Analyse asymptotique

« Sans technique, un don n'est rien qu'une sale manie. »

— Georges Brassens (1921–1981)

« Deux intellectuels assis vont moins loin qu'une brute qui marche. »

— Michel Audiard (1920–1985)

Table des matières

1 Comparaison de suites

Dans ce chapitre, les suites sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Suites équivalentes

Définition 1.1

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est *équivalente* à (v_n) lorsqu'il existe une suite (α_n) convergeant vers 1 et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n = \alpha_n v_n.$$

Si tel est le cas, on note

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

La propriété « est équivalente à » est asymptotique.

Remarques

⇨ Si (u_n) est équivalente à (v_n) et que cette dernière admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors (u_n) admet la même limite. Cependant il est possible que deux suites admettent la même limite sans être équivalentes.

- Il est possible qu'une suite (u_n) soit équivalente à une suite (v_n) sans qu'il n'existe de suite (α_n) convergeant vers 1 telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha_n v_n$.

Proposition 1.2

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) des suites.

— La relation d'équivalence est réflexive.

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n.$$

— La relation d'équivalence est transitive.

$$\left[u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \text{et} \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n\right] \quad \Longrightarrow \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n.$$

— La relation d'équivalence est symétrique.

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Longrightarrow \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n.$$

Autrement dit, la relation « est équivalente à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites.

Remarque

- La relation étant symétrique, on dira désormais « les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes » plutôt que « la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) ».

Proposition 1.3

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Remarques

- Si $a_0, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{C}$ avec $a_p \neq 0$, alors $a_p n^p + \cdots + a_1 n + a_0 \underset{n\to+\infty}{\sim} a_p n^p$. Si de plus $b_0, b_1, \ldots, b_q \in \mathbb{C}$ sont tels que $b_q \neq 0$, alors
$$\frac{a_p n^p + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \cdots + b_1 n + b_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_p}{b_q} \cdot n^{p-q}$$
- Contrairement à ce qu'on pourrait être tenté de dire, on n'a pas toujours $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Exercices 1

- Donner des équivalents simples des suites de terme général
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \qquad \sum_{k=0}^{n} a^k \quad \text{où } a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k!.$$
- On rappelle que la suite (H_n) définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
diverge vers $+\infty$. Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Proposition 1.4

Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l \quad \Longleftrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

De plus, u_n est équivalent à 0 lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.

Remarque

- Si $l = 0$, dire que u_n est équivalent à 0 signifie que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang. Si vous obtenez un tel résultat, c'est sûrement que vous avez fait une erreur.

Proposition 1.5

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

— Alors, il existe un rang à partir duquel (u_n) et (v_n) s'annulent simultanément.
— Si de plus elles sont réelles, il existe un rang à partir duquel elles sont de même signe.

Proposition 1.6

— Soit (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) des suites telles que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \quad \text{et} \quad c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n.$$

Alors

$$a_n c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n d_n.$$

Si de plus (c_n) et (d_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang

$$\frac{a_n}{c_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b_n}{d_n}.$$

— Soit (u_n) et (v_n) deux suites et $\alpha \in \mathbb{R}$. Si u_n^α et v_n^α ont un sens à partir d'un certain rang, alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Longrightarrow \quad u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha.$$

Remarques

⇨ Les autres opérations usuelles sur les équivalents conduisent le plus souvent à des résultats faux. En particulier, il est interdit de sommer, d'élever à une puissance dépendant de n ou de composer des équivalents.

Exercice 2

⇨ Donner des équivalents simples de

$$\sqrt{n^4 + 2n^2 - 1} \quad \text{et} \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

Proposition 1.7

Soit (a_n), (b_n), (u_n) et (v_n) des suites réelles telles que

$$\left[\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant u_n \leqslant b_n\right], \qquad a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \qquad \text{et} \qquad b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

Alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

Remarque

⇨ *Comparaison série-intégrale.* Soit f une fonction monotone de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

On considère la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Alors, un encadrement de $f(k)$ par

$$\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

permet de trouver simplement un équivalent de u_n. Cette technique essentielle est appelée technique de *comparaison série-intégrale.*

Exercice 3

⇨ Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n.$$

Proposition 1.8: Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

1.2 Suite négligeable devant une autre

Définition 1.9

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) lorsqu'il existe une suite (ε_n) convergeant vers 0 et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n = \varepsilon_n v_n.$$

Si tel est le cas, on note

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n).$$

La propriété « est négligeable devant » est asymptotique.

Remarque

⇨ Si (u_n) est négligeable devant (v_n), il existe un rang à partir duquel u_n est nul dès que v_n est nul.

Proposition 1.10

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. Alors

$$\left[u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \quad \text{et} \quad v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n)\right] \implies u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n).$$

Proposition 1.11

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 4

⇨ Soit (u_n) une suite réelle divergeant vers $+\infty$. Démontrer qu'il existe une suite (v_n), négligeable devant (u_n) qui diverge aussi vers $+\infty$.

