Cours de Mathématiques

Sup 3 – Tome II

F. Fayard

25 août 2025

La version de ce document est la 258cef8.

Le logo de la première page a été fait par Mathilde De Matos, élève des Lazaristes.

Merci à tous les élèves des lycées Janson de Sailly, du Parc et des Lazaristes pour leurs remarques et corrections. Je remercie particulièrement Younès Achbad, Samuel Auroy, Antonin Aye, Esther Balu, Antonin Barbier, Amin Belfkira, Martin Bot, Iann Bremnes, Alexandre Brousse, Élodie Brun, Damien Callendrier, Lauren Calvosa, Valentine Chaud, Sylvain Crosnier, Aël De La Rosa-Leridon, Enguerrand De Jaegere, Thibaud De Valicourt, Victor Déru, Raphaël Des Boscs, Grégoire Dhimoïla, Léo Duhamel-Callot, Gabin Dupuy, Mehdi El Khalfioui, Sacha Evrard, Axel Faou, Titouan Francheteau, Anthony Gago-Klimenko, Hélène Ghaleb, Jocelyn Hergott, Hippolyte Him, Cédric Holocher, Maxime Joubert, Paul-Antonin Larrieu, Maxime Lombard, Mira Maamri, Gauthier Malandrin, Raphaël Martin, Cyprien Mas, Jules Matsos, Alexandre Mazet, Gabriel Moreau, Pierre-Antoine Nguyen, Ulysse Nicolle, Jeanne Ochsenbein, Baptiste Odouard, Hilaire Oudinot, Maëlyne Porté, Eliott Pradeleix, Corentin Prizzon, Yann-Ellie Ravon, Sixtine Reynaud, Romain Roche, Maxime Scotto di Rinaldi, Thibaud Sonneville, Tristan Rouby, Vivien Thienot, Carole Vacherand, Enzo Vandenbroucke, Camille Vialet, Paul Vilars, Antonin Villepontoux et Tanguy Vuillefroy De Silly.

Je tiens enfin à remercier mes anciens professeurs et collègues qui ont eu une influence sur la rédaction de ce document : Walter Appel, Bruno Arsac, Jean-Pierre Barani, Vincent Bayle, Christophe Bertault, Pascal Bigot, Laurence Bouyge, Gilles Chaffard, Alain Chillès, Denis Choimet, Vincent Clapiès, Stéphane Dumas, Gérard Esposito, Matthieu Fèvre, Stéphane Gonnord, Victor Lambert, Pierre-Louis Lions, Frédéric Morlot, Franz Ridde, Emmanuel Roblet, Alain Troesch et Cédric Villani.

Table des matières

5 Fonctions usuelles **7**
5.1 Logarithme, exponentielle, puissance . . . 8
5.1.1 Logarithme népérien . . . 8
5.1.2 Exponentielle . . . 9
5.1.3 Logarithme et exponentielle en base a . . . 11
5.1.4 Fonction puissance . . . 12
5.1.5 Calcul de limite . . . 13
5.2 Fonctions trigonométriques directes et réciproques . . . 14
5.2.1 Fonctions trigonométriques directes . . . 14
5.2.2 Fonction Arcsin . . . 16
5.2.3 Fonction Arccos . . . 17
5.2.4 Fonction Arctan . . . 18
5.2.5 Formules de trigonométrie réciproque . . . 20
5.3 Fonctions trigonométriques hyperboliques . . . 20
5.4 Qcm . . . 24
5.4.1 Logarithme, exponentielle, puissance . . . 24
5.4.2 Fonctions trigonométriques directes et réciproques . . . 24
5.4.3 Fonctions trigonométriques hyperboliques . . . 25
5.5 Exercices . . . 26
5.5.1 Logarithme, exponentielle, puissance . . . 26
5.5.2 Fonctions trigonométriques directes et réciproques . . . 27
5.5.3 Fonctions trigonométriques hyperboliques . . . 28

6 Équations différentielles **31**
6.1 Équation différentielle linéaire du premier ordre . . . 31
6.1.1 Équation différentielle homogène . . . 32
6.1.2 Équation différentielle avec second membre . . . 32
6.1.3 Problème de Cauchy . . . 33
6.1.4 Équation différentielle non résolue . . . 34
6.2 Équation différentielle linéaire du second ordre . . . 34
6.2.1 Équation différentielle homogène . . . 35
6.2.2 Équation différentielle avec second membre . . . 36
6.2.3 Problème de Cauchy . . . 36
6.3 Qcm . . . 38
6.3.1 Équation différentielle linéaire du premier ordre . . . 38
6.3.2 Équation différentielle linéaire du second ordre . . . 38
6.4 Exercices . . . 40
6.4.1 Équation différentielle linéaire du premier ordre . . . 40
6.4.2 Équation différentielle linéaire du second ordre . . . 41

7 Espaces vectoriels **43**
7.1 Espace vectoriel, application linéaire . . . 44
7.1.1 Définition, propriétés élémentaires . . . 44
7.1.2 Sous-espace vectoriel . . . 46
7.1.3 Application linéaire . . . 47
7.2 L'algèbre $\mathcal{L}(E)$ . . . 49
7.2.1 $\mathcal{L}(E, F)$ . . . 49
7.2.2 Le groupe linéaire . . . 50
7.3 Somme, somme directe, projecteur, hyperplan . . . 50

7.3.1 Somme, somme directe . . . 50
7.3.2 Projecteur . . . 51
7.3.3 Symétrie . . . 52
7.3.4 Hyperplan . . . 53
7.4 Qcm . . . 54
7.4.1 Espace vectoriel, application linéaire . . . 54
7.4.2 L'algèbre $\mathcal{L}(E)$ . . . 54
7.4.3 Somme, somme directe, projecteur, hyperplan . . . 55
7.5 Exercices . . . 56
7.5.1 Espace vectoriel, application linéaire . . . 56
7.5.2 L'algèbre $\mathcal{L}(E)$ . . . 57
7.5.3 Somme, somme directe, projecteur, hyperplan . . . 57

8 Suites **61**
8.1 Suite réelle et complexe . . . 62
8.1.1 Définition . . . 62
8.1.2 Suite et relation d'ordre . . . 62
8.2 Notion de limite . . . 63
8.2.1 Limite finie . . . 63
8.2.2 Limite infinie . . . 64
8.2.3 Limite et relation d'ordre . . . 65
8.2.4 Théorèmes usuels et limites usuelles . . . 66
8.2.5 Suite extraite . . . 68
8.3 Propriétés de $\mathbb{R}$ . . . 68
8.3.1 Voisinage . . . 68
8.3.2 Densité . . . 69
8.3.3 Propriété de la borne supérieure . . . 69
8.4 Suite monotone . . . 71
8.4.1 Suite monotone . . . 71
8.4.2 Étude des suites définies par $u_{n+1} \coloneqq f(u_n)$ . . . 72
8.4.3 Suites adjacentes . . . 73
8.4.4 Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . 74
8.5 Qcm . . . 75
8.5.1 Suite réelle et complexe . . . 75
8.5.2 Notion de limite . . . 75
8.5.3 Propriétés de $\mathbb{R}$ . . . 76
8.5.4 Suite monotone . . . 77
8.6 Exercices . . . 79
8.6.1 Suite réelle et complexe . . . 79
8.6.2 Notion de limite . . . 79
8.6.3 Propriétés de $\mathbb{R}$ . . . 81
8.6.4 Suite monotone . . . 82

9 Matrices **87**
9.1 Matrice . . . 87
9.1.1 Matrice . . . 87
9.1.2 Matrice carrée . . . 88
9.2 Opérations sur les matrices . . . 90
9.2.1 Combinaison linéaire . . . 90
9.2.2 Produit . . . 91
9.2.3 Calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . . . 92
9.2.4 Matrice inversible . . . 93
9.3 Matrice et système linéaire . . . 94
9.3.1 Interprétation matricielle . . . 94
9.3.2 Calcul d'inverse, système de Cramer . . . 95
9.3.3 Opérations élémentaires par produit matriciel . . . 96
9.3.4 Matrice échelonnée . . . 97
9.4 Qcm . . . 98
9.4.1 Matrice . . . 98
9.4.2 Opérations sur les matrices . . . 98
9.4.3 Matrice et système linéaire . . . 99

9.5 Exercices . . . 100
9.5.1 Matrice . . . 100
9.5.2 Opérations sur les matrices . . . 100
9.5.3 Matrice et système linéaire . . . 102

10 Dénombrement **105**
10.1 Cardinal . . . 105
10.1.1 Équipotence . . . 105
10.1.2 Ensemble fini, cardinal . . . 106
10.2 Dénombrement . . . 107
10.2.1 Dénombrement élémentaire . . . 107
10.2.2 Arrangement, combinaison . . . 109
10.3 Qcm . . . 113
10.3.1 Cardinal . . . 113
10.3.2 Dénombrement . . . 113
10.4 Exercices . . . 115
10.4.1 Cardinal . . . 115
10.4.2 Dénombrement . . . 116

Chapitre 5

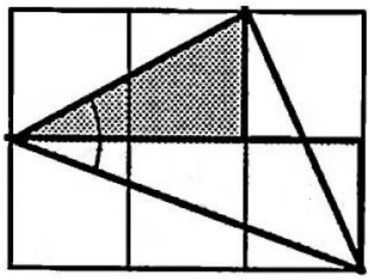
Fonctions usuelles

« En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue. »

— John Von Neumann (1903–1957)

« Le logarithme de John Napier, en réduisant leur travail, a doublé la vie des astronomes. »

— Pierre-Simon Laplace (1749–1827)



« Arctan $\frac{1}{2}$ + Arctan $\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$. »

— Leonhard Euler (1707–1783)

5.1 Logarithme, exponentielle, puissance . . . **8**
- 5.1.1 Logarithme népérien . . . 8
- 5.1.2 Exponentielle . . . 9
- 5.1.3 Logarithme et exponentielle en base a . . . 11
- 5.1.4 Fonction puissance . . . 12
- 5.1.5 Calcul de limite . . . 13

5.2 Fonctions trigonométriques directes et réciproques . . . **14**
- 5.2.1 Fonctions trigonométriques directes . . . 14
- 5.2.2 Fonction Arcsin . . . 16
- 5.2.3 Fonction Arccos . . . 17
- 5.2.4 Fonction Arctan . . . 18
- 5.2.5 Formules de trigonométrie réciproque . . . 20

5.3 Fonctions trigonométriques hyperboliques . . . **20**

5.4 Qcm . . . **24**
- 5.4.1 Logarithme, exponentielle, puissance . . . 24
- 5.4.2 Fonctions trigonométriques directes et réciproques . . . 24
- 5.4.3 Fonctions trigonométriques hyperboliques . . . 25

5.5 Exercices . . . **26**
- 5.5.1 Logarithme, exponentielle, puissance . . . 26
- 5.5.2 Fonctions trigonométriques directes et réciproques . . . 27
- 5.5.3 Fonctions trigonométriques hyperboliques . . . 28

5.1 Logarithme, exponentielle, puissance

5.1.1 Logarithme népérien

Définition 5.1.1

On appelle *logarithme népérien* et on note ln l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1.

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \end{array}$$

Remarque

⇨ Le nom ln est à la fois l'acronyme de logarithme naturel et de logarithme népérien (en hommage à John Napier, mathématicien Écossais, 1550–1617).

Proposition 5.1.2

- ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln' x = \frac{1}{x}.$$

Remarque

⇨ La fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln |x| \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 1/x$. Autrement dit, sur $\mathbb{R}^*$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln |x|.$$

Proposition 5.1.3

$$\begin{aligned} & \ln 1 = 0, \\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad & \ln (xy) = \ln x + \ln y, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad & \ln (1/x) = -\ln x, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad & \ln x^n = n \ln x. \end{aligned}$$

Proposition 5.1.4

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \ln x.$$

Proposition 5.1.5

ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus

$$\ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty.$$

Exercice 1

⇨ Résoudre l'inéquation $\ln |x+1| - \ln |2x+1| \leqslant \ln 2$.

Proposition 5.1.6

ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 5.1.7

Il existe un unique réel, noté e et appelé *nombre de Néper*, tel que $\ln \mathrm{e} = 1$.

Proposition 5.1.8

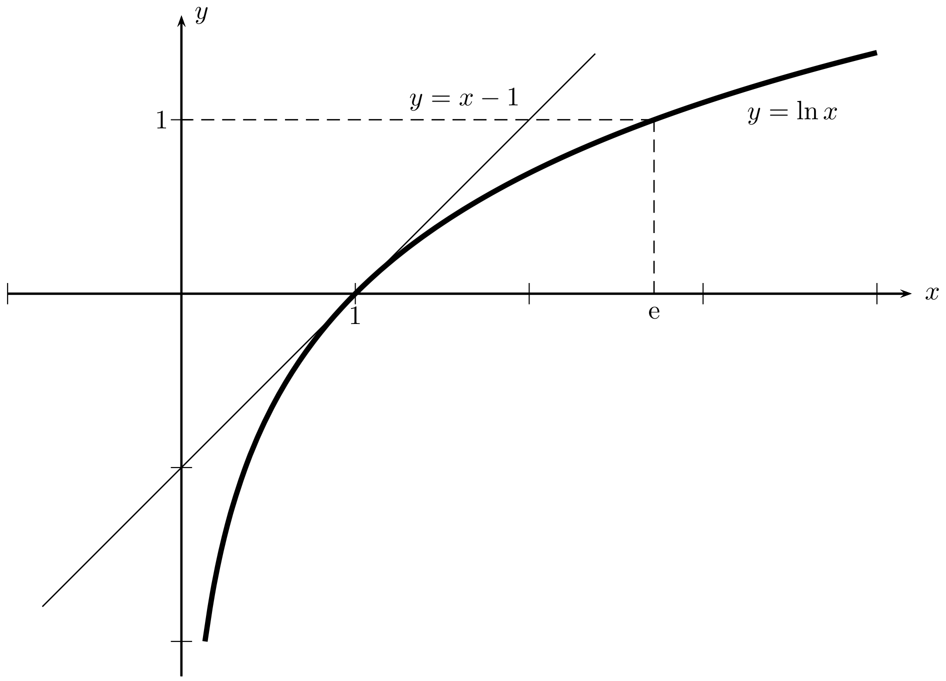
$$\forall x \in \left]-1, +\infty\right[, \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

Exercice 2

⇨ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$.

Proposition 5.1.9

$$\frac{x}{\ln x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty, \qquad x \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} 0,$$
$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1.$$



5.1.2 Exponentielle

Définition 5.1.10

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln x = y$; on le note $\exp y$. On définit ainsi la fonction

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ y & \longmapsto & \exp y. \end{array}$$

Remarques

⇨ Autrement dit, exp est la bijection réciproque de ln.

⇨ Par définition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp x > 0.$$

Proposition 5.1.11

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \ln(\exp x) = x, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad & \exp(\ln x) = x. \end{aligned}$$

Proposition 5.1.12

exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 5.1.13

$$\begin{aligned} \exp 0 = 1, \qquad & \exp 1 = \mathrm{e}, \\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad & \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \exp(-x) = \frac{1}{\exp x}, \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad & \exp(nx) = (\exp x)^n. \end{aligned}$$

Proposition 5.1.14

exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\exp x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \exp x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

Proposition 5.1.15

- exp est continue sur $\mathbb{R}$.
- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp' x = \exp x.$$

Proposition 5.1.16

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp x \geqslant 1 + x.$$

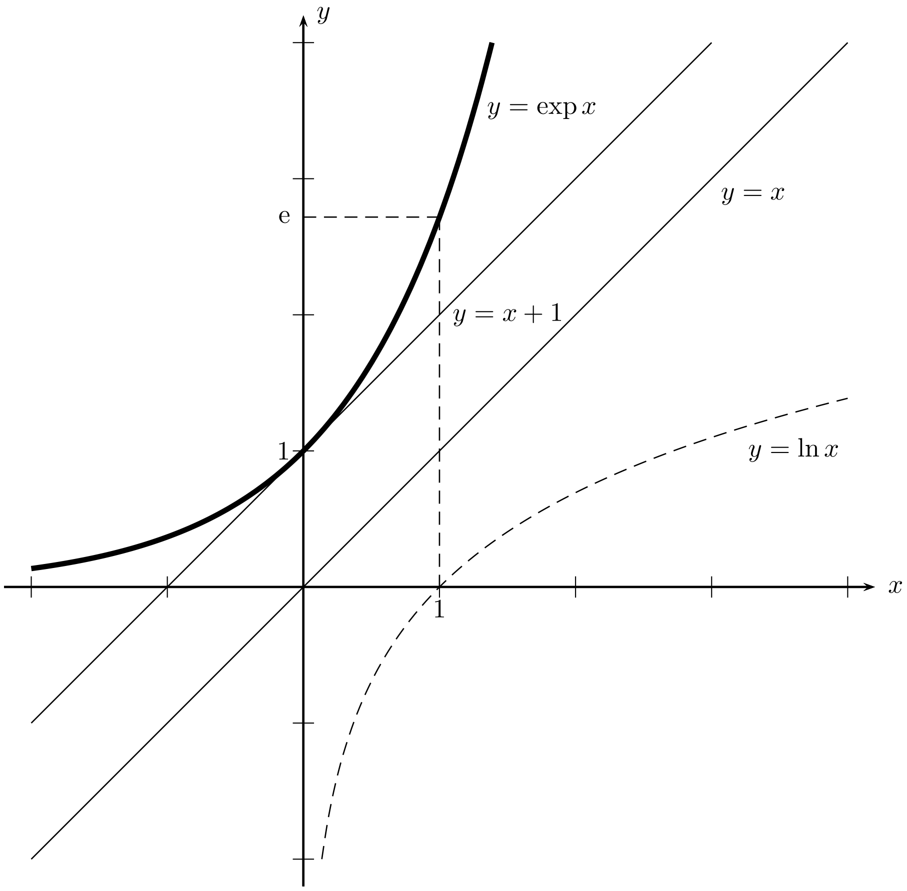
Exercices 3

⇨ Montrer que
$$\forall x < 1, \quad \exp x \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 < b\exp(-ax) - a\exp(-bx) < b - a.$$

Proposition 5.1.17

$$\frac{\exp x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty, \qquad x\exp x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0,$$
$$\frac{\exp(x) - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1.$$



5.1.3 Logarithme et exponentielle en base a

Définition 5.1.18

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle *logarithme en base a* et on note $\log_a$ la fonction

$$\log_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln x}{\ln a}. \end{array}$$

Remarque

⇨ Le logarithme népérien est le logarithme en base e. Si $a = 10$, on obtient le logarithme décimal qui est utilisé en physique (pour définir les décibels) et en chimie (pour définir le pH).

