

Définition 4.1

On appelle *système linéaire* à q équations et p inconnues tout système d'équations du type
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q \end{cases}$$
où $a_{1,1}, \ldots, a_{q,p}, y_1, \ldots, y_q \in \mathbb{K}$ et $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$ sont les inconnues. On dit que le système est *compatible* lorsqu'il admet au moins une solution. On dit qu'il est *incompatible* sinon.

Remarques

⇨ Pour des raisons de lisibilité, on veillera à toujours placer les inconnues les unes en dessous des autres.

⇨ L'ensemble des solutions est l'ensemble $\mathcal{S}$ des $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ solution du système.

Exercice 18

⇨ Résoudre le système suivant par substitution, puis en utilisant la méthode du pivot de Gauss.
$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x + y = 9. \end{cases}$$

Proposition 4.2

Les opérations suivantes, appelées opérations élémentaires, transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent.

— Changer l'ordre des équations.
— Changer l'ordre des inconnues.
— Multiplier une équation par $\mu \in \mathbb{K}^*$.
— Ajouter λ fois (avec $\lambda \in \mathbb{K}$) une équation à l'une des équations suivantes.

Remarque

⇨ En pratique, afin d'expliciter les opérations que l'on vient d'effectuer, on utilisera les notations suivantes.

— $L_i \leftrightarrow L_j$ signifie qu'on a échangé les lignes i et j.
— $L_i \leftarrow \mu L_i$ signifie qu'on a multiplié la ligne L_i par le coefficient μ non nul.
— $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ signifie qu'on a ajouté λ fois la ligne L_j à la ligne L_i.

Exercice 19

⇨ Les opérations élémentaires suivantes conservent-elles l'équivalence ?

— $L_1 \leftarrow L_2$.
— $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$.
— $L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$.
— $L_1 \leftarrow \alpha L_1 + \beta L_2$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
— $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_2 \leftarrow L_1 - L_2$.

Proposition 4.3

L'algorithme du pivot de Gauss permet de transformer, quitte à échanger les variables, un système linéaire à q équations et p inconnues en un système linéaire équivalent de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &=& y_1 \\ a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p &=& y_2 \\ \ddots \quad &=& \vdots \\ a_{r,r}x_r + \cdots + a_{r,p}x_p &=& y_r \\ 0 &=& y_{r+1} \\ \vdots &=& \vdots \\ 0 &=& y_q \end{array}\right.$$

où $a_{1,1}, \dots, a_{r,r}$ sont tous non nuls. On dit d'un tel système qu'il est *échelonné à pivots diagonaux.*

— Le système est compatible si et seulement si $(y_{r+1}, \dots, y_q) = (0, \dots, 0)$.
— Le système admet une unique solution si et seulement si il est compatible et $r = p$.

Exercices 20

⇨ Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 11x + 2y = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 2y = 1. \end{cases}$$

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 2y + z = \alpha. \end{cases}$$

Remarques

⇨ Voici une présentation détaillée de l'algorithme du Pivot de Gauss.

— *On transforme le système en un système échelonné.*
On commence par déterminer un coefficient $a_{i,j}$ non nul que l'on appelle *pivot*. Très souvent $a_{1,1}$ conviendra, mais il est encore plus pratique pour la suite des calculs si ce coefficient est ± 1. En effectuant un échange de lignes et d'inconnues, on « remonte » ensuite ce coefficient en haut à gauche du système. On se retrouve donc dans le cas où $a_{1,1} \neq 0$. On utilise alors $a_{1,1}$ comme pivot pour éliminer l'inconnue x_1 des $q-1$ dernières lignes du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &=& y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p &=& y_2 \\ &\vdots& \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p &=& y_q \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + \cdots + a'_{1,p}x_p &=& y'_1 \\ a'_{2,2}x_2 + \cdots + a'_{1,p}x_p &=& y'_2 \\ &\vdots& \\ a'_{q,2}x_2 + \cdots + a'_{q,p}x_p &=& y'_q. \end{array}\right.$$

Pour cela, il suffit d'effectuer les opérations suivantes :

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot L_1, \qquad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \cdot L_1, \qquad \dots \qquad L_q \leftarrow L_q - \frac{a_{q,1}}{a_{1,1}} \cdot L_1.$$

On recommence ensuite le même procédé sur les $q-1$ dernières équations du système, en ne touchant plus à la première ligne. On cherche d'abord un coefficient $a'_{i,j}$ non nul pour lequel $i \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$. Si un tel coefficient existe, un échange de lignes et d'inconnues permet de se ramener au cas où $a'_{2,2} \neq 0$ et de continuer l'algorithme. On réitère le procédé jusqu'à ce qu'on ne soit plus capable de trouver de pivot. Le système est alors échelonné. Au cours du calcul, s'il apparaît l'équation $0 = 0$, on l'élimine du système. Si au contraire il apparaît l'équation $0 = b$ avec $b \neq 0$, le système n'admet aucune solution et la résolution est terminée.