Proposition 1.12

— Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$n^a = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(n^b\right) \iff a < b.$$

Autrement dit

$$\frac{1}{n^a} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^b}\right) \iff a > b.$$

— Soit $(\omega_a, \omega_b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Alors

$$\omega_a^n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\omega_b^n) \iff |\omega_a| < |\omega_b|.$$

— Soit $\alpha, \beta > 0$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $|\omega| > 1$. Alors

$$(\ln n)^\alpha = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(n^\beta\right), \qquad n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\omega^n), \qquad n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\mathrm{e}^{\beta n}\right),$$

$$\omega^n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(n!), \qquad \mathrm{e}^{\beta n} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(n!).$$

Exercice 5

⇨ Comparer les suites suivantes, données par leur terme général.

$$\frac{n^2}{\ln n}, \qquad \mathrm{e}^n, \qquad n\sqrt{n}, \qquad n\ln^2 n, \qquad n^n.$$

Proposition 1.13

Soit (u_n) une suite. Alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1) \quad \Longleftrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Proposition 1.14

— Soit (u_n) une suite. Alors

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad \lambda \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(u_n) + \mu \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(u_n) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(u_n).$$

— Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(u_n v_n).$$

— Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Alors

$$\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(u_n v_n).$$

Remarque

⇨ La proposition précédente met en valeur le fait que la notation $\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(u_n)$ doit être manipulée avec précaution. En effet

$$\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(u_n) + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(u_n) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(u_n).$$

Cependant, on ne peut pas en déduire que

$$\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(u_n) = 0.$$

Proposition 1.15

— Soit (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. Alors, une suite est négligeable devant (u_n) si et seulement si elle est négligeable devant (v_n).

— Soit (u_n) une suite et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Alors, une suite est négligeable devant (u_n) si et seulement si elle est négligeable devant (λu_n).

Proposition 1.16

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Longleftrightarrow \quad u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n).$$

1.3 Suite dominée par une autre

Définition 1.17

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est *dominée* par (v_n) lorsqu'il existe une suite bornée (B_n) et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n = B_n v_n.$$

Si tel est le cas, on note

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n).$$

La propriété « est dominée par » est asymptotique.

Proposition 1.18

— Soit (u_n) une suite. Alors
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(u_n).$$
— Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. Alors
$$\left[u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n) \quad \text{et} \quad v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(w_n)\right] \quad \Longrightarrow \quad u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(w_n).$$
De plus si dans l'hypothèse, l'un des O est un o, alors (u_n) est négligeable devant (w_n).

Proposition 1.19

Soit deux suites (u_n) et (v_n). Alors
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \quad \Longrightarrow \quad u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n).$$

Remarque

⇨ De même, s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda v_n$, alors
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n).$$
En particulier
$$\sqrt{n} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(n) \quad \text{et} \quad 2n^2 + 3n - 1 = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(n^2\right).$$

Proposition 1.20

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est bornée.}$$

Remarque

⇨ En particulier, si (u_n) est une suite, alors
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(1) \quad \Longleftrightarrow \quad (u_n) \text{ est bornée.}$$

Exercice 6

⇨ Parmi les suites de terme général suivantes, lesquelles sont des $\underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(n)$?
$$n \sin n, \qquad n \ln n, \qquad 10^9 n.$$

2 Comparaison de fonctions

2.1 Fonctions équivalentes

Définition 2.1

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ est *équivalent* à $g(x)$ en a lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a et une fonction α définie sur $\mathcal{D} \cap \mathcal{V}$ telle que
— $\forall x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{V}, \quad f(x) = \alpha(x) g(x)$.
— $\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$.
On note alors
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$
La propriété « est équivalent à » est locale en a.

Remarque

⇨ Si $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et que $g(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers a, alors $f(x)$ admet la même limite. Cependant il est possible que deux fonctions admettent la même limite sans être équivalentes.

Proposition 2.2

Soit $f, g, h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
- La relation d'équivalence est réflexive.
$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} f(x).$$
- La relation d'équivalence est transitive.
$$\left[f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x)\right] \quad \Longrightarrow \quad f(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x).$$
- La relation d'équivalence est symétrique.
$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \quad \Longrightarrow \quad g(x) \underset{x \to a}{\sim} f(x).$$

Autrement dit, la relation « est équivalente à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies au voisinage de a.