Exercice 4

⇨ Résoudre le système

$$\begin{cases} 2\log_x y + 2\log_y x = -5 \\ xy = \mathrm{e}. \end{cases}$$

Proposition 5.1.19

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Alors

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, &\qquad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, &\qquad \log_a(1/x) = -\log_a x, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, &\qquad \log_a x^n = n \log_a x. \end{aligned}$$

Définition 5.1.20

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\log_a x = y$; on le note $\exp_a y$ et on a

$$\exp_a y = \exp\left(y \ln a\right).$$

On définit ainsi la fonction

$$\begin{array}{rccc} \exp_a : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & y & \longmapsto & \exp\left(y \ln a.\right) \end{array}$$

Remarque

⇨ Lorsque $a = \mathrm{e}$, on retrouve la fonction exponentielle.

5.1.4 Fonction puissance

Définition 5.1.21

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, on définit x^y par

$$x^y := \exp\left(y \ln x\right).$$

Remarques

⇨ En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp x = \mathrm{e}^x$. Plus généralement, si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x.$$

On utilisera désormais cette notation pour désigner l'exponentielle ainsi que l'exponentielle en base a.

⇨ Afin de dériver une fonction de la forme $f(x) := u(x)^{v(x)}$, il est recommandé de la mettre sous la forme

$$f(x) = \mathrm{e}^{v(x)\ln(u(x))}.$$

Exercices 5

⇨ Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x}$.

⇨ Calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^x\right)$.

Définition 5.1.22

Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^a. \end{array}$$

Proposition 5.1.23

$$\begin{array}{rrl} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & x^0 = 1, & \forall a \in \mathbb{R}, \quad 1^a = 1, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a, b \in \mathbb{R}, & x^{a+b} = x^a x^b, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a \in \mathbb{R}, & x^{-a} = 1/x^a, \\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a \in \mathbb{R}, & (xy)^a = x^a y^a, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a, b \in \mathbb{R}, & \left(x^a\right)^b = x^{ab}, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a \in \mathbb{R}, & \ln\left(x^a\right) = a \ln x. \end{array}$$

Proposition 5.1.24

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $\varphi_a : x \mapsto x^a$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est

— continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

— dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi_a'(x) = a x^{a-1}.$$

Proposition 5.1.25

Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$x^a \xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x^a \xrightarrow[x \to 0]{} \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Remarque

⇨ Si $a > 0$, on définit 0^a en posant $0^a := 0$. La fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^a \end{array}$$

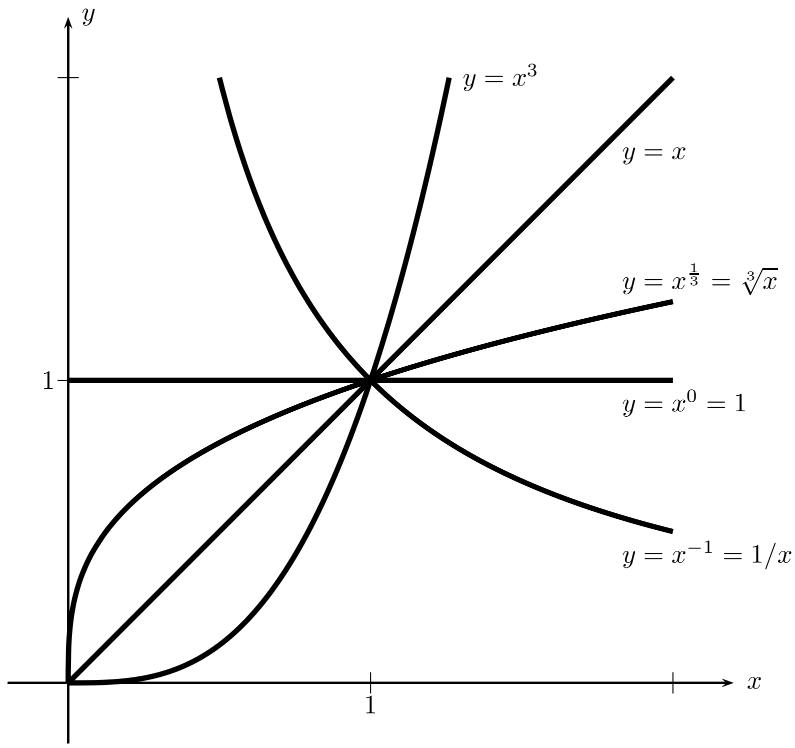
est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur

— $\mathbb{R}_+$ lorsque $a \geqslant 1$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi_a'(x) = a x^{a-1}.$$

— $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $a < 1$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi_a'(x) = a x^{a-1}.$$



Proposition 5.1.26

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \geqslant 0, \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

5.1.5 Calcul de limite

Proposition 5.1.27: Croissances comparées

Soit $\alpha, \beta > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty, \qquad \frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty,$$

$$x^\alpha (\ln x)^n \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

Remarques

⇨ Mnémotechniquement, on dit qu'en 0 et en $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le logarithme.

⇨ La technique essentielle dans le calcul des limites est la *factorisation par le terme principal* : lorsqu'on fait face à une somme de termes qui tendent vers $\pm\infty$, il est nécessaire de factoriser par le terme qui tend « le plus vite vers l'infini ».

— Pour calculer la limite en $\pm\infty$ des polynômes, il convient de factoriser par le monôme de plus haut degré. Par exemple
$$2x^3 - x^2 + 1 = x^3\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

— Pour calculer la limite en $\pm\infty$ des fractions rationnelles, il convient de factoriser au numérateur et au dénominateur par le monôme de plus haut degré. Par exemple
$$\frac{x^2+2x-3}{2x^2-1} = \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{2-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

— Pour calculer la limite en $\pm\infty$ des fractions rationnelles en x et en e^x, il convient d'utiliser les croissances comparées en se rappelant que l'exponentielle l'emporte sur les puissances en $-\infty$ et en $+\infty$. Par exemple
$$\mathrm{e}^x - x^5 = \mathrm{e}^x\left(1 - \frac{x^5}{\mathrm{e}^x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \qquad \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x}{x^3+3\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1-2\frac{x}{\mathrm{e}^x}}{3+\frac{x^3}{\mathrm{e}^{2x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{3}.$$

— Pour calculer la limite en $+\infty$ ou en 0 des fractions rationnelles en $\ln x, x$ et e^x, il convient d'utiliser les croissances comparées en se rappelant que l'exponentielle l'emporte sur les puissances qui l'emportent sur le logarithme que ce soit en $+\infty$ ou en 0.

⇨ Une autre technique importante est la technique du *changement de variable*. Elle se base sur le théorème de composition des limites. Le principe en est le suivant. Étant donné une fonction f définie au voisinage de a, on cherche deux fonctions g et $\bar{u}$ telles que sur ce voisinage
$$f(x) = g(\bar{u}(x)).$$
Si on connait la limite l de $\bar{u}(x)$ lorsque x tend vers a et la limite l' de $g(u)$ lorsque u tend vers l, alors le théorème de composition des limites permet de conclure que $f(x)$ tend vers l' lorsque x tend vers a.

Exercices 6

⇨ Calculer la limite de
$$\frac{\mathrm{e}^x \ln x - x^{1000} + \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} + \ln x + x} \quad \text{en } +\infty.$$

⇨ Calculer les limites suivantes
$$\frac{(\ln x)^2}{\mathrm{e}^x} \quad \text{en } +\infty, \qquad \frac{1}{x}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{en } 0, \qquad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}{x^2} \quad \text{en } +\infty, \qquad |\ln x|^x \quad \text{en } 0\ .$$

5.2 Fonctions trigonométriques directes et réciproques

5.2.1 Fonctions trigonométriques directes

Proposition 5.2.1

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

Proposition 5.2.2

Les fonctions sin, cos et tan sont dérivables une infinité de fois sur leur ensemble de définition et
$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \sin^{(n)} x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \\
\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \cos^{(n)} x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \\
\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \qquad & \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.
\end{aligned}$$

Proposition 5.2.3

On a

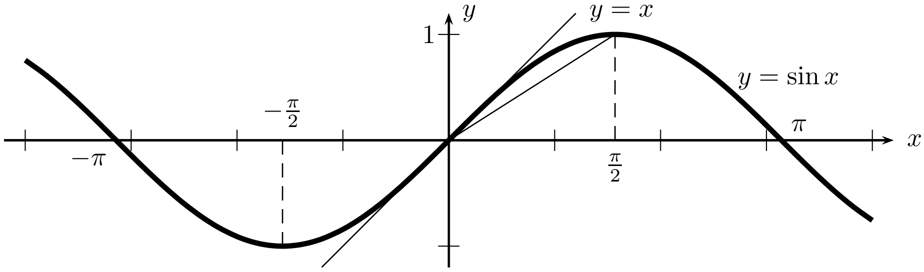
$$\begin{aligned} \forall x \geqslant 0, &\qquad \sin x \leqslant x, \\ \forall x \in \mathbb{R}, &\qquad |\sin x| \leqslant |x|\,. \end{aligned}$$

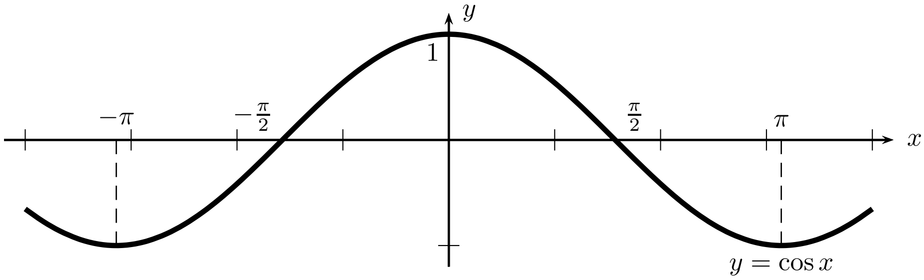
Exercices 7

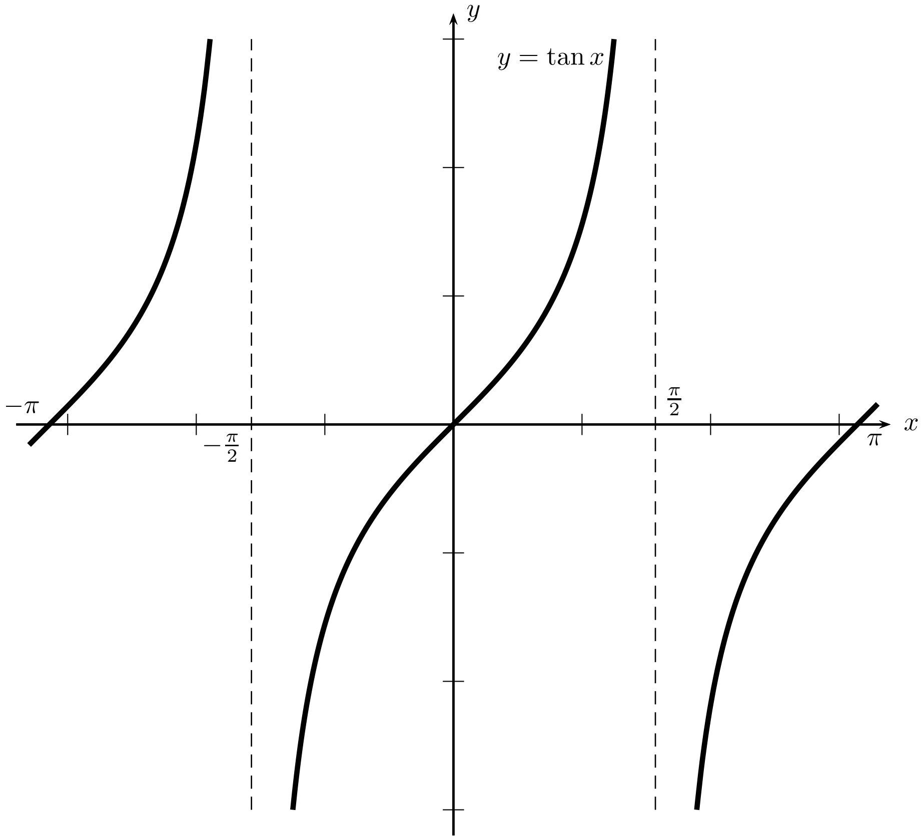
⇨ Montrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x.$$

⇨ Calculer la dérivée n-ième de la fonction d'expression $\sin^3 x$.







5.2.2 Fonction Arcsin

Définition 5.2.4

Pour tout $y \in [-1, 1]$, il existe un unique $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin x = y$; on le note $\operatorname{Arcsin} y$. On définit ainsi la fonction

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{Arcsin} : & [-1,1] & \longrightarrow & [-\pi/2, \pi/2] \\ & y & \longmapsto & \operatorname{Arcsin} y. \end{array}$$

Remarque

⇨ Autrement dit, sin réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1, 1]$ et Arcsin est sa bijection réciproque.

Proposition 5.2.5

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, 1], \qquad & \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x, \\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad & \operatorname{Arcsin}(\sin x) = x. \end{aligned}$$

Exercice 8

⇨ Calculer

$$\operatorname{Arcsin}(1), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{\pi}{7}\right), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{5\pi}{7}\right), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\cos\frac{\pi}{5}\right).$$

Proposition 5.2.6

Arcsin réalise une bijection de $[-1, 1]$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$.

Proposition 5.2.7

- Arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$.
- Arcsin est impaire.

Exercice 9

⇨ On pose

$$x := \operatorname{Arcsin}\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Calculer $\cos(4x)$ puis en déduire x.

Proposition 5.2.8

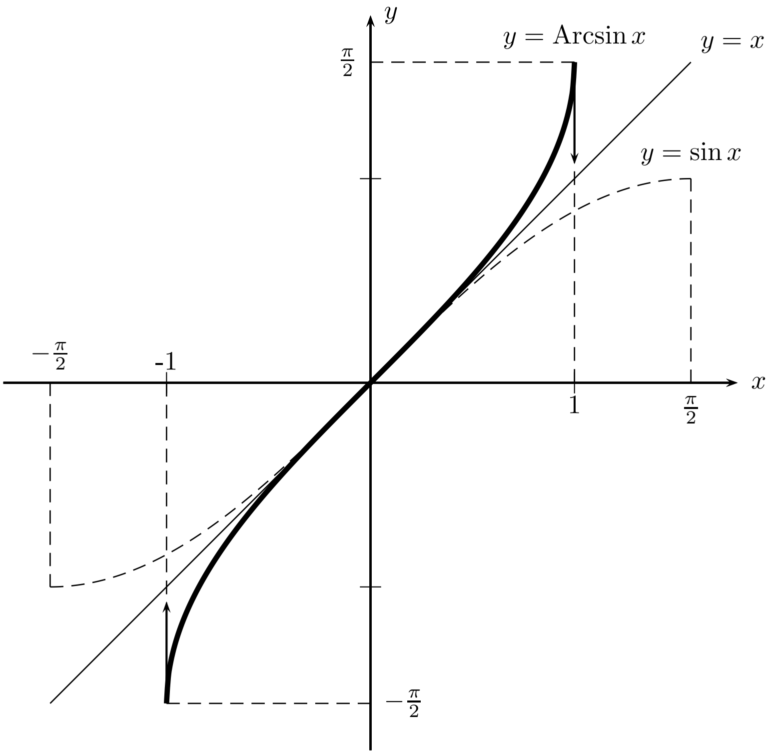
- Arcsin est continue sur $[-1, 1]$.
- Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \quad \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 10

⇨ Montrer que

$$\forall x \in [0, 1[, \quad x \leqslant \operatorname{Arcsin} x \leqslant \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$



5.2.3 Fonction Arccos

Définition 5.2.9

Pour tout $y \in [-1,1]$, il existe un unique $x \in [0,\pi]$ tel que $\cos x = y$; on le note $\text{Arccos}\, y$. On définit ainsi la fonction

$$\begin{array}{rccc} \text{Arccos}: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & y & \longmapsto & \text{Arccos}\, y. \end{array}$$

Remarque

⇨ Autrement dit, cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$ et Arccos est sa bijection réciproque.

Proposition 5.2.10

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1,1], &\quad \cos(\text{Arccos}\, x) = x, \\ \forall x \in [0,\pi], &\quad \text{Arccos}(\cos x) = x. \end{aligned}$$

Exercices 11

⇨ Calculer

$$\text{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \text{Arccos}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right).$$

⇨ Simplifier $\text{Arccos}(\cos x) - \frac{1}{2}\text{Arccos}(\cos(2x))$ pour tout $x \in [0,2\pi]$.

⇨ Calculer $\cos(3\,\text{Arccos}\, x)$.

Proposition 5.2.11

Arccos réalise une bijection de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$.