— *On introduit les paramètres t_k.*
Dans le cas où le système admet au moins une solution, on aboutit à un système de la forme

$$\begin{cases} a''_{1,1}x_1 + a''_{1,2}x_2 + \cdots + a''_{1,p}x_p = y''_1 \\ \qquad\qquad a''_{2,2}x_2 + \cdots + a''_{2,p}x_p = y''_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\quad = \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a''_{r,r}x_r + \cdots + a''_{r,p}x_p = y''_r \end{cases}$$

où les $a''_{1,1}, a''_{2,2}, \dots, a''_{r,r}$ sont tous non nuls. Afin de paramétrer l'ensemble des solutions, on remarque que ce dernier système est équivalent au système triangulaire

$$\exists t_{r+1}, \dots, t_p \in \mathbb{K}, \quad \begin{cases} a''_{1,1}x_1 + a''_{1,2}x_2 + \cdots + a''_{1,p}x_p = y''_1 \\ \qquad a''_{2,2}x_2 + \cdots + a''_{2,p}x_p = y''_2 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad = \vdots \\ \qquad a''_{r,r}x_r + \cdots + a''_{r,p}x_p = y''_r \\ \qquad\qquad x_{r+1} = t_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \quad = \vdots \\ \qquad\qquad\qquad x_p = t_p. \end{cases}$$

En effet, si $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de ce dernier système, on obtient le système précédent en ne gardant que les r premières lignes. Réciproquement, si $(x_1, \dots, x_p)$ est solution du système échelonné, on obtient ce dernier système en posant $t_{r+1} \coloneqq x_{r+1}, \dots, t_p \coloneqq x_p$.

— *On résout le système triangulaire.*
Ce dernier système se résout simplement en remontant les calculs de la dernière ligne à la première, par substitution. On obtient ainsi le système équivalent

$$\exists t_{r+1}, \dots, t_p \in \mathbb{K}, \quad \begin{cases} x_1 = c_1 + d_{1,r+1}t_{r+1} + \cdots + d_{1,p}t_p \\ \vdots = \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_r = c_r + d_{r,r+1}t_{r+1} + \cdots + d_{r,p}t_p \\ x_{r+1} = \qquad t_{r+1} \\ \vdots = \qquad\qquad \ddots \\ x_p = \qquad\qquad\qquad t_p \end{cases}$$

qui est un *paramétrage* de l'ensemble des solutions.
Remarquons que lorsque les calculs sont complexes, au lieu de résoudre directement le système triangulaire par substitution, on peut aussi effectuer un pivot de Gauss « à l'envers » en commençant par éliminer les x_p des $p-1$ premières équations avec la dernière ligne, puis en éliminant les x_{p-1} des $p-2$ premières équations avec l'avant-dernière ligne, etc.

⇨ Lorsqu'on applique l'algorithme du pivot de Gauss, on est libre de choisir le pivot que l'on souhaite. La seule contrainte est qu'il soit non nul. L'expérience montre cependant que certains choix sont plus judicieux que d'autres, car ils conduisent à des calculs plus simples.
Par exemple, un pivot égal à 1 est idéal car les opérations sur les lignes sont réduites à $L_i \leftarrow L_i - a_{i,1}L_1$. On évite ainsi les divisions, ce qui offre de nombreux avantages. Par exemple, lorsque les coefficients du système sont entiers, ils le restent après réduction du système. Dans le même ordre d'idées, avant de choisir le pivot, lorsque les coefficients d'une même ligne sont des multiples d'un entier $a \in \mathbb{Z}^*$, il est bon de simplifier cette ligne par a.
Enfin, lorsque les coefficients du système dépendent d'un paramètre α, il est toujours préférable d'utiliser un pivot ne dépendant pas de α. Cette stratégie permet d'éviter de discuter les cas où ce terme peut s'annuler, et limite la propagation de ce paramètre à tous les autres coefficients du système.