Proposition 2.3

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors
$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1.$$
- Si $a \in \mathcal{D}$ et g ne s'annule pas au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, sauf en a, alors
$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1 \quad \text{et} \quad f(a) = 0\right].$$

Remarques

⇨ Soit f la fonction polynôme définie par $f(x) := \sum_{k=m}^{n} a_k x^k$.
- Si $a_m \neq 0$, alors $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_m x^m$. En particulier
$$1 + x^2 \underset{x \to 0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad 3x + x^3 \underset{x \to 0}{\sim} 3x.$$
- Si $a_n \neq 0$, alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_n x^n$. En particulier
$$1 + x^2 + 3x^3 \underset{x \to +\infty}{\sim} 3x^3.$$

  On a évidemment le même équivalent en $-\infty$.

⇨ Soit f une fonction définie au voisinage de 0.
- Si f est continue en 0 et $f(0) \neq 0$, alors $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} f(0)$. En particulier
$$\mathrm{e}^x \underset{x \to 0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad \cos x \underset{x \to 0}{\sim} 1.$$
- Si f est dérivable en 0, $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$, alors $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} f'(0)\, x$. En particulier
$$\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x, \quad \sin x \underset{x \to 0}{\sim} x \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctan} x \underset{x \to 0}{\sim} x.$$

Exercice 7

⇨ Montrer que $1 - \cos x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Proposition 2.4

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \neq 0$. Alors
$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} l \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$

Remarque

⇨ $f(x)$ est équivalente à 0 en a si et seulement si la fonction f est identiquement nulle au voisinage de a. En pratique, si vous obtenez $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} 0$, c'est surement que vous avez fait une erreur.

Proposition 2.5

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x).$$

Alors, il existe un voisinage de a sur lequel $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe et s'annulent simultanément.

Remarque

⇨ Supposons que

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$$

et que $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \in \mathbb{R}$.

— Si $l \neq 0$, on en déduit que

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$

En particulier, si $a = \pm\infty$, le graphe de f admet la droite d'équation $y = l$ pour asymptote. Cependant, l'équivalent ne nous donne pas la position du graphe par rapport à cette asymptote. Si l'on souhaite la connaitre, on peut chercher un équivalent de $f(x) - l$; le signe de cet équivalent nous dira si le graphe de f est en dessous ou au dessus de l'asymptote au voisinage de a.

— Si $l = 0$, on en déduit que le graphe de f « colle » à celui de g au voisinage de a. Dans la suite, nous nous placerons dans le cas où $a = 0$.

— Dans le cas où $g(x) = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x.$$

La droite d'équation $y = \alpha x$ est alors tangente au graphe de f en 0. Si l'on souhaite connaitre la position du graphe de f par rapport à cette tangente, on peut chercher un équivalent de $f(x) - \alpha x$.

— Dans le cas où $g(x) = \alpha x^\beta$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, le graphe de f « colle » au graphe de αx^β au voisinage de 0. Comme pour le cas de la tangente, si on veut connaitre la position du graphe de f par rapport à celui de αx^β, on cherche un équivalent de $f(x) - \alpha x^\beta$ en 0.

Proposition 2.6

— Soit $f_1, g_1, f_2, g_2 : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que

$$f_1(x) \underset{x \to a}{\sim} g_1(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) \underset{x \to a}{\sim} g_2(x).$$

Alors

$$f_1(x) f_2(x) \underset{x \to a}{\sim} g_1(x) g_2(x).$$

Si de plus, f_2 et g_2 ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf peut-être en a, alors

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x \to a}{\sim} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}.$$

— Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions équivalentes en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)^\alpha$ et $g(x)^\alpha$ aient un sens au voisinage de a. Alors

$$f(x)^\alpha \underset{x \to a}{\sim} g(x)^\alpha.$$

Remarques

⇨ Attention, il n'est pas possible d'ajouter des équivalents. Par exemple

$$1 + x \underset{x \to 0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad -1 \underset{x \to 0}{\sim} -1.$$

Pourtant $(1 + x) - 1 = x$ n'est pas équivalent à $1 - 1 = 0$ en 0.

⇨ De même, il n'est pas possible de composer des équivalents. Par exemple

$$1 + x \underset{x \to +\infty}{\sim} x.$$

Pourtant e^{1+x} n'est pas équivalent à e^x en $+\infty$. En effet, $\mathrm{e}^{x+1}/\mathrm{e}^x = \mathrm{e} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \mathrm{e} \neq 1$.

Exercices 8

⇨ Donner un équivalent en 0 de $\ln(1+x)\sin x$.

⇨ Chercher la limite à droite en 0 de

$$\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-\cos x}}.$$

Proposition 2.7

Soit $f,\ g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$

— Soit $\overline{x}$ une fonction à valeurs dans $\mathcal{D}$, définie au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$, telle que $\overline{x}(t) \xrightarrow[t\to b]{} a$. Alors

$$f(\overline{x}(t)) \underset{t\to b}{\sim} g(\overline{x}(t)).$$

— Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. Alors

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n).$$

Exercice 9

⇨ Donner un équivalent en 0 de $\ln(1+\tan x)$.