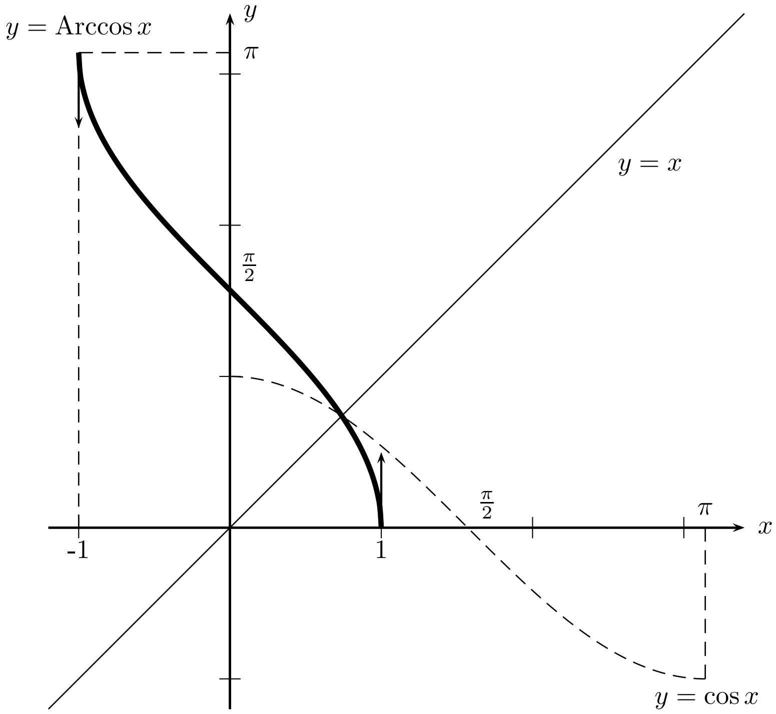
Proposition 5.2.12

Arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$.

Proposition 5.2.13

- Arccos est continue sur $[-1,1]$.
- Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arccos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



5.2.4 Fonction Arctan

Définition 5.2.14

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $\tan x = y$; on le note $\operatorname{Arctan} y$. On définit ainsi la fonction

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{Arctan} : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\pi/2, \pi/2[\\ & y & \longmapsto & \operatorname{Arctan} y. \end{array}$$

Remarque

⇨ Autrement dit, tan réalise une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ et Arctan est sa bijection réciproque.

Proposition 5.2.15

$$\begin{array}{rl} \forall x \in \mathbb{R}, & \tan(\operatorname{Arctan} x) = x, \\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, & \operatorname{Arctan}(\tan x) = x. \end{array}$$

Exercices 12

⇨ Calculer $\operatorname{Arctan}\left(\tan \frac{1789\pi}{45}\right)$.

⇨ Le langage de programmation Shadok dispose de la fonction Arctan mais pas de la fonction Arcsin. Exprimez cette dernière à partir de la fonction Arctan.

Proposition 5.2.16

Arctan réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

Proposition 5.2.17

— Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$$\operatorname{Arctan} x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctan} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

— Arctan est impaire.

Exercice 13

⇨ Résoudre l'équation $\operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$.

Remarque

⇨ On a

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

Cette formule est utile pour calculer des approximations de π. En effet, nous développerons des techniques pour calculer des valeurs approchées de $\operatorname{Arctan} x$, qui seront d'autant plus efficaces que x est proche de 0.

Proposition 5.2.18

— Arctan est continue sur $\mathbb{R}$.
— Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Exercice 14

⇨ Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\operatorname{Arctan} x \leqslant x$.

Remarque

⇨ Le calcul de primitive de la forme

$$\int \frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x$$

où $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x^2 + \alpha x + \beta$ n'a pas de racine réelle se fait de la manière suivante.

$$\begin{aligned}
\int \frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x &= \frac{a}{2}\int \frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x + \left(b - \frac{a\alpha}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+\beta} \\
&= \frac{a}{2}\ln\left(x^2+\alpha x+\beta\right) + \frac{2b-a\alpha}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+\beta}
\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de mettre le trinôme (qui rappelons-le n'a pas de racine réelle) sous forme canonique

$$x^2+\alpha x+\beta = \left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \underbrace{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}_{:=\gamma^2>0} = \gamma^2\left[\left(\frac{2x+\alpha}{2\gamma}\right)^2+1\right]$$

puis de poser $u := (2x+\alpha)/(2\gamma)$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+\beta} &= \frac{1}{\gamma^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{2x+\alpha}{2\gamma}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\gamma}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{\gamma}\operatorname{Arctan} u \\
&= \frac{1}{\gamma}\operatorname{Arctan}\frac{2x+\alpha}{2\gamma}.
\end{aligned}$$

En conclusion

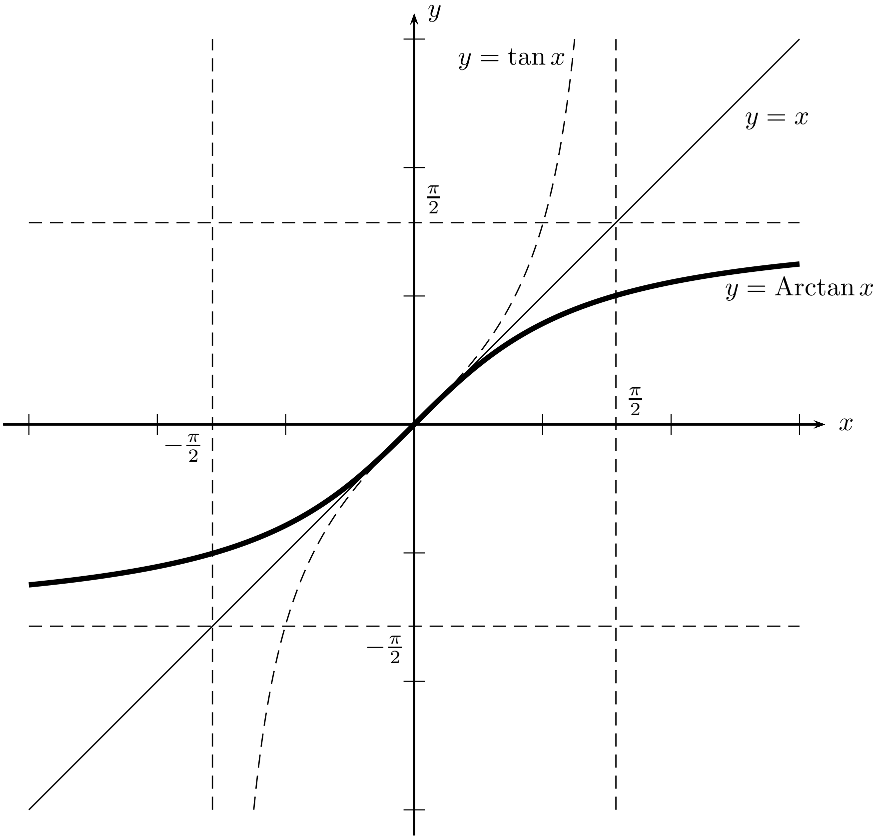
$$\int \frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\ln\left(x^2+\alpha x+\beta\right) + \frac{2b-a\alpha}{2\gamma}\operatorname{Arctan}\frac{2x+\alpha}{2\gamma}.$$

Exercice 15

⇨ Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}.$$

Utiliser ce résultat pour calculer
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}.$$



5.2.5 Formules de trigonométrie réciproque

Proposition 5.2.19

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2},$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 16

⇨ Montrer que
$$\forall x \geqslant 0, \qquad \frac{x}{1+x^2} \leqslant \mathrm{Arctan}\, x \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1+x^2}.$$

5.3 Fonctions trigonométriques hyperboliques

Définition 5.3.1

On définit les fonctions sh et ch sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}\, x := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\, x := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Exercice 17

⇨ Résoudre l'équation $7\,\mathrm{ch}\, x + 2\,\mathrm{sh}\, x = 9$.

Proposition 5.3.2

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, &\qquad \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^x, \\ \forall x \in \mathbb{R}, &\qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \end{aligned}$$

Proposition 5.3.3

ch est sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x.$$

Proposition 5.3.4

- ch est paire et sh est impaire.
- On a

$$\operatorname{ch} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty,$$
$$\operatorname{sh} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty.$$

Exercice 18

⇨ Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ de fonctions, respectivement paire et impaire, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a(x) + b(x).$$

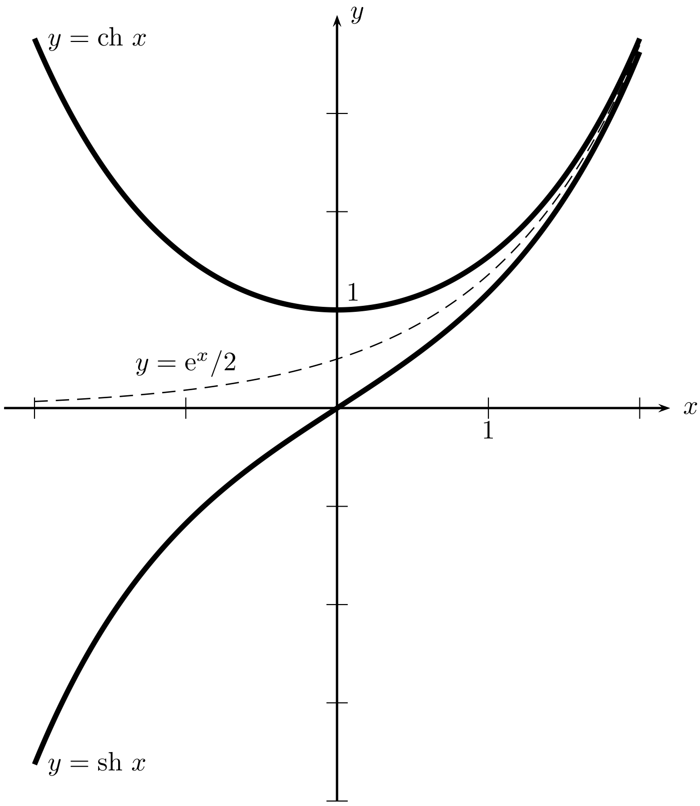
On dit que a est la *partie paire* de f et que b est sa *partie impaire*. En particulier, ch est la partie paire de l'exponentielle et sh est sa partie impaire.

Proposition 5.3.5

- ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x \geqslant 1.$
- sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\operatorname{sh} x = 0 \iff x = 0] \quad \text{et} \quad [\operatorname{sh} x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0].$

Proposition 5.3.6

- sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.



Remarque

⇨ Le graphe de la fonction ch est obtenu en laissant pendre une chaine entre deux points. C'est pourquoi, le graphe de cette fonction est aussi appelé « chainette ».

Exercice 19

⇨ On appelle Argsh la bijection réciproque de sh. Donner une expression de $\mathrm{Argsh}\, x$ à l'aide des fonctions usuelles.

Définition 5.3.7

On définit la fonction th sur $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{th}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}. \end{array}$$

Proposition 5.3.8

th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}'\, x = 1 - \mathrm{th}^2\, x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\, x}.$$

En particulier th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

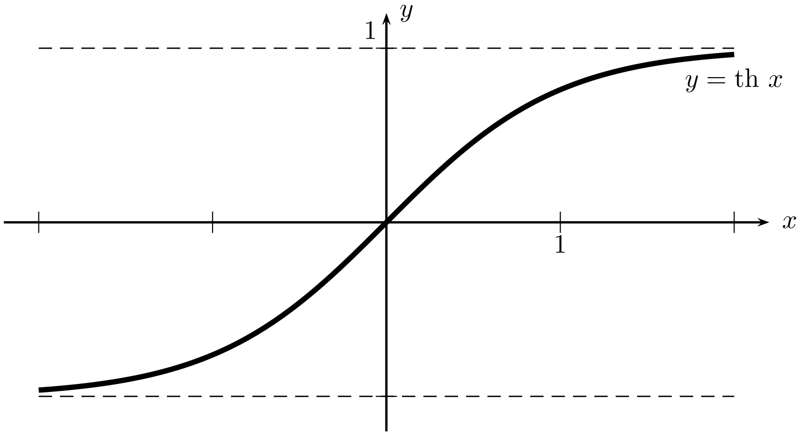
Proposition 5.3.9

— th est impaire.
— On a

$$\mathrm{th}\, x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{th}\, x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1.$$

Proposition 5.3.10

th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$.



Remarque

⇨ Les substitutions

$$\begin{array}{rcl} \cos x & \to & \operatorname{ch} x \\ \sin x & \to & \mathrm{i} \operatorname{sh} x \end{array}$$

et donc $\tan x \to \mathrm{i} \operatorname{th} x$ transforment toute formule de trigonométrie circulaire en une formule de trigonométrie hyperbolique.

Exercice 20

⇨ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(kx).$$

On pourra multiplier S_n par $\operatorname{sh}(x/2)$ et utiliser des formules de trigonométrie hyperbolique.

5.4 Qcm

5.4.1 Logarithme, exponentielle, puissance

Logarithme népérien

1. Quel est le domaine de définition de $f : x \mapsto \ln(1-\sqrt{x})$?

   ☐ **a.** $[0,+\infty[$ ☐ **b.** $]-\infty,1]$ ☐ **c.** $[0,1[$ ☐ **d.** $]0,1]$

2. Le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln(\ln|x|)$ est

   ☐ **a.** $\mathbb{R}^*$ ☐ **b.** $]0,+\infty[$ ☐ **c.** $]1,+\infty[$ ☐ **d.** $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

Exponentielle

1. Quelle fonction vérifie $f(x+y)=f(x)f(y)$ pour tous x et y dans son domaine de définition ?

   ☐ **a.** $f(x)=\ln(2x)$ ☐ **b.** $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln x$ ☐ **c.** $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$ ☐ **d.** $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$

Logarithme et exponentielle en base a

1. Soit a dans $]0,1[$. L'équation $a^x=b$ admet

   ☐ **a.** 0 ou 1 solution, selon b ☐ **b.** 1 solution pour tout b
   ☐ **c.** 1 ou 2 solutions, selon b ☐ **d.** 0, 1 ou 2 solutions, selon b

Fonction puissance

1. Si a et b sont des réels strictement positifs, $a^{\ln b}$ est égal à

   ☐ **a.** $\mathrm{e}^{\ln(ab)}$ ☐ **b.** $b^{\ln a}$ ☐ **c.** $\ln\left(a^b\right)$ ☐ **d.** $(\ln a)^b$

2. Soit a,b,c trois réels >0. Alors $a^{(b^c)}$

   ☐ **a.** vaut a^{bc} ☐ **b.** vaut c^{ab} ☐ **c.** vaut $a^{\left(c^b\right)}$ ☐ **d.** ne se simplifie pas

3. Si x est un nombre réel, $\sqrt[3]{x^2}$ est égal à

   ☐ **a.** $x^{\frac{3}{2}}$ ☐ **b.** $|x|^{\frac{3}{2}}$ ☐ **c.** $x^{\frac{2}{3}}$ ☐ **d.** $|x|^{\frac{2}{3}}$

4. Pour $x>1$, l'expression $x^{\ln(\ln x)/\ln x}$ se simplifie en

   ☐ **a.** $\ln x$ ☐ **b.** $\ln(\ln x)$ ☐ **c.** $x^{\ln x}$ ☐ **d.** x

5. Si a est strictement positif, $f : x \mapsto \frac{\ln(x^a)}{\ln x}$ tend, lorsque x tend vers $+\infty$, vers

   ☐ **a.** a ☐ **b.** $+\infty$ ☐ **c.** x^{a-1} ☐ **d.** $\ln a$

6. La fonction puissance $x \mapsto x^a$ est croissante sur $]0,+\infty[$ si et seulement si

   ☐ **a.** $a \geqslant 0$ ☐ **b.** $a>0$ ☐ **c.** $a \geqslant 1$ ☐ **d.** $a>1$

Calcul de limite

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^a}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ pour

   ☐ **a.** $a>0$ ☐ **b.** $a \geqslant 0$ ☐ **c.** $a>1$ ☐ **d.** tout réel a

5.4.2 Fonctions trigonométriques directes et réciproques

Fonctions trigonométriques directes

1. En 0, la fonction $x \mapsto \frac{x}{\sin x}$ tend vers

   ☐ **a.** 0 ☐ **b.** 1 ☐ **c.** $\dfrac{1}{\cos x}$ ☐ **d.** $+\infty$

2. Pour tout x dans l'intervalle $]0,\pi/2[$, on a

   ☐ **a.** $\sin x<\tan x<x$ ☐ **b.** $\sin x<x<\tan x$ ☐ **c.** $x<\sin x<\tan x$ ☐ **d.** $\tan x<\sin x<x$

Fonction Arcsin

1. Lorsque $x \in [0, \pi/2]$, $\mathrm{Arcsin}\,(\cos x)$ vaut

   ☐ **a.** $\sqrt{1-x^2}$ ☐ **b.** $x - \dfrac{\pi}{2}$ ☐ **c.** $\dfrac{\pi}{2} - x$ ☐ **d.** $\dfrac{\pi}{2} + x$

Fonction Arccos

1. Quels sont les réels x pour lesquels $\mathrm{Arccos}\,(\cos x) = x$?

   ☐ **a.** tous les réels ☐ **b.** les réels de $[-1, 1]$ ☐ **c.** les réels de $[0, \pi]$ ☐ **d.** les réels de $[-\pi/2, \pi/2]$

Fonction Arctan

1. Laquelle des fonctions suivantes n'est pas définie sur $\mathbb{R}$?

   ☐ **a.** $x \mapsto \sin(\mathrm{Arcsin}\, x)$ ☐ **b.** $x \mapsto \mathrm{Arcsin}\,(\sin x)$ ☐ **c.** $x \mapsto \tan(\mathrm{Arctan}\, x)$ ☐ **d.** $x \mapsto \mathrm{Arcsin}\,(\cos x)$