Exercice 21

⇨ Discuter et résoudre les systèmes suivants, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -3a + \alpha b & = 0 \\ -3a \quad -b + 2\alpha c & = 0 \\ \qquad -2b \quad + c + 3\alpha d & = 0 \\ \qquad\qquad -c \quad + 3d & = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a \quad + b \quad + c \quad + d = 3 \\ a + \alpha b \quad + c - \alpha d = \alpha + 2 \\ \alpha a \quad - b - \alpha c - \alpha d = -1. \end{cases}$$

Remarques

⇨ Il est parfois pratique dans les calculs d'omettre le nom des variables. On utilise alors ce qu'on appelle une *matrice augmentée*.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \quad &\iff \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \\ &\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \\ &\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\iff} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \\ &\iff \quad \begin{cases} x = -5 \\ y = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Cette technique a l'avantage d'écrire le minimum nécessaire et de vous obliger à aligner les coefficients les uns au-dessus des autres. Son seul inconvénient est de rendre impossible le changement d'ordre des inconnues.

⇨ L'échange des inconnues étant impossible avec la méthode de la matrice augmentée, il arrive que cette méthode nous empêche de réduire le système à un système échelonné à pivots diagonaux. On se contente donc d'un *système échelonné*, c'est-à-dire un système où chaque ligne commence par un nombre de zéros strictement supérieur à celui de la ligne précédente, comme dans l'exemple suivant

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & a_{2,3} & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & a_{3,4} & \star \end{array}\right)$$

où $a_{1,1}, a_{2,3}$ et $a_{3,4}$ sont des coefficients non nuls qu'on appelle encore *pivots*. On réintroduit ensuite les inconnues, avant de les réordonner pour obtenir un système échelonné à pivots diagonaux et finir la résolution du système.

Définition 4.4

On considère un système linéaire à q équations et p inconnues.

$$(E) \qquad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q \end{cases}$$

— On dit qu'il est *homogène* lorsque $(y_1, \dots, y_q) = (0, \dots, 0)$.
— On appelle *système linéaire homogène* associé à (E), le système obtenu en remplaçant les y_i par 0.

Remarque

⇨ Le p-uplet $(x_1, \dots, x_p) = (0, \dots, 0)$ est toujours solution d'un système homogène. On dit que c'est la *solution triviale*. Il est possible que ce soit la seule solution ou qu'il y en ait d'autres.

4.2 Interprétation géométrique lorsque $p = 2$ ou $p = 3$

Dans cette partie, nous allons donner une interprétation géométrique des résultats précédents aux cas $p = 2$ et $p = 3$. Commençons par le cas $p = 2$. On munit le plan d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On rappelle qu'un point M du plan est déterminé de manière unique par ses coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ définies par

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}.$$

Proposition 4.5

— Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors l'ensemble d'équation $ax + by = c$ est une droite $\mathcal{D}$ de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b).
— Réciproquement, soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b). Alors, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $ax + by = c$ est une équation de $\mathcal{D}$.

Résoudre un système linéaire à q équations et 2 inconnues x et y dont chaque ligne contient un coefficient non nul revient donc à déterminer l'intersection de q droites du plan. Le cas où $q = 2$ est important.

— Si les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles, alors elles se coupent en un unique point. Le système admet donc une unique solution.
— Si les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles, deux cas se présentent.
  — Si elles ne sont pas confondues, elles ne se coupent pas. Le système n'admet donc aucune solution.
  — Si elles sont confondues, le système admet une infinité de solutions. Ce sont les coordonnées des points de cette droite.

Pour obtenir une interprétation géométrique du cas $p = 3$, on munit l'espace d'un repère orthonormé

$$\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}).$$

On rappelle qu'on point M de l'espace est déterminé de manière unique par ses coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ définies par

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2} + z\,\overrightarrow{e_3}.$$

Proposition 4.6

— Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Alors l'ensemble d'équation $ax + by + cz = d$ est un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b, c).
— Réciproquement, soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b, c). Alors, il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $ax + by + cz = d$ est une équation de $\mathcal{P}$.

Résoudre un système linéaire à q équations et 3 inconnues x, y et z dont chaque ligne contient un coefficient non nul revient donc à déterminer l'intersection de q plans dans l'espace. Le cas où $q = 3$ est important.

— Le plus souvent, les 3 plans s'intersectent en un unique point.
— Sinon, l'intersection des 3 plans est soit un plan, soit une droite, soit vide.