Proposition 2.8

Soit $e, f, g, h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que

$$[\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)], \qquad f(x) \underset{x\to a}{\sim} e(x) \qquad \text{et} \qquad h(x) \underset{x\to a}{\sim} e(x).$$

Alors

$$g(x) \underset{x\to a}{\sim} e(x).$$

2.2 Fonction négligeable devant une autre

Définition 2.9

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ est *négligeable* devant $g(x)$ en a lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a et une fonction ε définie sur $\mathcal{D} \cap \mathcal{V}$ telle que

— $\forall x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{V}, \quad f(x) = \varepsilon(x) g(x)$.

— $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

On note alors

$$f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x)).$$

La propriété « est négligeable devant » est locale en a.

Proposition 2.10

Soit $f, g, h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. La relation « est négligeable devant » est transitive.

$$\left[f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(h(x))\right] \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(h(x)).$$

Proposition 2.11

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

— Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors

$$f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0.$$

— Si $a \in \mathcal{D}$ et g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf en a, alors

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\,(g(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0 \quad \text{et} \quad f(a) = 0\right].$$

Proposition 2.12

Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

— On a

$$x^{\alpha_1} \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}\,(x^{\alpha_2}) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 > \alpha_2.$$

— De plus

$$x^{\alpha_1} \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\,(x^{\alpha_2}) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 < \alpha_2.$$

Proposition 2.13

Soit $\alpha, \beta > 0$. Alors

$$(\ln x)^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^\beta\right) \quad \text{et} \quad x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{\beta x}\right).$$

Proposition 2.14

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\,(1) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0.$$

Proposition 2.15

— Soit g une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\,(g(x)) + \mu \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\,(g(x)) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\,(g(x)).$$

— Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\,(g(x)) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\,(f(x)g(x)).$$

— Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\underset{x \to a}{\mathrm{o}}\,(f(x)) \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\,(g(x)) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\,(f(x)g(x)).$$

Proposition 2.16

— Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions équivalentes en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors, une fonction est négligeable devant f en a si et seulement si elle est négligeable devant g en a.

— Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors, une fonction est négligeable devant f en a si et seulement si elle est négligeable devant λf en a.

Proposition 2.17

Soit $f,\, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\,(g(x)).$$

— Soit $\overline{x}$ une fonction à valeurs dans $\mathcal{D}$, définie au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$, telle que $\overline{x}(t) \xrightarrow[t \to b]{} a$. Alors

$$f\left(\overline{x}(t)\right) \underset{t \to b}{=} \mathrm{o}\,\left(g\left(\overline{x}(t)\right)\right).$$

— Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ telle que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$. Alors

$$f(u_n) \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\,(g(u_n)).$$

Proposition 2.18

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x) + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x)).$$

Exercice 10

⇨ Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à x associe $x\mathrm{e}^x$. Montrer que f est bijective, puis donner la limite et un équivalent de f^{-1} en $+\infty$.

2.3 Fonction dominée par une autre

Définition 2.19

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ est *dominée* par $g(x)$ en a lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a ainsi qu'une fonction B définie sur $\mathcal{D} \cap \mathcal{V}$ telle que

— $\forall x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{V}, \quad f(x) = B(x)g(x)$.

— B est bornée.

On note alors

$$f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x)).$$

La propriété « est dominée par » est locale en a.

Proposition 2.20

— Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(f(x)).$$

— Soit $f, g, h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\left[f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(h(x))\right] \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(h(x)).$$

De plus si dans l'hypothèse, l'un des O est un o, alors $f(x)$ est négligeable devant $h(x)$ au voisinage de a.

Proposition 2.21

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x)) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x)).$$

Remarque

⇨ De même, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \lambda g(x)$, alors

$$f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x)).$$

En particulier

$$x = \underset{x \to +\infty}{\mathrm{O}}(x \ln x) \quad \text{et} \quad 2x^3 - x^2 + 1 = \underset{x \to +\infty}{\mathrm{O}}\left(x^3\right).$$

Proposition 2.22

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

— Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors

$$f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \text{ est bornée au voisinage de } a.$$

— Si $a \in \mathbb{R}$ et g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf en a, alors

$$f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\frac{f(x)}{g(x)} \text{ est bornée au voisinage de } a \quad \text{et} \quad f(a) = 0\right].$$

Remarque

⇨ En particulier, si f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors

$$f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(1) \iff f \text{ est bornée au voisinage de } a.$$

3 Développement limité

3.1 Définition, propriétés élémentaires

Définition 3.1

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un *développement limité* en a à l'ordre n lorsqu'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} f(a+h) &= a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^n). \end{aligned}$$

Remarque

⇨ Pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x},$$

donc

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0} x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n).$$

Exercice 11

⇨ Montrer que $\mathrm{e}^x = 1 + x + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x)$, puis que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$.