2. Quelle droite est asymptote au graphe de la fonction Arctan

   ☐ **a.** $y = x$ ☐ **b.** $y = -x$ ☐ **c.** $y = \dfrac{\pi}{2}$ ☐ **d.** $y = \tan x$

Formules de trigonométrie réciproque

5.4.3 Fonctions trigonométriques hyperboliques

1. Pour tout réel x, $\sqrt{\mathrm{ch}^2\, x - 1}$ se simplifie en

   ☐ **a.** $\mathrm{sh}\, x$ ☐ **b.** $\mathrm{ch}\, x - 1$ ☐ **c.** $|\mathrm{sh}\, x|$ ☐ **d.** $|\mathrm{ch}\, x - 1|$

2. Laquelle des fonctions suivantes n'est pas croissante sur son intervalle de définition ?

   ☐ **a.** Arcsin ☐ **b.** Arccos ☐ **c.** Arctan ☐ **d.** sh

3. Laquelle des fonctions suivantes n'est pas croissante sur $]0, +\infty[$?

   ☐ **a.** $x \mapsto (\sqrt{2})^x$ ☐ **b.** $x \mapsto -2^{\frac{1}{x}}$ ☐ **c.** $x \mapsto \ln(\mathrm{sh}\, x)$ ☐ **d.** $x \mapsto \left(\tan \dfrac{\pi}{8}\right)^x$

4. L'équation $\mathrm{ch}\, x = a$ admet exactement deux solutions pour

   ☐ **a.** tout $a \in \mathbb{R}$ ☐ **b.** $a > 0$ ☐ **c.** $a \geqslant 1$ ☐ **d.** $a > 1$

5. La limite de la fonction th en $+\infty$ est

   ☐ **a.** -1 ☐ **b.** 0 ☐ **c.** 1 ☐ **d.** $+\infty$

6. La dérivée de la fonction th est

   ☐ **a.** $1 - \mathrm{th}^2$ ☐ **b.** $1 + \mathrm{th}^2$ ☐ **c.** th^2 ☐ **d.** $\mathrm{th}^2 - 1$

7. Laquelle des fonctions suivantes ne tend pas vers 0 en $+\infty$?

   ☐ **a.** $x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}\, x}{x}$ ☐ **b.** $x \mapsto \dfrac{x^2}{\mathrm{sh}\, x}$ ☐ **c.** $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{e}^x}$ ☐ **d.** $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

5.5 Exercices

5.5.1 Logarithme, exponentielle, puissance

Logarithme népérien

Exercice 1 : Équations, inéquations, inégalités

Montrer que pour tout $x \in \left]-1, 1\right[\setminus \{0\}$, on a

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant -\frac{\ln(1-|x|)}{|x|}.$$

Exercice 2 : Études de variations

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0, \quad f(x) := \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}.$$

Étudier la monotonie de f.

2. (a) Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

(b) En déduire la limite de la suite de terme général

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Exponentielle

Logarithme et exponentielle en base a

Exercice 3 : Équations, inéquations, inégalités

1. Résoudre, avec $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$$\log_a x > \log_{a^3}(3x-2).$$

2. Résoudre

$$\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{50}{7} \\ xy = 256. \end{cases}$$

Fonction puissance

Calcul de limite

Exercice 4 : Calcul de limite en $\pm\infty$

Déterminer les limites, si elles existent, en $+\infty$ des fonctions d'expressions

$$\textbf{a.}\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x}, \qquad \textbf{b.}\ \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x}, \qquad \textbf{c.}\ \frac{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x},$$

$$\textbf{d.}\ \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}, \qquad \textbf{e.}\ \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}, \qquad \textbf{f.}\ \frac{e^{2x} \ln^3 x}{x^4},$$

$$\textbf{g.}\ \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}} \quad \text{où } 1 < a < b, \qquad \textbf{h.}\ \frac{a^{(a^x)}}{x^{(x^a)}} \quad \text{où } a > 1.$$

Déterminer la limite, si elle existe, en $-\infty$ de

$$\textbf{i.}\ x^2 e^x \ln^3(-x).$$

Exercice 5 : Calcul de limite en 0

Déterminer les limites, si elles existent, en 0 des fonctions d'expressions

$$\textbf{a. } \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, \qquad \textbf{b. } x^x, \qquad \textbf{c. } |\ln x|^x,$$

$$\textbf{d. } x^2\ln^3(x^3), \qquad \textbf{e. } \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}.$$

5.5.2 Fonctions trigonométriques directes et réciproques

Fonctions trigonométriques directes

Exercice 6 : Calcul de limite en 0

Déterminer les limites, si elles existent, en 0 des fonctions d'expressions

$$\textbf{a. } \frac{\ln(1+\sin x)}{x}, \qquad \textbf{b. } (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}, \qquad \textbf{c. } \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}.$$

Fonction Arcsin

Exercice 7 : Identité

Soit f la fonction définie par

$$f(x) := -\frac{x}{2} + \operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Exprimer $f(x+2\pi)$ à l'aide de $f(x)$. Quelle conséquence peut-on en déduire sur le graphe et l'étude de f ?
3. (a) Calculer la dérivée de f à l'aide des théorèmes usuels.
   (b) Montrer que f' est constante par morceaux, puis simplifier $f(x)$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
4. Retrouver ce résultat directement, sans dériver.
5. Tracer le graphe de f.

Fonction Arccos

Exercice 8 : Étude de fonction

On considère la fonction f définie par

$$f(x) := \operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} - \operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et de continuité de f.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ en fonction de $f(x)$. Sur quel intervalle I suffit-il de faire l'étude de f ?
3. Étudier la dérivabilité de f sur I et calculer f'.
4. Tracer le graphe de f sur $[-\pi, \pi]$.

Fonction Arctan

Exercice 9 : Simplification

Simplifier les expressions suivantes

$$\textbf{a. } \operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right), \qquad \textbf{b. } \operatorname{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

$$\textbf{c. } \operatorname{Arccos}(\cos 4\pi), \qquad \textbf{d. } \operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\textbf{e. } \tan(\operatorname{Arcsin} x), \qquad \textbf{f. } \sin(\operatorname{Arccos} x), \qquad \textbf{g. } \cos(\operatorname{Arctan} x).$$

Exercice 10 : Étude de fonction

Étudier la fonction définie par

$$f(x) \coloneqq x^2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{1+x^2}.$$

Formules de trigonométrie réciproque

Exercice 11 : Identités

A-t-on égalité entre les expressions suivantes ? Si ce n'est pas le cas, trouver la relation entre les deux expressions.

$$\textbf{a.}\ \operatorname{Arcsin} \sqrt{x} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}(2x-1),$$

$$\textbf{b.}\ \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-xy} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y,$$

$$\textbf{c.}\ \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} \sqrt{1-x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2},$$

$$\textbf{d.}\ 2 \operatorname{Arcsin} x \quad \text{et} \quad \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

Exercice 12 : Équations

Résoudre les équations suivantes

$$\textbf{a.}\ \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2}, \qquad \textbf{b.}\ \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(2x) = \frac{\pi}{4},$$

$$\textbf{c.}\ \operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{2}x\right).$$

5.5.3 Fonctions trigonométriques hyperboliques

Exercice 13 : Simplification

Simplifier les expressions suivantes

$$\textbf{a.}\ \frac{\operatorname{ch}(\ln x) + \operatorname{sh}(\ln x)}{x}, \qquad \textbf{b.}\ \operatorname{sh}^2 x \cos^2 y + \operatorname{ch}^2 x \sin^2 y,$$

$$\textbf{c.}\ \ln \sqrt{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}.$$

Exercice 14 : Identité

Montrer que

$$\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x) - \operatorname{Arctan}\left(\operatorname{th} \frac{x}{2}\right)$$

est une constante à déterminer.

Exercice 15 : Calcul de somme

Soit a et b deux réels. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kb).$$

Exercice 16 : Produit

1. Déterminer la limite, lorsque x tend vers 0, de

$$\frac{\operatorname{th} x}{x}.$$

2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}.$$

3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2^k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{\operatorname{th} x}.$$

Exercice 17 : Équation hyperbolique

1. Calculer
$$\operatorname{sh}\left(\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}\left(\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$
2. En déduire les solutions de l'équation $\operatorname{ch} x - \sqrt{5}\operatorname{sh} x = 2\operatorname{sh}(3x)$.

Chapitre 6

Équations différentielles

« J'entends et j'oublie. Je vois et je me souviens. Je fais et je comprends. »

— Confucius (551–479 AV J.C.)

6.1 Équation différentielle linéaire du premier ordre . . . 31
- 6.1.1 Équation différentielle homogène . . . 32
- 6.1.2 Équation différentielle avec second membre . . . 32
- 6.1.3 Problème de Cauchy . . . 33
- 6.1.4 Équation différentielle non résolue . . . 34

6.2 Équation différentielle linéaire du second ordre . . . 34
- 6.2.1 Équation différentielle homogène . . . 35
- 6.2.2 Équation différentielle avec second membre . . . 36
- 6.2.3 Problème de Cauchy . . . 36

6.3 Qcm . . . 38
- 6.3.1 Équation différentielle linéaire du premier ordre . . . 38
- 6.3.2 Équation différentielle linéaire du second ordre . . . 38

6.4 Exercices . . . 40
- 6.4.1 Équation différentielle linéaire du premier ordre . . . 40
- 6.4.2 Équation différentielle linéaire du second ordre . . . 41

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1 Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition 6.1.1

Soit $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I. On appelle solution sur I de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $ay' + by = c$, toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$, dérivable sur I, telle que

$$\forall t \in I, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t).$$

On dit que l'équation est *résolue* lorsque a ne s'annule pas et qu'elle est *homogène* lorsque la fonction c est nulle.

Remarque

⇨ Lorsque l'équation est résolue, on peut l'écrire sous la forme

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = F(y(t), t)$$

où F est une fonction de $\mathbb{K} \times I$ dans $\mathbb{K}$.

6.1.1 Équation différentielle homogène

Proposition 6.1.2

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. Si A est une primitive de a sur I, les solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

sont les fonctions

$$y_\lambda : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarques

- Dans cette démonstration, le terme $\mathrm{e}^{A(t)}$ par lequel on multiplie l'équation différentielle afin de faire apparaître la dérivée d'un produit est appelé *facteur intégrant*.
- Si y est une solution non nulle de l'équation différentielle homogène $y'(t) + a(t)y(t) = 0$, elle ne s'annule pas.

Exercices 1

- Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) + ay(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
- Résoudre l'équation différentielle $(1 + t^2)y'(t) + ty(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x)f(y).$$

6.1.2 Équation différentielle avec second membre

Proposition 6.1.3: Théorème de superposition

Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions définies sur un intervalle I. Si y_p est une solution « particulière » de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

alors, les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $y_p + y$ où y parcourt l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0.$$

Remarques

- Soit a et $b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues. On souhaite trouver une solution particulière à l'équation différentielle

$$(E) \qquad \forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

  La section précédente nous a permis de trouver une solution y_0 ne s'annulant pas à l'équation différentielle homogène associée $y'(t) + a(t)y(t) = 0$. On va chercher une solution de (E) sous la forme $y(t) \coloneqq \lambda(t)y_0(t)$ où $\lambda : I \to \mathbb{K}$ est une fonction dérivable. On se donne donc une fonction dérivable $\lambda : I \to \mathbb{K}$ et on pose $y \coloneqq \lambda y_0$. Alors y est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = \lambda'(t)y_0(t) + \lambda(t)y_0'(t).$$

  En injectant cette expression dans (E), on en déduit que y est solution de (E) si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad \lambda'(t) = \frac{b(t)}{y_0(t)}.$$

  En particulier, si λ est une primitive de b/y_0, y est une solution « particulière » de (E).
- La méthode précédente, appelée « *méthode de la variation de la constante* », se généralise à toute équation différentielle *linéaire*. Si y_0 est une solution ne s'annulant pas de l'équation différentielle homogène associée, le changement de fonction $y = \lambda y_0$ permet de ramener la résolution de l'équation différentielle initiale à la résolution d'une équation différentielle linéaire en λ' d'ordre strictement inférieur.
- Remarquons enfin que la technique consistant à multiplier l'équation différentielle par le facteur intégrant permet de résoudre les équations différentielles avec second membre de la même manière que les équations différentielles homogènes.

Exercices 2

⇨ Résoudre l'équation différentielle
$$\forall t > 0, \quad y'(t) - \frac{y(t)}{t} = te^t.$$

⇨ Résoudre l'équation différentielle $(t^2 \ln t)y'(t) - ty(t) = -(1 + \ln t)$ sur $]0, 1[$.

6.1.3 Problème de Cauchy

Définition 6.1.4: Problème de Cauchy

Soit $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. On appelle *problème de Cauchy* la recherche des solutions y de l'équation différentielle du premier ordre
$$\forall t \in I, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$
telles que $y(t_0) = y_0$.

Remarque

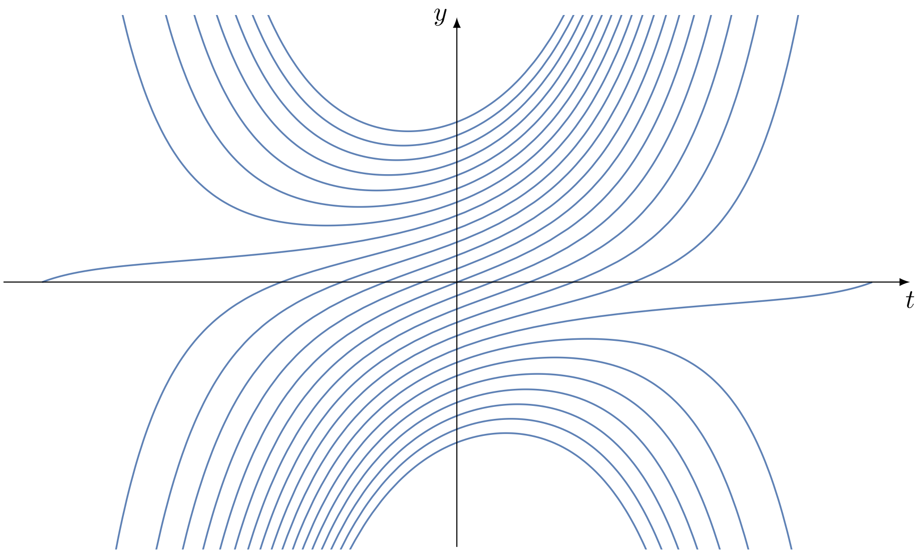
⇨ La condition $y(t_0) = y_0$ est appelée *condition initiale*.

Théorème 6.1.5: Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur un intervalle I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors, il existe une et une seule solution à l'équation différentielle résolue du premier ordre
$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$
telle que $y(t_0) = y_0$.

Remarques

⇨ Graphiquement, cette proposition signifie que par tout point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ passe un et un seul graphe (appelé courbe intégrale) de solution de l'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$. En particulier, les courbes intégrales ne se croisent pas. Par exemple, voici quelques solutions de l'équation différentielle
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = ty(t) + 1.$$



⇨ Le théorème de Cauchy-Lipschitz prouve que la connaissance à l'instant t_0 d'un système régi par une équation différentielle résolue du premier ordre permet de connaitre complètement son passé et son futur.

Exercices 3

⇨ Résoudre sur $]0, +\infty[$ le problème de Cauchy
$$y(1) = 1 \quad \text{et} \quad y'(t) + \frac{y(t)}{t} = t.$$
Tracer le graphe de la solution.

⇨ Montrer que les solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + t\,\mathrm{Arctan}(t^4+1)y(t) = \mathrm{sh}\,t$$

sont toutes paires.

6.1.4 Équation différentielle non résolue

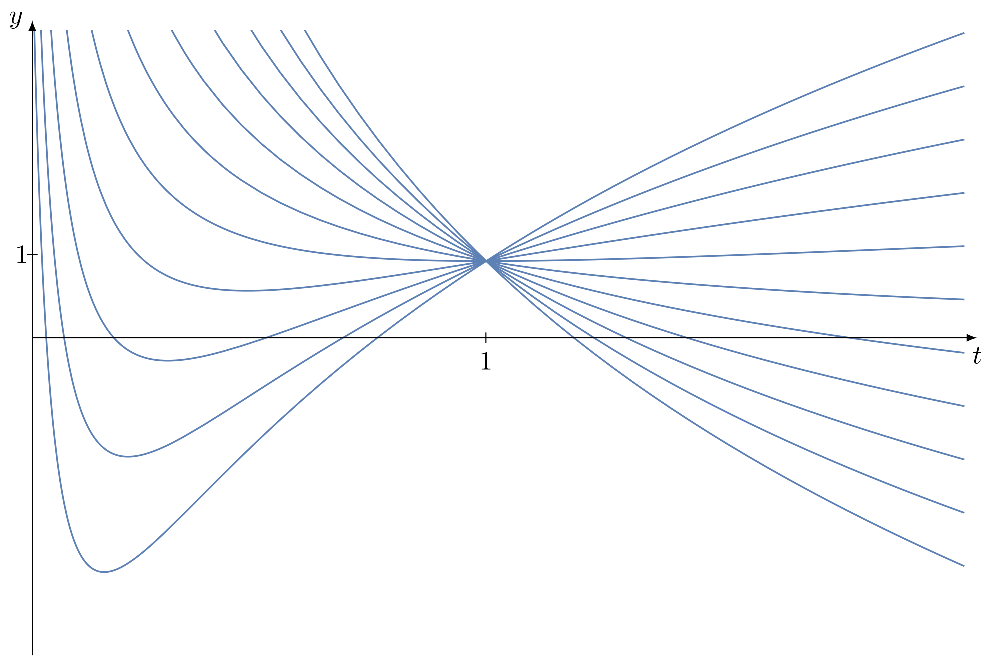
Exercice 4

⇨ Résoudre l'équation différentielle $(t^2 \ln t)y'(t) - ty(t) = -(1+\ln t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque

⇨ Pour les équations différentielles non résolues du premier ordre, contrairement à ce qui se passe pour les équations résolues, il est possible qu'un problème de Cauchy admette plusieurs solutions ou aucune. Voici par exemple plusieurs solutions au problème de Cauchy

$$y(1) = 1, \quad \text{et} \quad \forall t > 0, \quad (t^2 \ln t)y'(t) - ty(t) = -(1+\ln t).$$



On peut aussi remarquer que pour $y_0 \neq 1$, il n'existe aucune solution de cette équation différentielle vérifiant $y(1) = y_0$.

6.2 Équation différentielle linéaire du second ordre

Définition 6.2.1

Soit $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I. On appelle solution sur I de l'équation différentielle linéaire du second ordre $ay'' + by' + cy = d$, toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$, dérivable deux fois sur I, telle que

$$\forall t \in I, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t).$$

On dit que l'équation est *résolue* lorsque a ne s'annule pas et qu'elle est *homogène* lorsque la fonction d est nulle.

6.2.1 Équation différentielle homogène

Proposition 6.2.2

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$.

— Si cette équation possède deux racines distinctes r_1 et r_2 ($\Delta \neq 0$), alors les solutions complexes de (E) sont les fonctions

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

— Si cette équation admet une racine double r ($\Delta = 0$), alors les solutions complexes de (E) sont les fonctions

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & (\lambda t + \mu)\, e^{rt} \end{array}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Exercice 5

⇨ Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Proposition 6.2.3

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$.

— Si cette équation possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 ($\Delta > 0$), alors les solutions réelles de (E) sont les fonctions

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

— Si cette équation admet une racine double r ($\Delta = 0$), alors les solutions réelles de (E) sont les fonctions

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\lambda t + \mu)\, e^{rt} \end{array}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

— Si cette équation admet deux racines complexes conjuguées $r + i\omega$ et $r - i\omega$ ($\Delta < 0$), alors les solutions réelles de (E) sont les fonctions

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & [\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)]\, e^{rt} \end{array}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Remarque

⇨ Dans le cas où l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées, les solutions de (E) peuvent s'écrire sous la forme

$$y_{\lambda,\varphi} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \sin(\omega t - \varphi)\, e^{rt} \end{array}$$

où $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$. Lors de la recherche effective de tels coefficients, quitte à changer φ en $\varphi + \pi$, on impose souvent $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Exercices 6

⇨ Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$.

⇨ Soit $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega_0^2 y = 0$.

⇨ En effectuant le changement de fonction inconnue $z(t) = t^2 y(t)$, résoudre l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad t^2 y''(t) + 4ty'(t) + (2 - t^2)y(t) = 0.$$

⇨ En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{u}$, résoudre l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad ty''(t) - y'(t) + 4t^3 y(t) = 0.$$

6.2.2 Équation différentielle avec second membre

Proposition 6.2.4: Théorème de superposition

Soit $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I. Si y_p est une solution « particulière » de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t)$$

alors les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $y_p + y$ où y parcourt l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0.$$

Proposition 6.2.5: Théorème de superposition

— Soit $a, b, c, d_1, d_2 : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $y_{p_1}, y_{p_2} : I \to \mathbb{K}$ des solutions « particulières » des équations différentielles respectives $ay'' + by' + cy = d_1$ et $ay'' + by' + cy = d_2$. Alors $\lambda y_{p_1} + \mu y_{p_2}$ est une solution « particulière » de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t).$$

— Soit $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{C}$ des fonctions définies sur un intervalle I et $y_p : I \to \mathbb{C}$ une solution « particulière » de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d$. Alors $\mathrm{Re}(y_p)$ est une solution « particulière » de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = \mathrm{Re}(d(t)).$$

Remarque

⇨ Bien entendu, une proposition similaire existe pour la partie imaginaire.

Proposition 6.2.6

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Si P est un polynôme de degré n et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$$

admet comme solution une (unique) fonction du type $t \mapsto t^m Q(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$ où Q est un polynôme de degré n et m est l'ordre de α comme racine de l'équation caractéristique (avec par convention $m = 0$ si α n'est pas racine de cette équation).

Exercices 7

⇨ Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y''(t) + y'(t) + y(t) = t^2$.

⇨ Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y''(t) + y(t) = t \cos t$.

6.2.3 Problème de Cauchy

Définition 6.2.7: Problème de Cauchy

Soit $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I, $t_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$. On appelle *problème de Cauchy* la recherche des solutions y de l'équation différentielle du second ordre

$$\forall t \in I, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t)$$

telles que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$.

Théorème 6.2.8: Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues sur un intervalle I, $t_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$. Alors il existe une et une seule solution à l'équation différentielle résolue du second ordre

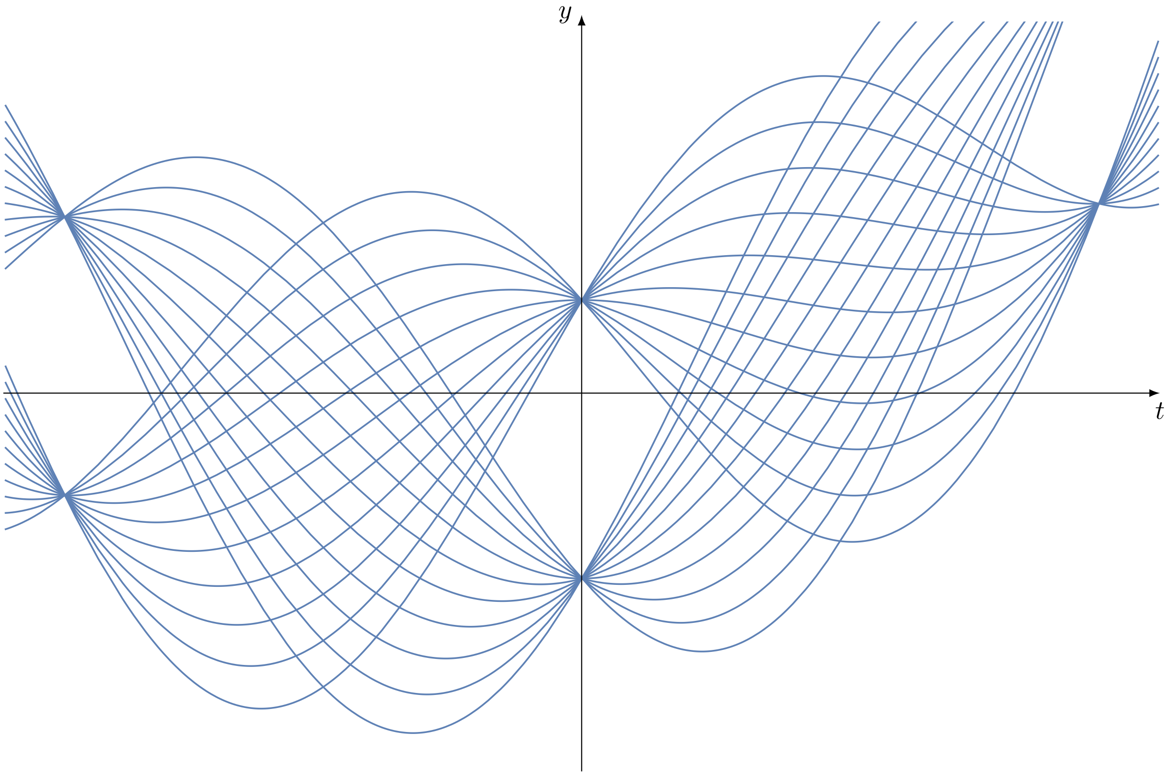
$$\forall t \in I, \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$.

Remarques

⇨ Graphiquement, cette proposition signifie que par tout point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ passe un et un seul graphe de pente $y_1 \in \mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$. Les courbes intégrales peuvent se croiser, mais doivent avoir des pentes différentes lorsqu'elles se croisent. Par exemple, voici quelques solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + y(t) = \frac{1}{2}t^2 + t.$$



⇨ Le théorème de Cauchy-Lipschitz prouve que la connaissance de la valeur de y et de sa dérivée à l'instant t_0 d'un système régi par une équation différentielle résolue du second ordre permet de connaitre complètement son passé et son futur.

Exercice 8

⇨ Résoudre le problème de Cauchy

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + y(t) = \frac{1}{2}t^2 + t.$$

6.3 Qcm

6.3.1 Équation différentielle linéaire du premier ordre

Équation différentielle homogène

1. Quelle est la solution générale de l'équation différentielle $y' + \sin(2x)y = 0$?

   ☐ **a.** $x \mapsto C\cos(2x)$ ☐ **b.** $x \mapsto C\exp\left(-\cos(2x)/2\right)$
   ☐ **c.** $x \mapsto C\exp\left(-x\sin(2x)\right)$ ☐ **d.** $x \mapsto C\exp\left(\cos(2x)/2\right)$

2. Pour quelles valeurs de $q \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation $y' + qy = 0$ tendent-elles toutes vers 0 en $+\infty$?

   ☐ **a.** pour $q < 0$ ☐ **b.** pour $q \leqslant 0$ ☐ **c.** pour $q > 0$ ☐ **d.** pour aucune valeur de q

3. Les fonctions $x \mapsto \frac{c}{1+x^2}$, pour c réel, sont les solutions de l'équation différentielle

   ☐ **a.** $\left(1+x^2\right)y' + 2xy = 0$ ☐ **b.** $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = 0$ ☐ **c.** $y' + \operatorname{Arctan}(x)y = 0$ ☐ **d.** $y' + 2xy = 0$

Équation différentielle avec second membre

1. En appliquant la méthode de variation de la constante, sur $]0, +\infty[$, pour l'équation $xy' + y = x\sin x$, on cherche y sous la forme

   ☐ **a.** $c(x)\mathrm{e}^{-2x}$ ☐ **b.** $c(x)x$ ☐ **c.** $\dfrac{c(x)}{x}$ ☐ **d.** $c(x)\sin x$

2. En appliquant à l'équation $y' = y + g(x)$ la méthode de la variation de la constante, on cherche y sous la forme

   ☐ **a.** $\mathrm{e}^{c(x)}$ ☐ **b.** $c(x)\mathrm{e}^{x}$ ☐ **c.** $c(x)g(x)$ ☐ **d.** $c(x)\exp\left(G(x)\right)$ où G est une primitive de g

3. Pour trouver une solution particulière de l'équation $y' + 2xy = x$ par la méthode de la variation de la constante, on est ramené à déterminer une primitive de

   ☐ **a.** $\dfrac{1}{2}$ ☐ **b.** $2x^2$ ☐ **c.** $x\mathrm{e}^{-x^2}$ ☐ **d.** $x\mathrm{e}^{x^2}$

Problème de Cauchy

1. Quelle est la solution de l'équation $y' + 2y = 0$ qui s'annule en 1 ?

   ☐ **a.** $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ ☐ **b.** $x \mapsto \mathrm{e}^{-2(x-1)}$ ☐ **c.** $x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^{-2x}$ ☐ **d.** $x \mapsto 0$

2. Combien y a-t-il de solutions de l'équation $y' + 2\operatorname{ch}(x)y = \mathrm{e}^x$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$?

   ☐ **a.** 0 ☐ **b.** 1 ☐ **c.** 2 ☐ **d.** une infinité

3. Soit $x \mapsto a(x)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Une solution non nulle de l'équation $y' = a(x)y$ ne peut pas

   ☐ **a.** être paire ☐ **b.** tendre vers 0 en $+\infty$ ☐ **c.** s'annuler ☐ **d.** être bornée

Équation différentielle non résolue

6.3.2 Équation différentielle linéaire du second ordre

Équation différentielle homogène

1. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$?

   ☐ **a.** $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x}$ ☐ **b.** $x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x}$
   ☐ **c.** $x \mapsto (Ax+B)\mathrm{e}^{-2x}$ ☐ **d.** $x \mapsto A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{2x}$

2. De quelle équation différentielle la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x}$ est-elle solution ?

   ☐ **a.** $y'' - 2y' - 3y = 0$ ☐ **b.** $y'' - 5y' + 6y = 0$ ☐ **c.** $y'' + 2y' + 3y = 0$ ☐ **d.** $y'' + 2y' - y = 0$

3. Quelle fonction n'est pas solution de l'équation $y'' - y = 0$?

   ☐ **a.** $x \mapsto \operatorname{ch} x$ ☐ **b.** $x \mapsto \operatorname{sh} x$ ☐ **c.** $x \mapsto e^x$ ☐ **d.** $x \mapsto \sin x$

4. Les fonctions $x \mapsto Ce^{2x}$, pour C réel, sont les solutions de l'équation différentielle

   ☐ **a.** $y' = 2y$ ☐ **b.** $y' = 2Cy$ ☐ **c.** $y'' - 3y' + 2y = 0$ ☐ **d.** $y' = -2y$

5. Les solutions de l'équation $y'' + ay = 0$ sont toutes bornées si et seulement si

   ☐ **a.** $a > 0$ ☐ **b.** $a \geqslant 0$ ☐ **c.** $a \leqslant 0$ ☐ **d.** $a < 0$

Équation différentielle avec second membre

1. Pour trouver une solution particulière de l'équation $y' + 2y = 5 \sin x$

   ☐ **a.** vous la cherchez sous la forme $A \sin x$
   ☐ **b.** vous la cherchez sous la forme $A \cos x$
   ☐ **c.** vous la cherchez sous la forme $A \sin x + B \cos x$
   ☐ **d.** vous utilisez la méthode de variation de la constante

2. Laquelle des équations suivantes admet une solution particulière polynomiale ?

   ☐ **a.** $y'' + x^2 y = x$ ☐ **b.** $y'' + y' + y = e^x$ ☐ **c.** $y'' + y = x^2$ ☐ **d.** $y'' + 2y' + y = x \sin x$

Problème de Cauchy

1. Combien y a-t-il de solutions de l'équation $y'' + 2y' + y = \operatorname{ch} x$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$?

   ☐ **a.** 0 ☐ **b.** 1 ☐ **c.** 2 ☐ **d.** une infinité

2. Quelle équation différentielle n'admet pas de solution y vérifiant $y(0) = 0$ et $y(2\pi) = 1$?

   ☐ **a.** $y'' - y = 0$ ☐ **b.** $y'' + y = 0$ ☐ **c.** $y'' - 2\pi y = 0$

   ☐ **d.** aucune, car toutes les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants admettent une solution vérifiant ces conditions initiales

3. Laquelle des conditions suivantes est suffisante pour affirmer que la solution f de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est identiquement nulle ?

   ☐ **a.** f admet une infinité de zéros ☐ **b.** f et f' ont un zéro commun
   ☐ **c.** $ff' = 0$ ☐ **d.** f' admet une infinité de zéros

6.4 Exercices

6.4.1 Équation différentielle linéaire du premier ordre

Équation différentielle avec second membre

Exercice 1 : Calcul

Résoudre les équations différentielles suivantes sur un intervalle à préciser

$$\textbf{a. } y' + 2y = x^2 - 2x + 3, \qquad \textbf{b. } (1+x)\,y' + y = 1 + \ln(1+x),$$
$$\textbf{c. } y' + y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Exercice 2 : Avec un second membre

Déterminer les fonctions dérivables $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = \int_0^1 y(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3 : Équations fonctionnelles

1. Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + f(x)\mathrm{e}^y.$$
2. Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(0) \neq 0$ et
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f'(y) + f'(x)f(y).$$

Problème de Cauchy

Équation différentielle non résolue

Exercice 4 : Une équation différentielle avec peu de solutions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (E) l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad |t|\,y'(t) + (t-1)\,y(t) = 0.$$

1. Résoudre cette équation pour $I = \mathbb{R}_+^*$ puis $I = \mathbb{R}_-^*$.
2. En déduire les solutions de cette équation différentielle lorsque $I = \mathbb{R}$.
3. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ a-t-il toujours au moins une solution ? Si oui, est-elle unique ?

Exercice 5 : Une équation différentielle avec beaucoup de solutions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (E) l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad ty'(t) - (t+2)\,y(t) = 0.$$

1. Résoudre cette équation pour $I = \mathbb{R}_+^*$ puis $I = \mathbb{R}_-^*$.
2. En déduire les solutions de cette équation différentielle lorsque $I = \mathbb{R}$.
3. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ a-t-il toujours au moins une solution ? Si oui, est-elle unique ?

Exercice 6 : Discontinuité des coefficients de l'équation

Soit H la fonction de Heaviside définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad H(t) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + H(t)y(t) = 0.$$

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Les problèmes de Cauchy associés à cette équation ont-ils toujours une unique solution ?

6.4.2 Équation différentielle linéaire du second ordre

Équation différentielle homogène

Exercice 7 : Équation d'Euler

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad t^2y'' - ty' + y = 0.$$

1. Dans cette question, on souhaite résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) On se donne une fonction $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dérivable deux fois et on définit la fonction $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
   $$\forall u \in \mathbb{R}, \quad z(u) := y(\mathrm{e}^u).$$
   Montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants que l'on précisera.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Enfin, déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Plus généralement, on appelle équation d'Euler toute équation différentielle de la forme

$$at^2y''(t) + bty'(t) + cy(t) = 0.$$

Leur résolution se ramène à la résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants après le même changement de variable que ci-dessus.