Proposition 3.2: Troncature d'un développement limité

Soit f une fonction admettant un développement limité en a à l'ordre n

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^n).$$

Si $p \in [\![0, n]\!]$, alors f admet un développement limité en a à l'ordre p et

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{p} a_k h^k + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^p).$$

Proposition 3.3

Soit f une fonction admettant un développement limité en a à l'ordre n :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^n)$$

Alors, les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ sont uniques ; on dit que $\sum_{k=0}^{n} a_k h^k$ est la *partie régulière* du développement limité.

Définition 3.4

Soit f une fonction définie au voisinage de a. On suppose qu'il existe un réel $\alpha \neq 0$ et $\omega \in \mathbb{N}$ tels que

$$f(a+h) = \alpha h^\omega + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^\omega).$$

Alors α et ω sont uniques ; on dit que αh^ω est la *partie principale* de f en a et que ω est l'*ordre* de cette partie

principale. On a alors
$$f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} \alpha h^{\omega}.$$

Remarque

⇨ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$
alors $f(-x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$. Plus généralement, si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$
$$f(\alpha x^p) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k a_k x^{pk} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{pn}).$$

Proposition 3.5

Soit f une fonction admettant un développement limité en 0 à l'ordre n
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n).$$

— Si f est paire, a_k est nul pour tout k impair.
— Si f est impaire, a_k est nul pour tout k pair.

3.2 Développement limité et propriétés locales

Proposition 3.6

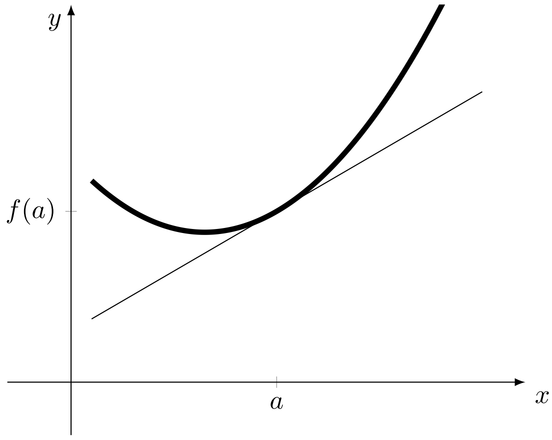
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathcal{D}$.

— Alors f admet un développement limité en a à l'ordre 0 si et seulement si elle est continue en a. De plus, si tel est le cas
$$f(a+h) = f(a) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(1).$$
— Alors f admet un développement limité en a à l'ordre 1 si et seulement si elle est dérivable en a. De plus, si tel est le cas
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h).$$

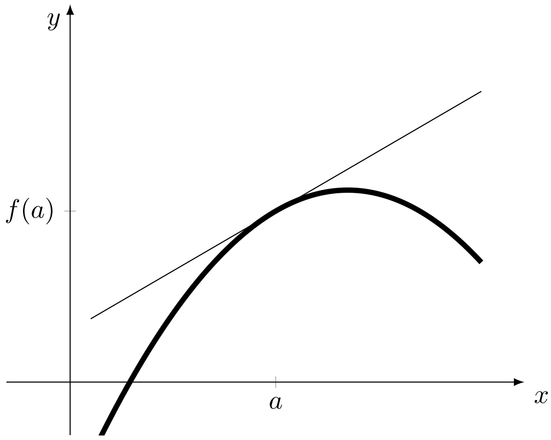
Remarques

⇨ Plus généralement, une fonction définie au voisinage de a admet un développement limité en a à l'ordre 0 si et seulement si elle admet une limite finie en a.

⇨ Pour déterminer la position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point a, il suffit de calculer la partie principale de $f(a+h) - [f(a) + f'(a)h]$. Supposons que
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \alpha h^{\omega} + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^{\omega})$$
avec $\alpha \neq 0$ et $\omega \geqslant 2$. Alors
$$f(a+h) - [f(a) + f'(a)h] \underset{h\to 0}{\sim} \alpha h^{\omega}.$$
— *Si ω est pair*, le graphe de f est au-dessus de sa tangente au voisinage de a si $\alpha > 0$ et en dessous si $\alpha < 0$.

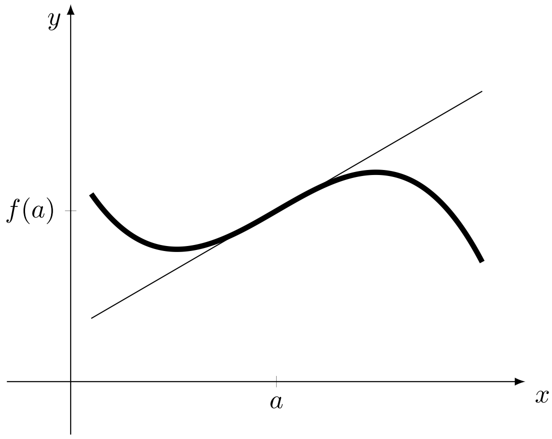


$\alpha > 0$ et ω pair



$\alpha < 0$ et ω pair

— *Si ω est impair*, le graphe de f traverse sa tangente en a. La courbe admet un point d'inflexion en a.



$\alpha < 0$ et ω impair

Exercice 12

⇨ Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3.3 Intégration et existence d'un développement limité

Proposition 3.7

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I contenant a. On suppose que f admet un développement limité en a à l'ordre n

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}} (h^n).$$

Alors, si F est une primitive de f

$$F(a+h) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} h^{k+1} + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}} \left(h^{n+1}\right).$$

Exercice 13

⇨ Donner un développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$. En déduire la limite de

$$n^2 \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque

⇨ Il n'est pas possible de dériver un développement limité. En effet, il existe des fonctions admettant un développement limité en a à l'ordre n dont la dérivée n'admet pas de développement limité en a à l'ordre $n-1$.

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsque, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, f est dérivable n fois sur I. Les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le domaine sur lequel elles sont dérivables.

Proposition 3.8: Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I contenant a. Alors f admet un développement limité en a à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n). \end{aligned}$$

3.4 Développements limités usuels

Proposition 3.9

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \\ \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right) \\ \operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right) \end{aligned}$$

Proposition 3.10

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \\ &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \end{aligned}$$

Exercice 14

⇨ Donner un développement limité en 0 à l'ordre n de

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

En déduire un développement limité à l'ordre $2n+1$ de $\operatorname{Arcsin} x$.

3.5 Opérations usuelles sur les développements limités

Proposition 3.11

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant un développement limité en a à l'ordre n

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^n), \quad g(a+h) = \sum_{k=0}^{n} b_k h^k + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^n)$$

et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité en a à l'ordre n et

$$\lambda f(a+h) + \mu g(a+h) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) h^k + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^n).$$

Exercice 15

⇨ Donner un développement limité de $\cos x$ en $\pi/3$ à l'ordre 3.

Proposition 3.12

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant un développement limité en a à l'ordre n

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^n) \quad \text{et} \quad g(a+h) = \sum_{k=0}^{n} b_k h^k + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^n).$$

Alors fg admet un développement limité en a à l'ordre n dont la partie régulière est obtenue en développant le produit des parties régulières précédentes et en ne gardant que les monômes de degrés inférieurs à n.

$$f(a+h)\, g(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) h^k + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^n).$$

Exercices 16

⇨ Donner un développement limité de $\mathrm{e}^x / \sqrt{1+x}$ en 0 à l'ordre 2.

⇨ Donner un développement limité de $\mathrm{e}^x \cos x$ en 0 à l'ordre 2.

Proposition 3.13

Soit f une fonction admettant un développement limité en a à l'ordre n et $k \in \mathbb{N}$.

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{n} a_i h^i + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^n)$$

Alors f^k admet un développement limité en a à l'ordre n dont la partie régulière est obtenue en développant la puissance k-ème de la partie régulière précédente et en ne gardant que les monômes de degrés inférieurs à n.

Exercice 17

⇨ Donner un développement limité de $\cos^3 x$ en 0 à l'ordre 4.

Proposition 3.14

Soit f et g deux fonctions admettant respectivement des développements limités à l'ordre n en a et $f(a)$.

$$\begin{aligned} f(a+u) &= f(a) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k u^k}_{P(u)} + \underset{u \to 0}{\mathrm{o}}(u^n) \\ g(f(a)+v) &= \sum_{k=0}^{n} b_k v^k + \underset{v \to 0}{\mathrm{o}}(v^n) \end{aligned}$$

Alors $g \circ f$ admet un développement limité en a à l'ordre n dont la partie régulière est obtenue en substituant $P(u)$ à v dans la partie régulière du développement limité de g et en ne gardant que les monômes de degrés inférieurs à n.

Exercice 18

⇨ Donner un développement limité en 0 à l'ordre 2 de $e^{\sqrt{1+x}}$.

Proposition 3.15

Soit f une fonction admettant un développement limité en a à l'ordre n.

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

Si $a_0 \neq 0$, alors f ne s'annule pas au voisinage de a et $1/f$ admet un développement limité en a à l'ordre n.

Exercices 19

⇨ Donner un développement limité de $1/(\cos x)$ en 0 à l'ordre 4.

⇨ Donner un développement limité de $\tan x$ en 0 à l'ordre 5.