Exercice 8 : Changement de variable

1. En posant $x := \tan t$, résoudre l'équation différentielle
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)^2y''(x) + 2x(1+x^2)y'(x) + 4y(x) = 0.$$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. En posant $x := \operatorname{sh} t$, résoudre l'équation différentielle
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)y''(x) + xy'(x) - \alpha^2y(x) = 0.$$

Exercice 9 : Équations fonctionnelles

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(\lambda - x).$$
2. Trouver toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que
   $$\forall x > 0, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$
   On utilisera les résultats sur l'équation d'Euler

Exercice 10 : Utilisation du plan de phase

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

où ω dépend de la masse, de la charge de la particule et du champ magnétique. En considérant $u = x' + \mathrm{i}y'$, résoudre ce système différentiel.

Équation différentielle avec second membre

Exercice 11 : Calcul

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$

$$\textbf{a. } y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2, \qquad \textbf{b. } y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x},$$
$$\textbf{c. } y'' - 4y' + 4y = x\cosh(2x), \qquad \textbf{d. } y'' + y = \sin^3 x.$$

Exercice 12 : Recollement

Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = \mathrm{e}^{-|x|}.$$

Problème de Cauchy

Exercice 13 : Calcul

Déterminer l'unique solution y sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = 3x^2$$

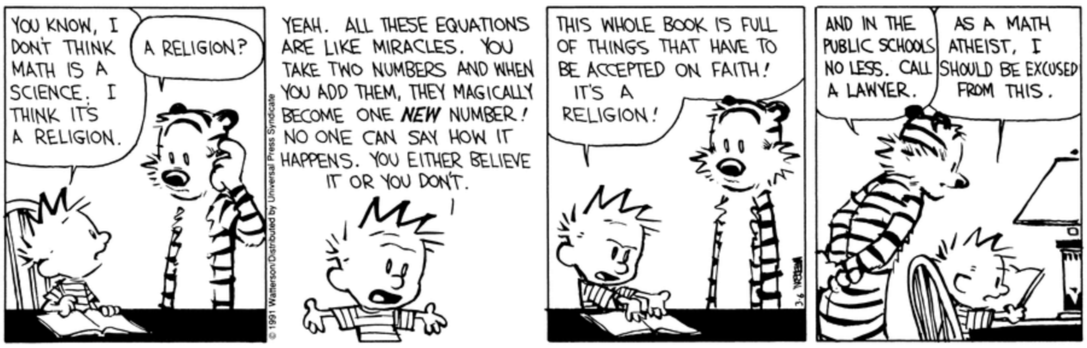
telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Chapitre 7

Espaces vectoriels

« Vector is a useless survival, or offshoot from quaternions, and has never been of the slightest use to any creature. »

— Lord Kelvin (1824–1907)



7.1 Espace vectoriel, application linéaire 44

7.1.1 Définition, propriétés élémentaires 44

7.1.2 Sous-espace vectoriel 46

7.1.3 Application linéaire 47

7.2 L'algèbre $\mathcal{L}(E)$ 49

7.2.1 $\mathcal{L}(E,F)$ 49

7.2.2 Le groupe linéaire 50

7.3 Somme, somme directe, projecteur, hyperplan 50

7.3.1 Somme, somme directe 50

7.3.2 Projecteur 51

7.3.3 Symétrie 52

7.3.4 Hyperplan 53

7.4 Qcm 54

7.4.1 Espace vectoriel, application linéaire 54

7.4.2 L'algèbre $\mathcal{L}(E)$ 54

7.4.3 Somme, somme directe, projecteur, hyperplan 55

7.5 Exercices 56

7.5.1 Espace vectoriel, application linéaire 56

7.5.2 L'algèbre $\mathcal{L}(E)$ 57

7.5.3 Somme, somme directe, projecteur, hyperplan 57

7.1 Espace vectoriel, application linéaire

7.1.1 Définition, propriétés élémentaires

Définition 7.1.1

Soit E un ensemble. On dit qu'une *loi* notée additivement

$$\begin{array}{rccc} + : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

fait de $(E,+)$ un groupe commutatif lorsque :

— Elle est *associative*
$$\forall x,y,z \in E, \quad (x+y)+z = x+(y+z).$$
— Elle est *commutative*
$$\forall x,y \in E, \quad x+y = y+x.$$
— Elle admet un *élément neutre*
$$\exists e \in E, \quad \forall x \in E, \quad x+e = e+x = x.$$
Un tel élément est unique ; on le note 0_E.

— Tout élément $x \in E$ admet un *opposé*
$$\exists y \in E, \quad x+y = y+x = 0_E.$$
Un tel élément est unique ; on le note $-x$.

Remarques

⇨ Si $x_1, x_2, x_3 \in E$, l'associativité de la loi $+$ affirme que $(x_1+x_2)+x_3 = x_1+(x_2+x_3)$; on note $x_1+x_2+x_3$ cette valeur commune. Plus généralement, si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, la valeur de $x_1+x_2+\cdots+x_n$ ne dépend pas de l'ordre dans lesquelles sont effectuées les additions. Cela justifie l'usage de cette notation n'utilisant pas de parenthèses.

⇨ Si $(E,+)$ est un groupe commutatif et $x,y \in E$, l'élément $x+(-y)$ est aussi noté $x-y$. De plus
$$\forall x,y,z \in E, \quad x+y = z \quad \Longleftrightarrow \quad x = z-y.$$

⇨ Les éléments de E sont *réguliers*. Autrement dit
$$\forall x,y,z \in E, \quad x+y = x+z \quad \Longrightarrow \quad y = z.$$

En première lecture, on pourra considérer que dans la suite de ce cours, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Cependant, excepté quelques résultats sur les symétries qui ne sont pas valables dans un corps de caractéristique 2, ce cours reste valide si $\mathbb{K}$ est un corps quelconque, notion dont nous donnerons la définition plus tard dans l'année.

Définition 7.1.2

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $(E,+)$ un groupe commutatif d'élément neutre 0_E et $\cdot$ une loi de composition externe.

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ & (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$$

On dit que $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* lorsque

$$\begin{array}{rl} \forall x,y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, & \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \\ \forall x \in E, \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, & (\lambda+\mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \\ \forall x \in E, \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, & \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x \\ \forall x \in E, & 1 \cdot x = x. \end{array}$$

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*, ceux de E, *vecteurs*.

Proposition 7.1.3

$$\begin{aligned} &\forall x \in E, && 0 \cdot x = 0_E \\ &\forall \lambda \in \mathbb{K}, && \lambda \cdot 0_E = 0_E \\ \forall x \in E, \quad &\forall \lambda \in \mathbb{K}, && (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x) \end{aligned}$$

Remarque

⇨ En particulier, si $x \in E$, $(-1) \cdot x = -x$.

Proposition 7.1.4

$$\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot x = 0_E \quad \Longrightarrow \quad [\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0_E].$$

Définition 7.1.5

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $E := \mathbb{K}^n$

- la loi de composition interne $+$ par

$$\forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n,$$

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

- la loi de composition externe $\cdot$ par

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Alors $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'élément neutre $(0, \ldots, 0)$.

Remarques

⇨ En particulier, $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

⇨ $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 7.1.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X un ensemble. On définit sur $\mathcal{F}(X, E)$

- la loi de composition interne $+$ par

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(X, E), \quad \forall x \in X, \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x).$$

- la loi de composition externe $\cdot$ par

$$\forall f \in \mathcal{F}(X, E), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x).$$

Alors $(\mathcal{F}(X, E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont l'élément neutre est l'application de X dans E qui à tout $x \in X$ associe 0_E. En particulier, $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque

⇨ En particulier, si X est un ensemble, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont le « zéro » est la fonction nulle. Ainsi, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont le « zéro » est la fonction nulle. De même, l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont le « zéro » est la suite nulle.

Définition 7.1.7

Soit $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit sur $E \times F$

- la loi de composition interne $+$ par

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times F, \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

- la loi de composition externe $\cdot$ par

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (x, y) := (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y).$$

Alors $(E \times F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'élément neutre $(0_E, 0_F)$.

Dans la suite du cours, l'élément 0_E sera désormais noté 0. Cependant, il sera toujours important de se demander si un 0 est le zéro de $\mathbb{K}$ ou celui de E. Dans le second cas, on se demandera quelle est la nature de ce zéro : est-ce un un scalaire, un n-uplet, une suite, une fonction ?

7.1.2 Sous-espace vectoriel

Définition 7.1.8

On dit qu'une partie F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un *sous-espace vectoriel* de E lorsque
- $0 \in F$
- F est stable par *combinaisons linéaires*

$$\forall x, y \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + \mu y \in F.$$

Si tel est le cas, $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarques

⇨ Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors

$$\begin{aligned} \forall x \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad &\lambda x \in F, \\ \forall x, y \in F, \qquad &x + y \in F. \end{aligned}$$

⇨ Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\{0\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé sous-espace vectoriel *trivial*. De même, E est un sous-espace vectoriel de E.

⇨ Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Alors

$$F \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Par exemple, l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x + 2y - z = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1

⇨ Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + \mathrm{e}^{-t^2} y(t) = 0$$

est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 7.1.9

Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Remarques

⇨ Contrairement à l'intersection, l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

⇨ Soit $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant q, 1 \leqslant j \leqslant p}$ une famille de scalaires. Alors

$$F = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p \mid \forall i \in [\![1, q]\!], \quad a_{i,1} x_1 + \cdots + a_{i,p} x_p = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. Par exemple, l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} x + y \phantom{{}+{}} + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Définition 7.1.10

Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, au sens de l'inclusion, il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A. On l'appelle *sous-espace vectoriel engendré* par A et on le note $\mathrm{Vect}(A)$.

Remarques

⇨ Si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $A \subset F$, alors $\mathrm{Vect}(A) \subset F$.

⇨ Si $A \coloneqq \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors $\mathrm{Vect}(A)$ est aussi noté $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

Proposition 7.1.11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, \ldots, x_n \in E$. Alors

$$\operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

Les éléments de $\operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ sont appelés *combinaisons linéaires* de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$.

Remarque

⇨ Soit $x \in E$. Alors

$$\operatorname{Vect}(x) = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Cet ensemble est aussi noté $\mathbb{K}x$.

Exercice 2

⇨ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$A \coloneqq \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 0\}.$$

Montrer que $\operatorname{Vect}(A) = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Définition 7.1.12

On dit que deux éléments $x, y \in E$ sont *colinéaires* lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$.

Remarques

⇨ Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

⇨ Il est possible que x et $y \in E$ soient colinéaires sans qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$. Cependant, si x et y sont colinéaires et $x \neq 0$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$.

Définition 7.1.13

On dit qu'un espace vectoriel E est une *droite vectorielle* lorsqu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = \mathbb{K}x$.

Remarque

⇨ Si E est une droite vectorielle, quel que soit $x \in E \setminus \{0\}$, $E = \mathbb{K}x$.

7.1.3 Application linéaire

Définition 7.1.14

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit qu'une application f de E dans F est une *application linéaire* lorsque

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Plus précisément, on dit que f est un

— *endomorphisme* lorsque $E = F$.
— *isomorphisme* lorsque f est bijective.
— *automorphisme* lorsque f est un endomorphisme et un isomorphisme.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Remarques

⇨ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \qquad & f(x+y) = f(x) + f(y), \\ \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad & f(\lambda x) = \lambda f(x). \end{aligned}$$

De plus $f(0_E) = 0_F$.

⇨ Soit f un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E. Lorsque F est stable par f, c'est-à-dire lorsque $f(F) \subset F$, la restriction de f à F, corestreinte à F, est un endomorphisme de F appelé endomorphisme *induit* à F.

Définition 7.1.15

On dit qu'une application f de E dans E est une *homothétie* lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \lambda x.$$

Les homothéties de E sont des endomorphismes.

Remarque

⇨ En particulier, Id_E est un endomorphisme de E.

Exercice 3

⇨ Soit E une droite vectorielle. Montrer que les homothéties sont les seuls endomorphismes de E.

Définition 7.1.16

On appelle *forme linéaire* sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est noté $E^\star$ et appelé *dual* de E.

Remarque

⇨ Si $E = \mathbb{K}^n$, alors $\varphi \in E^\star$ si et seulement si il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

Proposition 7.1.17

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
- L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.
- L'image directe par f d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.

Remarque

⇨ Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x_1, \ldots, x_n \in E$, alors

$$u(\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)) = \mathrm{Vect}(u(x_1), \ldots, u(x_n)).$$

Définition 7.1.18

On appelle *noyau* de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et on note $\mathrm{Ker}\, f$ l'ensemble

$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in E \mid f(x) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque

⇨ Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\mathrm{Ker}\,(\lambda f) = \mathrm{Ker}\, f$.

Proposition 7.1.19

Une application linéaire f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

Définition 7.1.20

On appelle image de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et on note $\mathrm{Im}\, f$ l'ensemble

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(x) : x \in E\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de F.

Remarques

⇨ f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = F$.

⇨ Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\mathrm{Im}\,(\lambda f) = \mathrm{Im}\, f$. En particulier $\mathrm{Im}(-f) = \mathrm{Im}\, f$.

Proposition 7.1.21

— La composée de deux applications linéaires est linéaire.
— La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Remarques

⇨ Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f et g *commutent* lorsque $f \circ g = g \circ f$. En général, deux endomorphismes ne commutent pas, comme le montre l'exemple des endomorphismes

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,0) \end{array} \qquad \text{et} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,x) \end{array}$$

⇨ Il est possible que $f \circ g = 0$ sans que $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercices 4

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f \quad \iff \quad \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}.$$

⇨ Soit f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

7.2 L'algèbre $\mathcal{L}(E)$

7.2.1 $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition 7.2.1

$(\mathcal{L}(E,F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 7.2.2

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors

$$\begin{array}{llll} \forall f \in \mathcal{L}(F,G), & \forall g, h \in \mathcal{L}(E,F), & \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, & f \circ (\lambda g + \mu h) = \lambda f \circ g + \mu f \circ h \\ \forall f, g \in \mathcal{L}(F,G), & \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, & \forall h \in \mathcal{L}(E,F), & (\lambda f + \mu g) \circ h = \lambda f \circ h + \mu g \circ h. \end{array}$$

Définition 7.2.3

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.
— $f^0 := \operatorname{Id}_E$
— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{n+1} := f^n \circ f$.

Remarque

⇨ Attention, si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, $f^2(x) = f(f(x))$ et non $f(x)^2$, expression qui n'a d'ailleurs aucun sens.

Proposition 7.2.4

— Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{aligned} f^{m+n} &= f^m \circ f^n \\ (f^m)^n &= f^{mn}. \end{aligned}$$

— Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, f^n et g^m commutent. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (f \circ g)^n = f^n \circ g^n.$$

Exercice 5

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $K_n := \operatorname{Ker} f^n$ et $I_n := \operatorname{Im} f^n$. Montrer que les suites (K_n) et (I_n) sont respectivement croissantes et décroissantes au sens de l'inclusion.

Proposition 7.2.5

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g^k \qquad \text{et} \qquad f^n - g^n = (f-g) \circ \left[\sum_{k=0}^{n-1} f^{(n-1)-k} \circ g^k\right].$$

Exercice 6

⇨ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit $\Delta, T \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) \coloneqq f(x+1) \quad \text{et} \quad \Delta(f)(x) \coloneqq f(x+1) - f(x).$$

Calculer T^k et Δ^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

7.2.2 Le groupe linéaire

Définition 7.2.6

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme si et seulement si il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$u \circ v = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad v \circ u = \mathrm{Id}_E.$$

Si tel est le cas, $v = u^{-1}$. On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Proposition 7.2.7

$\mathrm{GL}(E)$ possède les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned} & \mathrm{Id} \in \mathrm{GL}(E) \\ \forall f, g \in \mathrm{GL}(E), \quad & g \circ f \in \mathrm{GL}(E) \\ \forall f \in \mathrm{GL}(E), \quad & f^{-1} \in \mathrm{GL}(E). \end{aligned}$$

Nous dirons que $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe, que l'on appelle *groupe linéaire*.

7.3 Somme, somme directe, projecteur, hyperplan

7.3.1 Somme, somme directe

Définition 7.3.1

On appelle *somme* de deux sous-espaces vectoriels A et B de E, et on note $A + B$, le plus petit sous-espace vectoriel contenant A et B. On a

$$A + B = \{a + b : a \in A \quad b \in B\}.$$

Remarque

⇨ Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F qui coïncident sur deux sous-espaces vectoriels A et B tels que $A + B = E$, alors $f = g$.

Exercices 7

⇨ Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, montrer que $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

⇨ Soit A, B, C et D des sous-espaces vectoriels de E tels que $A \subset C$, $B \subset D$ et $A + B = C + B$. Montrer que $A + D = C + D$.

Définition 7.3.2

On dit que deux sous-espaces vectoriels A et B de E sont en somme directe lorsque

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad a + b = 0 \quad \Longrightarrow \quad [a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0].$$

Si tel est le cas, la somme $A + B$ est notée $A \oplus B$.

Remarque

⇨ Deux sous-espaces vectoriels A et B de E sont en somme directe si et seulement si, quel que soit $x \in A + B$, l'écriture $x = a + b$ (avec $a \in A$ et $b \in B$) est unique.

Proposition 7.3.3

Deux sous-espaces vectoriels A et B de E sont en somme directe si et seulement si

$$A \cap B = \{0\}.$$

Définition 7.3.4

On dit que deux sous-espaces vectoriels A et B de E sont *supplémentaires* lorsque A et B sont en somme directe et $A + B = E$, c'est-à-dire lorsque

$$A \oplus B = E.$$

Remarques

⇨ Autrement dit, A et B sont supplémentaires lorsque pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(a, b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$.

⇨ Il est important de ne pas confondre « le complémentaire » et « un supplémentaire » d'un sous-espace vectoriel. En particulier, contrairement à un supplémentaire, le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est pas un sous-espace vectoriel car il ne contient pas 0.