3.6 Réduction d'ordre

Remarques

⇨ *Réduction d'ordre pour le calcul du* DL *d'un produit* : On cherche un développement limité en 0 de $e^x \sin x$. Comme

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\ &= x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ &= x\left(1 + x + \frac{1}{3}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ &= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu un développement limité à l'ordre 3 comme produit d'un développement limité à l'ordre 3 et d'un développement limité dont l'ordre n'était que de 2. Ce phénomène apparaît dès que l'ordre de l'une des parties principales est non nul. Avant de calculer le développement limité d'un produit, on prendra donc soin de calculer les ordres auxquels il faudra effectuer le développement limité de chaque terme. Pour cela nous utiliserons la notation $\mathrm{DL}_{m,n}$ pour représenter un développement limité d'ordre n dont la partie principale est d'ordre m. Par exemple, si l'on souhaite obtenir un développement limité de $(\cos x - 1)\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 4, on remarque que

$$\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x).$$

Donc $\cos x - 1$ a une partie principale d'ordre 2, et $\ln(1+x)$ a une partie principale d'ordre 1. Donc

$$(\cos x - 1)\ln(1+x) = \mathrm{DL}_{2,n}\,\mathrm{DL}_{1,m} = \left(x^2\,\mathrm{DL}_{0,n-2}\right)\left(x\,\mathrm{DL}_{0,m-1}\right) = x^3\,\mathrm{DL}_{0,n-2}\,\mathrm{DL}_{0,m-1}.$$

Comme on souhaite un développement limité à l'ordre 4, il suffit d'obtenir un développement limité de $\mathrm{DL}_{0,n-2}\,\mathrm{DL}_{0,m-1}$ à l'ordre 1. On choisit donc n et m tels que $n-2=1$ et $m-1=1$, c'est-à-dire $n=3$ et $m=2$. On a alors

$$\begin{aligned} (\cos x - 1)\ln(1+x) &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ &= x^3\left(-\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) \\ &= x^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4). \end{aligned}$$

⇨ *Réduction d'ordre pour le calcul du* DL *d'une puissance* f^k : Lorsque la partie principale de f en a est d'ordre non nul, il est utile d'effectuer un calcul d'ordre. Par exemple, si l'on souhaite obtenir un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\ln^4(1+x)$, on écrit

$$(\ln(1+x))^4 = (\mathrm{DL}_{1,n})^4 = (x\,\mathrm{DL}_{0,n-1})^4 = x^4\,\mathrm{DL}_{0,n-1}^4$$

Comme on souhaite un développement limité à l'ordre 5, il suffit d'obtenir un développement limité de $(\mathrm{DL}_{0,n-1})^4$ à l'ordre 1. On choisit donc n tel que $n-1=1$, soit $n=2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\ln^4(1+x) &= \left(x-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right)\right)^4\\
&= x^4\left(1-\frac{1}{2}x+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right)^4\\
&= x^4\left(\left(1-\frac{1}{2}x\right)^4+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right)\\
&= x^4\left(1-\binom{4}{1}\frac{1}{2}x+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right)\\
&= x^4-2x^5+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

⇨ *Réduction d'ordre pour le calcul du* DL *d'une composée* $g\circ f$: Lorsque la partie principale de $f(a+u)-f(a)$ est d'ordre $\omega\geqslant 2$, il n'est pas nécessaire de pousser le développement limité de g jusqu'à l'ordre n. En effet, si f admet un développement limité à l'ordre n et si

$$g(f(a)+v)=\sum_{k=0}^{m}b_kv^k+\underset{v\to 0}{\mathrm{o}}(v^m)$$

est un développement limité de g à l'ordre m avec $\omega m\geqslant n$, ces développements suffisent pour obtenir un développement limité de $g\circ f$ à l'ordre n. Par exemple, si on souhaite un développement limité en 0 à l'ordre 4 de $\ln(\cos x)$, on écrit

$$\cos x = 1\underbrace{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{}0}.$$

Comme la partie principale en 0 de $\cos x-1$ est d'ordre 2, il suffit de faire un développement limité de ln en 1 à l'ordre 2.

$$\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+\underset{u\to 0}{\mathrm{o}}\left(u^2\right)$$

Par composition

$$\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= \ln\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right)\right)\\
&= \left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4\right)^2+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right)\\
&= \left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4\right)-\frac{1}{2}x^4\left(-\frac{1}{2}+\cancel{\frac{1}{4!}x^2}\right)^2+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right)\\
&= -\frac{1}{2}x^2+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{2^3}\right)x^4+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right)\\
&= -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

⇨ *Développement limité avec des* O : Il est enfin possible de faire des développements limités avec des O. On dit qu'une fonction f admet un développement limité en a à la précision $\mathrm{O}(h^{n+1})$ lorsque

$$f(a+h)=a_0+a_1h+\cdots+a_nh^n+\underset{h\to 0}{\mathrm{O}}\left(h^{n+1}\right).$$

Si f admet un tel développement limité, alors il admet un développement limité en a à l'ordre n et

$$f(a+h)=a_0+a_1h+\cdots+a_nh^n+\underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n).$$