⇨ En général un sous-espace vectoriel admet plusieurs supplémentaires.

⇨ On peut démontrer que tout sous-espace vectoriel admet (au moins) un supplémentaire. Nous démontrerons ce point dans un autre chapitre, dans le cas où E est de dimension finie.

Exercice 8

⇨ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f^2 + f$. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Proposition 7.3.5: Version géométrique du théorème du rang

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et A un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. Alors

$$\varphi : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

7.3.2 Projecteur

Définition 7.3.6

Soit A et B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, il existe un unique endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad p(a + b) = a.$$

On l'appelle *projecteur* sur A parallèlement à B

Définition 7.3.7

Si p est le projecteur sur A parallèlement à B, le projecteur q sur B parallèlement à A est appelé projecteur associé à p. On a

$$p + q = \operatorname{Id} \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$

De plus, pour tout $x \in E$

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in A} + \underbrace{q(x)}_{\in B}$$

est la décomposition de x dans $E = A \oplus B$.

Proposition 7.3.8

Soit p le projecteur sur A parallèlement à B. Alors

$$\operatorname{Ker} p = B, \qquad \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}) = A, \qquad \operatorname{Im} p = A.$$

De plus $p \circ p = p$.

Remarque

⇨ En particulier, si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}) \quad \text{et} \quad E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p.$$

Proposition 7.3.9

$p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

Exercices 9

⇨ Soit Re l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $\operatorname{Re}(z)$. Montrer que Re est un projecteur de $\mathbb{C}$ lorsqu'il est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

⇨ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application φ de E dans E par

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad [\varphi(f)](x) := f(0) + f'(0)x.$$

Montrer que φ est un projecteur. En déduire un supplémentaire du sous-espace vectoriel de E des fonctions affines.

Proposition 7.3.10

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et A, B deux sous-espaces supplémentaires de E. Étant donnés $f_A \in \mathcal{L}(A, F)$ et $f_B \in \mathcal{L}(B, F)$, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad f(a + b) = f_A(a) + f_B(b).$$

7.3.3 Symétrie

Définition 7.3.11

Soit A et B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, il existe un unique endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad s(a + b) = a - b.$$

On l'appelle *symétrie* par rapport à A parallèlement à B.

Proposition 7.3.12

Soit s la symétrie par rapport à A parallèlement à B. Alors

$$\operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}) = A, \qquad \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}) = B.$$

De plus $s \circ s = \operatorname{Id}$. En particulier s est un automorphisme et $s^{-1} = s$.

Remarque

⇨ En particulier, si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie

$$E = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}).$$

Proposition 7.3.13

$s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \operatorname{Id}$.

Exercice 10

⇨ Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et φ l'application de E dans E qui à f associe la fonction $\varphi(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\varphi(f)](x) \coloneqq f(-x).$$

Montrer que φ est une symétrie et en déduire que $E = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$ où $\mathcal{I}$ désigne l'espace vectoriel des fonctions impaires et $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions paires.

7.3.4 Hyperplan

Définition 7.3.14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *hyperplan* de E tout noyau d'une forme linéaire non nulle.

Remarques

⇨ Un hyperplan est un sous-espace vectoriel strict de E.

⇨ Si $E = \mathbb{K}^n$, les hyperplans sont les parties H de E telles qu'il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}.$$

En particulier, les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites passant par $(0, 0)$ et les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans passant par $(0, 0, 0)$.

Proposition 7.3.15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E.

— Si H est un hyperplan, quel que soit $x_0 \in E \setminus H$, $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$.

— Si H admet une droite vectorielle pour supplémentaire, alors c'est un hyperplan.

Remarque

⇨ On en déduit qu'un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si c'est un supplémentaire d'une droite vectorielle.

Proposition 7.3.16

Soit H un hyperplan de E et φ_0 une forme linéaire telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi_0$. Alors l'ensemble des formes linéaires de E dont le noyau est H est

$$\mathbb{K}^*\varphi_0 = \{\lambda\varphi_0 : \lambda \in \mathbb{K}^*\}.$$

7.4 Qcm

7.4.1 Espace vectoriel, application linéaire

Définition, propriétés élémentaires

Sous-espace vectoriel

1. Laquelle des parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel ?

   ☐ **a.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$ ☐ **b.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + x = 1\}$
   ☐ **c.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid yx = 1\}$ ☐ **d.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid yx = 0\}$

2. Laquelle des parties suivantes n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

   ☐ **a.** l'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 0$ ☐ **b.** l'ensemble des fonctions paires
   ☐ **c.** l'ensemble des fonctions croissantes ☐ **d.** l'ensemble des fonctions polynomiales

3. Dans l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, laquelle des fonctions suivantes est combinaison linéaire des fonctions $f_1 : x \mapsto \sin x$, $f_2 : x \mapsto \sin(2x)$ et $f_3 : x \mapsto \sin(3x)$?

   ☐ **a.** $x \mapsto \cos x$ ☐ **b.** $x \mapsto x\cos x$ ☐ **c.** $x \mapsto \sin x \cos x$ ☐ **d.** $x \mapsto \tan x$

Application linéaire

1. Laquelle des applications suivantes est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?

   ☐ **a.** $f_1 : (x,y) \mapsto x$ ☐ **b.** $f_2 : (x,y) \mapsto xy$
   ☐ **c.** $f_3 : (x,y) \mapsto x + y + 1$ ☐ **d.** $f_4 : (x,y) \mapsto (x+y)(x-y)$

2. Soit E et F deux espaces vectoriels réels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e_1,\dots,e_p)$ une famille de vecteurs de E. On a $u\left(\mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_p)\right) = \mathrm{Vect}\,(u(e_1),\dots,u(e_p))$

   ☐ **a.** pour toute application linéaire u ☐ **b.** lorsque u est injective
   ☐ **c.** lorsque u est surjective ☐ **d.** lorsque $\mathrm{Im}\,u \subset \mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_p)$

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E, u un endomorphisme de E, et v la restriction de u à F. Alors

   ☐ **a.** $v \in \mathcal{L}(F)$ ☐ **b.** $v \in \mathcal{L}(F,E)$ ☐ **c.** $v \in \mathcal{L}(E,F)$ ☐ **d.** v n'est pas forcément linéaire

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E. À quelle condition la restriction de u à F est-elle injective ?

   ☐ **a.** si $\mathrm{Ker}\,u = F$ ☐ **b.** si F n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}\,u$
   ☐ **c.** si $F \cap \mathrm{Ker}\,u = \{0\}$ ☐ **d.** si $F \cap \mathrm{Ker}\,u = \varnothing$

7.4.2 L'algèbre $\mathcal{L}(E)$

$\mathcal{L}(E,F)$

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $u^2 = -\mathrm{Id}$, que vaut $\left(u^2+u\right)^2$?

   ☐ **a.** $-2\,\mathrm{Id}$ ☐ **b.** $-2u$ ☐ **c.** $2\,\mathrm{Id} - 2u$ ☐ **d.** 0

2. Si u est un endomorphisme de E, on a toujours

   ☐ **a.** $\mathrm{Ker}\,u \subset \mathrm{Ker}\,u^2$ ☐ **b.** $\mathrm{Ker}\,u^2 \subset \mathrm{Ker}\,u$ ☐ **c.** $\mathrm{Ker}\,u = \mathrm{Ker}\,u^2$ ☐ **d.** $\mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Ker}\,u^2 = \{0\}$

3. Soit u un endomorphisme de E et x un vecteur de E tel que $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $u^n(x)$ vaut

   ☐ **a.** λx^n ☐ **b.** $\lambda^n x$ ☐ **c.** λx ☐ **d.** $\lambda^n x^n$

4. Soit g non nulle dans $\mathcal{L}(E)$. Laquelle des applications suivantes de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ n'est pas linéaire ?

   ☐ **a.** $f \mapsto g \circ f$ ☐ **b.** $f \mapsto f \circ g$ ☐ **c.** $f \mapsto g + f$ ☐ **d.** $f \mapsto g \circ f \circ g$

5. Si u et v sont deux endomorphismes de E tels que $v = u \circ v$, alors

   ☐ **a.** $\mathrm{Im}\,u = \mathrm{Im}\,v$ ☐ **b.** $u = \mathrm{Id}$ ☐ **c.** $\mathrm{Im}\,v \subset \mathrm{Ker}\,u$ ☐ **d.** la restriction de u à $\mathrm{Im}\,v$ est l'identité

Le groupe linéaire

7.4.3 Somme, somme directe, projecteur, hyperplan

Somme, somme directe

1. Soit u un endomorphisme de E. Quelle propriété est toujours vérifiée ?

   ☐ **a.** $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} u^2$ ☐ **b.** $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$ ☐ **c.** $\operatorname{Im} u^2 \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$ ☐ **d.** $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} u^2$

2. Lequel des ensembles suivants est un supplémentaire dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ de la droite $D = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$?

   ☐ **a.** $\{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ ☐ **b.** $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\right\}$ ☐ **c.** $\{(x,1) : x \in \mathbb{R}\}$ ☐ **d.** $\{(0,1)\}$

Projecteur

1. Laquelle des applications suivantes est un projecteur de $\mathbb{R}^2$?

   ☐ **a.** $p_1 : (x,y) \mapsto (y,x)$ ☐ **b.** $p_2 : (x,y) \mapsto (1,0)$ ☐ **c.** $p_3 : (x,y) \mapsto (0,x)$ ☐ **d.** $p_4 : (x,y) \mapsto (0,y)$

2. Lequel des ensembles suivants est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$?

   ☐ **a.** l'ensemble des projecteurs ☐ **b.** l'ensemble des symétries
   ☐ **c.** l'ensemble des homothéties ☐ **d.** l'ensemble des automorphismes de E

Symétrie

1. Lequel des sous-ensembles suivants de $\mathcal{L}(E)$ n'est pas stable par l'application $f \mapsto f \circ f$?

   ☐ **a.** l'ensemble des projecteurs ☐ **b.** l'ensemble des symétries
   ☐ **c.** l'ensemble des endomorphismes non nuls ☐ **d.** l'ensemble des homothéties

2. Soit s une symétrie de l'espace vectoriel E. Laquelle des applications suivantes est un projecteur ?

   ☐ **a.** $s + \mathrm{Id}$ ☐ **b.** $\dfrac{1}{2}(\mathrm{Id} - s)$ ☐ **c.** $s^2 - s$ ☐ **d.** $s^2 + s$

Hyperplan

7.5 Exercices

7.5.1 Espace vectoriel, application linéaire

Définition, propriétés élémentaires

Sous-espace vectoriel

Exercice 1 : Exemples d'espaces vectoriels

1. Les ensembles E suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des suites réelles ? Si oui, le prouver.
   (a) L'ensemble des suites réelles ayant une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) L'ensemble des suites réelles bornées, c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles (u_n) telles qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$$
2. Les ensembles E suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Si oui, le prouver.
   (a) L'ensemble des fonctions 1-périodiques.
   (b) L'ensemble des fonctions croissantes.
   (c) L'ensemble des fonctions qui sont la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.
   (d) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + \mathrm{e}^{t \sin(t)} y(t) = 0.$$

Exercice 2 : Combinaison linéaire

1. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f : x \mapsto \cos^2(x)$ est-elle combinaison linéaire de $g_0 : x \mapsto 1$ et $g_2 : x \mapsto \cos(2x)$?
2. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f : x \mapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire de $g : x \mapsto \cos(x)$ et $h : x \mapsto \sin(x)$?
3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que le vecteur $e_1 \coloneqq (1, -a, 1)$ soit combinaison linéaire de $e_2 \coloneqq (1, 1, 1)$ et $e_3 \coloneqq (a, 0, 2)$.

Exercice 3 : Fonctions trigonométriques

On pose $E \coloneqq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions f_n et g_n par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) \coloneqq \cos(nx) \qquad \text{et} \qquad g_n(x) \coloneqq \cos^n(x).$$

1. Montrer que $\mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2) = \mathrm{Vect}(g_0, g_1, g_2)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in \mathrm{Vect}\,(f_0, \dots, f_n)$ et $f_n \in \mathrm{Vect}\,(g_0, \dots, g_n)$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}\,(f_0, f_1, \dots, f_n) = \mathrm{Vect}\,(g_0, g_1, \dots, g_n)$.

Exercice 4 : Espace vectoriel engendré

Soit u, v et w trois vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u, w)$ si et seulement si
$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}, \quad \alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \quad \text{et} \quad \beta\gamma \neq 0.$$

Exercice 5 : Union de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E pour laquelle $I \neq \varnothing$ et
   $$\forall i, j \in I, \quad \exists k \in I, \quad F_i \cup F_j \subset F_k.$$
   Montrer que $\cup_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Application linéaire

Exercice 6 : Caractérisation des homothéties

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le but de cet exercice est de montrer que f est une homothétie si et seulement si, quel que soit $x \in E$, x et $f(x)$ sont colinéaires.

1. Montrer que si f est une homothétie, quel que soit $x \in E$, x et $f(x)$ sont colinéaires.
2. Réciproquement, on suppose que quel que soit $x \in E$, x et $f(x)$ sont colinéaires.
   (a) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
   (b) Montrer que si x et $y \in E \setminus \{0\}$ sont colinéaires, alors $\lambda_x = \lambda_y$.
   (c) Montrer que si x et $y \in E \setminus \{0\}$ ne sont pas colinéaires, alors $\lambda_x = \lambda_y$.
   (d) Conclure.

Exercice 7 : Automorphisme

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & E \times F \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y - u(x)) \end{array}$$

est un automorphisme de $E \times F$.

7.5.2 L'algèbre $\mathcal{L}(E)$

$\mathcal{L}(E, F)$

Exercice 8 : Calcul dans $\mathcal{L}(E)$

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f^2 + f + \mathrm{Id}$. Montrer que f est un automorphisme.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On suppose que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$f^n = 0.$$
   Montrer que $\mathrm{Id}_E + f$ est un automorphisme et calculer son inverse.

Le groupe linéaire

Exercice 9 : Automorphisme de $\mathbb{R}^3$

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + z, -2x + y, x + 3z) \end{array}$$

Montrer que $f \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^3\right)$.

7.5.3 Somme, somme directe, projecteur, hyperplan

Somme, somme directe

Exercice 10 : Exercice

Soit v et w deux vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $F + \mathbb{K}v = F + \mathbb{K}w$ si et seulement si

$$\exists u \in F, \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad u = \alpha v + \beta w \quad \text{et} \quad \alpha\beta \neq 0.$$

Exercice 11 : Exercice

Soit E un espace vectoriel et F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$. Vérifiez sur un dessin qu'il est possible que cette inclusion soit stricte.
2. Établir que l'on a $(F \cap G) + (F \cap H) = F \cap [G + (F \cap H)]$.

Exercice 12 : Exercice

E, F et G sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que

$$\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g \iff \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F.$$

Exercice 13 : Pseudo inverse

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

1. Montrer que $E = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u$.
2. Montrer que $u(\operatorname{Im} v) = \operatorname{Im} u$.

Exercice 14 : Rendre directe une somme

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $F+G = E$. On note F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que

$$E = F' \oplus G.$$

Exercice 15 : Supplémentaire

On se place dans $E := \mathbb{R}^3$. On se donne $a \in \mathbb{R}$ et on pose

$$e_1 := (a, a, 1), \quad e_2 := (1, a, 1), \quad e_3 := (2, 1, 1).$$

On pose enfin $A := \operatorname{Vect}(e_1)$ et $B := \operatorname{Vect}(e_2, e_3)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $e_1 = \alpha e_2 + \beta e_3$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que quel que soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y, z) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que A et B soient supplémentaires.

Projecteur

Exercice 16 : Somme de deux projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. On suppose que $p + q$ est un projecteur. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(p + q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q.$$

Exercice 17 : Réduction d'une application linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f^2 - 5f + 6\operatorname{Id} = 0.$$

1. Montrer que $(f - 2\operatorname{Id}) \circ (f - 3\operatorname{Id}) = 0$.
2. En déduire que $E = \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id})$.

Exercice 18 : Projecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et g un projecteur de E. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker} g \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g).$$

2. Soit f un projecteur de E et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g).$$

3. Soit f et g deux projecteurs de E. Montrer que $f \circ g$ est un projecteur si et seulement si

$$\operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} g \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g).$$

Symétrie

Exercice 19 : Centre de $\mathcal{L}(E)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le but de cet exercice est de montrer que les endomorphismes qui commutent avec tous les autres sont les homothéties.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie, alors elle commute avec tous les endomorphismes de E.
2. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme commutant avec tous les endomorphismes de E.
   (a) Soit s une symétrie de E. Montrer que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$ sont stables par f.
   (b) En admettant le fait que toute droite vectorielle admet un supplémentaire, montrer que quel que soit $x \in E$, x et $f(x)$ sont colinéaires.
   (c) Conclure.

Hyperplan

Exercice 20 : Hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H_1, H_2 deux hyperplans de E tels que $H_1 \subset H_2$. Montrer que $H_1 = H_2$.