La réciproque est fausse, mais si f admet un développement limité en a à l'ordre $n+1$

$$f(a+h)=a_0+a_1h+\cdots+a_nh^n+a_{n+1}h^{n+1}+\underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^{n+1}\right)$$

alors elle admet un développement limité en a à la précision $\mathrm{O}(h^{n+1})$ obtenu par troncature.

$$f(a+h)=a_0+a_1h+\cdots+a_nh^n+\underset{h\to 0}{\mathrm{O}}\left(h^{n+1}\right).$$

Bref, un développement limité à la précision $O(h^{n+1})$ nous donne plus d'informations qu'un développement limité à l'ordre n mais moins qu'un développement limité à l'ordre $n+1$. Comme le calcul d'un tel développement limité demande autant de calculs qu'un développement limité en a à l'ordre n, il est parfois avantageux de les utiliser. Nous verrons tout leur intérêt notamment lorsque nous aurons à montrer la convergence de séries. Notons au passage que les anglo-saxons utilisent par défaut des développements limités avec des O. Ce sont donc ces développements limités que vous donneront les logiciels de calcul formel. Notons que les opérations usuelles ont leur équivalent pour les développements limités avec des O.

Exercice 20

⇨ Donner un développement limité en 0 à la précision $O(x^4)$ de $\sqrt{\cos x}$.

4 Développement asymptotique

4.1 Développement limité généralisé en $a \in \mathbb{R}$

Définition 4.1

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f admet un *développement limité généralisé* en a à la précision $o(h^n)$ lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $b_p, \dots, b_1, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(a+h) = \frac{b_p}{h^p} + \cdots + \frac{b_1}{h} + a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \underset{h \to 0}{o}(h^n).$$

Exercice 21

⇨ Donner un développement limité généralisé de $1/\sin x$ en 0 à la précision $o(x)$.

4.2 Développement asymptotique au voisinage de $a \in \mathbb{R}$

Définition 4.2

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On appelle *développement asymptotique* de f en a à la précision $o(f_n(h))$ toute écriture

$$f(a+h) = a_1 f_1(h) + \cdots + a_n f_n(h) + \underset{h \to 0}{o}(f_n(h))$$

où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^*$ et

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad f_{k+1}(h) = \underset{h \to 0}{o}(f_k(h)).$$

Exercices 22

⇨ Donner un développement asymptotique à 2 termes en 0 de $\sqrt{\ln(1+x)}$.

⇨ Simplifier, puis donner un équivalent en 0 de

$$\sin\left(\operatorname{Arcsin}(-1+x) + \frac{\pi}{2}\right).$$

En déduire un équivalent en 0 de $\operatorname{Arcsin}(-1+x) + \frac{\pi}{2}$ puis un développement asymptotique à deux termes de Arcsin en -1.

4.3 Développement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$

Définition 4.3

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On appelle *développement asymptotique* de f au voisinage de $+\infty$ à la précision $o(f_n(x))$ toute écriture

$$f(x) = a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x) + \underset{x \to +\infty}{o}(f_n(x))$$

où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^*$ et

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad f_{k+1}(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(f_k(x)).$$

Remarques

⇨ Pour avoir une éventuelle asymptote du graphe de f au voisinage de $+\infty$, il suffit de faire un développement asymptotique de $f(x)$ en $+\infty$. Supposons que

$$f(x) = ax + b + \underset{x \to +\infty}{\mathrm{o}}(1)$$

alors f admet une asymptote d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$. Pour connaitre la position de la courbe par rapport à son asymptote, il suffit de trouver la partie principale de $f(x) - (ax + b)$ en $+\infty$.

⇨ En pratique, pour effectuer un développement asymptotique en $+\infty$, on pose

$$u := \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

et on effectue un développement asymptotique de l'expression obtenue en 0.

Exercices 23

⇨ Donner un développement asymptotique à 2 termes de $\ln\left(x^3 \sin(1/x)\right)$ en $+\infty$.

⇨ Chercher une éventuelle asymptote à la fonction d'expression $\sqrt[3]{(x^2 - 2)(x + 3)}$ en $+\infty$. Donner la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

⇨ On rappelle que l'application f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à x associe $x\mathrm{e}^x$ est une bijection et que

$$f^{-1}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln x.$$

Donner un développement asymptotique à deux termes de f^{-1} en $+\infty$.

4.4 Développement asymptotique de suites

Définition 4.4

On appelle *développement asymptotique* de la suite (u_n) à la précision $\mathrm{o}(v_{p,n})$ toute écriture

$$u_n = v_{1,n} + \cdots + v_{p,n} + \underset{n \to +\infty}{\mathrm{o}}(v_{p,n})$$

où

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!], \quad v_{k+1,n} = \underset{n \to +\infty}{\mathrm{o}}(v_{k,n}).$$

Exercice 24

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution sur $]-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi[$. On note u_n cette solution. Donner un équivalent de u_n puis un développement asymptotique à 3 termes de cette suite.