Chapitre 8

Suites

« Les mathématiciens sont comme les français : quoique vous leur dites, ils le traduisent dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent. »

– Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832)

« M. Cauchy annonce que, pour se conformer au voeu du Conseil, il ne s'attachera plus à donner, comme il a fait jusqu'à présent, des démonstrations parfaitement rigoureuses. »

— Conseil d'instruction de l'École Polytechnique (1825)

8.1 Suite réelle et complexe . . . **62**
8.1.1 Définition . . . 62
8.1.2 Suite et relation d'ordre . . . 62
8.2 Notion de limite . . . **63**
8.2.1 Limite finie . . . 63
8.2.2 Limite infinie . . . 64
8.2.3 Limite et relation d'ordre . . . 65
8.2.4 Théorèmes usuels et limites usuelles . . . 66
8.2.5 Suite extraite . . . 68
8.3 Propriétés de $\mathbb{R}$ . . . **68**
8.3.1 Voisinage . . . 68
8.3.2 Densité . . . 69
8.3.3 Propriété de la borne supérieure . . . 69
8.4 Suite monotone . . . **71**
8.4.1 Suite monotone . . . 71
8.4.2 Étude des suites définies par $u_{n+1} \coloneqq f(u_n)$ . . . 72
8.4.3 Suites adjacentes . . . 73
8.4.4 Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . 74
8.5 Qcm . . . **75**
8.5.1 Suite réelle et complexe . . . 75
8.5.2 Notion de limite . . . 75
8.5.3 Propriétés de $\mathbb{R}$ . . . 76
8.5.4 Suite monotone . . . 77
8.6 Exercices . . . **79**
8.6.1 Suite réelle et complexe . . . 79
8.6.2 Notion de limite . . . 79
8.6.3 Propriétés de $\mathbb{R}$ . . . 81
8.6.4 Suite monotone . . . 82

8.1 Suite réelle et complexe

8.1.1 Définition

Définition 8.1.1

On appelle *suite numérique* toute famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels, ou de complexes, indexée par $\mathbb{N}$.

Remarque

⇨ Dans la suite de ce chapitre, ainsi que dans tous les chapitres d'analyse, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 8.1.2

— On dit qu'une suite (u_n) vérifie la propriété $\mathcal{P}$ *à partir d'un certain rang* lorsqu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
— On dit qu'une propriété $\mathcal{P}$ est *asymptotique* lorsque, quelles que soient les suites (u_n) et (v_n) égales à partir d'un certain rang, $\mathcal{P}((u_n))$ est vrai si et seulement si $\mathcal{P}((v_n))$ est vrai.

Remarque

⇨ Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}$ est asymptotique, il suffit de se donner deux suites (u_n) et (v_n) égales à partir d'un certain rang telles que $\mathcal{P}(u)$ est vrai et de montrer que $\mathcal{P}(v)$ est vrai.

Exercice 1

⇨ La propriété « est nulle » est-elle asymptotique ? Montrer que la propriété « s'annule une infinité de fois » l'est.

8.1.2 Suite et relation d'ordre

Définition 8.1.3

On dit qu'une suite réelle (u_n) est
— *croissante* lorsque
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\leqslant u_{n+1}.$$
— *décroissante* lorsque
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}\leqslant u_n.$$
— *monotone* lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
— *strictement croissante* lorsque
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n< u_{n+1}.$$
— *strictement décroissante* lorsque
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}< u_n.$$
— *strictement monotone* lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarques

⇨ Pour étudier la monotonie de la suite (u_n), il est souvent utile de simplifier $u_{n+1}-u_n$ afin de déterminer son signe. Si la suite (u_n) est à valeurs strictement positives, on peut comparer u_{n+1}/u_n à 1. Par exemple, si $a>0$, la suite de terme général a^n est croissante si $a\geqslant 1$ et décroissante si $a\leqslant 1$.

⇨ Pour étudier la monotonie d'une suite donnée par son terme général, on peut aussi l'écrire $u_n=f(n)$ et étudier la fonction f.

⇨ Les suites constantes sont à la fois croissantes et décroissantes ; ce sont d'ailleurs les seules. Certaines suites ne sont ni croissantes ni décroissantes.

Exercice 2

⇨ Étudier la monotonie des suites de terme général
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3},\qquad \binom{2n}{n},\qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Définition 8.1.4

On dit qu'une suite réelle (u_n) est

— *majorée* lorsque
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M.$$

— *minorée* lorsque
$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m.$$

Les propriétés « est majorée » et « est minorée » sont asymptotiques.

Définition 8.1.5

On dit qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *bornée* lorsque
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M$$

La propriété « est bornée » est asymptotique.

Remarque

⇨ Une combinaison linéaire de suites bornées est bornée. De même, le produit de deux suites bornées est borné.

Proposition 8.1.6

Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

8.2 Notion de limite

8.2.1 Limite finie

Définition 8.2.1

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite et $l \in \mathbb{K}$. On dit que (u_n) *converge* vers l et on note $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ lorsque
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - l| \leqslant \varepsilon.$$

La propriété « converge vers l » est asymptotique.

Remarques

⇨ Si $l \in \mathbb{K}$, la suite constante égale à l converge vers l.

⇨ Si (u_n) est une suite et $l \in \mathbb{K}$, alors (u_n) converge vers l si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - l| < \varepsilon.$$

Cependant, conformément aux bonnes manières de l'analyse, nous éviterons le plus possible d'utiliser cette définition, car elle fait intervenir une inégalité stricte là où une inégalité large suffit.

Définition 8.2.2

— On dit qu'une suite (u_n) est *convergente* lorsqu'il existe $l \in \mathbb{K}$ tel que
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l.$$

Si tel est le cas, l est unique ; on l'appelle limite de la suite (u_n).

— Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est *divergente*.

Remarque

⇨ Déterminer la *nature* d'une suite (u_n), c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

Exercice 3

⇨ Soit (u_n) une suite convergente d'entiers. Montrer qu'elle est constante à partir d'un certain rang. En déduire que la suite de terme général $(-1)^n$ diverge.

Proposition 8.2.3

Toute suite convergente est bornée.

Proposition 8.2.4

Soit (u_n) une suite convergeant vers $l \in \mathbb{K}$. Alors

$$\overline{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \bar{l} \quad \text{et} \quad |u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |l|.$$

Proposition 8.2.5

Soit (u_n) et (v_n) des suites convergeant respectivement vers l_1 et $l_2 \in \mathbb{K}$.
— Si λ, $\mu \in \mathbb{K}$, alors
$$\lambda u_n + \mu v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda l_1 + \mu l_2.$$
— De plus
$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 l_2.$$
— Enfin, si $l_1 \neq 0$, la suite (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang et
$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{l_1}.$$

Exercices 4

⇨ Montrer que l'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

⇨ Soit (u_n) une suite réelle positive telle que la suite de terme général $u_n/(1+u_n)$ converge vers 0. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

Proposition 8.2.6

Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{C}$. Alors

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Re} l \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Im} l\right].$$

8.2.2 Limite infinie

Définition 8.2.7

Soit (u_n) une suite réelle.
— On dit que u_n *tend vers* $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ lorsque
$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant m.$$
Si tel est le cas, on note
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$
— On dit que u_n *tend vers* $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ lorsque
$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant M.$$
Si tel est le cas, on note
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

Ces propriétés sont asymptotiques. De plus u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si $-u_n$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $n + \alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Proposition 8.2.8

Si (u_n) admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors cette limite est unique ; on l'appelle limite de la suite (u_n) et on la note

$$\lim_{n\to\infty} u_n.$$

Remarque

⇨ Une suite qui tend vers $+\infty$ est divergente. On dit aussi qu'elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 6

⇨ Une suite non majorée diverge-t-elle toujours vers $+\infty$? Une suite divergeant vers $+\infty$ est-elle toujours croissante à partir d'un certain rang ?

Proposition 8.2.9

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

— Si u_n tend vers $+\infty$ et (v_n) est minorée, alors

$$u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

— Si u_n tend vers $+\infty$ et (v_n) est minorée par $m > 0$, alors

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Proposition 8.2.10

Soit (u_n) une suite réelle.

— Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors il existe un rang à partir duquel $u_n > 0$ et

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

— Si (u_n) converge vers 0 et est strictement positive, alors

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

8.2.3 Limite et relation d'ordre

Proposition 8.2.11

Soit (u_n) une suite réelle admettant $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite.

— Si (u_n) est majorée par $M \in \mathbb{R}$, alors $l \leqslant M$.

— Si (u_n) est minorée par $m \in \mathbb{R}$, alors $l \geqslant m$.

Remarques

⇨ Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergeant respectivement vers l_u et $l_v \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$$

alors $l_u \leqslant l_v$. On dit que les inégalités larges passent à la limite.

⇨ Cependant, les inégalités strictes ne passent pas à la limite.

Proposition 8.2.12

Soit (u_n) une suite réelle admettant $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite.

— Si M est un réel tel que $l < M$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant M.$$

— Si m est un réel tel que $l > m$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant m.$$

Théorème 8.2.13: Théorème des gendarmes

Soit (a_n), (b_n) et (u_n) des suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant u_n \leqslant b_n.$$

On suppose que a_n et b_n admettent la même limite finie $l \in \mathbb{R}$. Alors

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l.$$

Exercices 7

⇨ Donner la limite éventuelle de la suite de terme général $\frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}$.

⇨ Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que $u_n + v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$. Que dire des suites (u_n) et (v_n) ?

Proposition 8.2.14

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.$$

— si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, alors $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
— si $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$, alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

Exercices 8

⇨ Donner la limite éventuelle de la suite de terme général $n + \sin n$.

⇨ Soit (u_n) une suite réelle telle que la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge vers $\alpha > 0$. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Proposition 8.2.15

Soit (u_n) une suite, $l \in \mathbb{K}$ et (v_n) une suite réelle positive telle que
— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - l| \leqslant v_n$,
— $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
Alors

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l.$$

Exercice 9

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite de terme général

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\alpha}.$$

8.2.4 Théorèmes usuels et limites usuelles

Proposition 8.2.16

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles ayant pour limites respectives l_1 et $l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

— Si $l_1 + l_2$ n'est pas une forme indéterminée

$$u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 + l_2.$$

— Si $l_1 l_2$ n'est pas une forme indéterminée

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 l_2.$$

— Si $1/l_1$ n'est pas une forme indéterminée

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{l_1}.$$

Proposition 8.2.17

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\frac{1}{n^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Proposition 8.2.18

Soit ω un réel positif.

— Si $\omega > 1$, alors $\omega^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

— Si $\omega < 1$, alors $\omega^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Proposition 8.2.19

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

— Si $\omega < 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

— Si $\omega > 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 10

⇨ Déterminer la limite éventuelle des suites de terme général

$$\frac{e^n}{n!}, \qquad \frac{n}{(1+i)^n}.$$

Proposition 8.2.20

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$. On suppose qu'il existe $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) tels que

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l.$$

Si (u_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ admettant a pour limite, alors

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

Exercice 11

⇨ Déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

8.2.5 Suite extraite

Définition 8.2.21

On appelle *extractrice* toute application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Remarque

⇨ Les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_1(n) := n+1, \qquad \varphi_2(n) := 2n, \qquad \varphi_3(n) := 2n+1$$

sont des extractrices.

Proposition 8.2.22

Si φ est une extractrice, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geqslant n.$$

Définition 8.2.23

Soit (u_n) une suite. On appelle *suite extraite* (ou *sous-suite*) de (u_n) toute suite du type $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ où φ est une extractrice.

Proposition 8.2.24

Si (u_n) est une suite admettant $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) pour limite, toute sous-suite de (u_n) tend vers l.

Remarque

⇨ Pour montrer qu'une suite (u_n) n'admet pas de limite, il suffit de trouver deux extractrices φ_1 et φ_2 telles que les suites de terme général $u_{\varphi_1(n)}$ et $u_{\varphi_2(n)}$ ont des limites différentes.

Exercices 12

⇨ Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{n} + (-1)^n$ n'admet pas de limite.

⇨ Soit (u_n) une suite réelle non majorée. Montrer qu'on peut en extraire une suite divergeant vers $+\infty$.

Proposition 8.2.25

Soit (u_n) une suite et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) tels que

$$u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \quad \text{et} \quad u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

Alors

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

8.3 Propriétés de $\mathbb{R}$

8.3.1 Voisinage

Définition 8.3.1

— Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un *voisinage* de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \leqslant \varepsilon\} = [a-\varepsilon, a+\varepsilon].$$

— On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un *voisinage* de $+\infty$ lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathcal{V} = [m, +\infty[.$$

— On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un *voisinage* de $-\infty$ lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathcal{V} =]-\infty, M].$$

— Soit $a \in \mathbb{C}$. On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}$ est un *voisinage* de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leqslant \varepsilon\}.$$

Remarque

⇨ La notion de voisinage permet d'unifier la notion de limite. Si (u_n) est une suite réelle et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

si et seulement si, quel que soit le voisinage $\mathcal{V}$ de l, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in \mathcal{V}$.

Proposition 8.3.2

L'intersection d'un nombre fini de voisinages de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) est un voisinage.

8.3.2 Densité

Définition 8.3.3

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$ lorsque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad |x - a| \leqslant \varepsilon.$$

Remarques

⇨ Autrement dit, A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si, quels que soient $x \in \mathbb{R}$ et le voisinage $\mathcal{V}$ de x, $\mathcal{V} \cap A \neq \varnothing$.

⇨ Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $x \leqslant a \leqslant y$.

Proposition 8.3.4

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x.

Proposition 8.3.5

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque

⇨ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

8.3.3 Propriété de la borne supérieure

Définition 8.3.6

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A admet une *borne supérieure* lorsque l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément. Si tel est le cas, on le note $\sup A$.

Remarques

⇨ Soit $b \in \mathbb{R}$. Alors $]-\infty, b]$ et $]-\infty, b[$ admettent b pour borne supérieure.

⇨ Si une partie A de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément, alors elle admet une borne supérieure et $\sup A = \max A$. Cependant, il est possible que A admette une borne supérieure qui n'appartienne pas à A ; dans ce cas, A n'admet pas de plus grand élément.

⇨ Si une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, alors elle est non vide et majorée.

Proposition 8.3.7

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est la borne supérieure de A si et seulement si

— α est un majorant de A

$$\forall a \in A, \quad a \leqslant \alpha.$$

— α est le plus petit des majorants de A

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad a \geqslant \alpha - \varepsilon.$$

Remarques

⇨ Si A est une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, dire que α est un majorant de A s'écrit : $\forall a \in A \quad a \leqslant \alpha$. Par contre, pour montrer (ou exploiter le fait) que α est le plus petit des majorants de A, deux phrases équivalentes s'offrent à nous.

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, \quad [\forall a \in A, \quad a \leqslant \beta] \quad \Longrightarrow \quad \alpha \leqslant \beta$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad a \geqslant \alpha - \varepsilon.$$

Nous emploierons le plus souvent la seconde.

⇨ Pour exploiter le fait que α est le plus petit des majorants de A, on peut remplacer l'inégalité $a \geqslant \alpha - \varepsilon$ par une inégalité stricte

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad a > \alpha - \varepsilon.$$

Proposition 8.3.8

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est la borne supérieure de A si et seulement si c'est un majorant de A et qu'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers α.

Exercice 13

⇨ Montrer que $A := \left\{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet une borne supérieure que l'on calculera.

Théorème 8.3.9

Une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure si et seulement si elle est non vide et majorée.

Exercice 14

⇨ Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. On suppose que A est non vide et que B est majorée. Comparer $\sup A$ et $\sup B$.

Définition 8.3.10

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A admet une *borne inférieure* lorsque l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément. Si tel est le cas, on le note $\inf A$.

Proposition 8.3.11

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est la borne inférieure de A si et seulement si

— α est un minorant de A

$$\forall a \in A, \quad a \geqslant \alpha.$$

— α est le plus grand des minorants de A

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad a \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

Proposition 8.3.12

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est la borne inférieure de A si et seulement si c'est un minorant de A et qu'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers α.

Exercice 15

⇨ Montrer que $A := \left\{\frac{4}{n} + n : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet une borne inférieure que l'on calculera.

Proposition 8.3.13

Une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure si et seulement si elle est non vide et minorée.

Définition 8.3.14

On dit qu'une partie C de $\mathbb{R}$ est *convexe* lorsque

$$\forall a, b \in C, \quad a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad [a, b] \subset C.$$

Théorème 8.3.15

Les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Remarque

⇨ On en déduit que l'intersection d'une famille d'intervalles est un intervalle.

8.4 Suite monotone

8.4.1 Suite monotone

Théorème 8.4.1: Théorème de la limite monotone

Toute suite croissante majorée est convergente.

Remarque

⇨ Si (u_n) est croissante et admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant l.$$

De plus, si (u_n) est strictement croissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < l.$$

Exercices 16

⇨ Soit $\alpha > 1$ et (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Montrer que pour tout $k \geqslant 2$

$$\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}.$$

En déduire la convergence de la suite (u_n).

⇨ La limite de l'exemple précédent est notée $\zeta(\alpha)$. On définit ainsi une fonction ζ de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, appelée fonction zéta de Riemann. Montrer que ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$.

Proposition 8.4.2

Soit (u_n) une suite croissante.
- Si elle est majorée, alors elle est convergente.
- Sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 17

⇨ Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que $u_{2n} - u_n$ est minoré par un réel $\alpha > 0$. En déduire que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Proposition 8.4.3

Toute suite décroissante minorée est convergente.

Proposition 8.4.4

Soit (u_n) une suite décroissante.
— Si elle est minorée, alors elle est convergente.
— Sinon, elle diverge vers $-\infty$.

8.4.2 Étude des suites définies par $u_{n+1} := f(u_n)$

Remarques

⇨ Lorsqu'on étudie une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} := f(u_n)$, on procède comme suit.
— *Étude de f et tracé de son graphe*
On commencera par tracer le graphe de f en prenant soin de placer correctement ce graphe par rapport à la droite d'équation $y = x$. En pratique, on étudiera les variations de f, ses limites aux bornes du domaine de définition, ainsi que le signe de $\varphi(x) := f(x) - x$.
— *Tracé des escaliers et conjectures*
Dans le cas où f est croissante, un dessin de l'*escalier* des premiers termes de la suite (u_n) permet d'établir une conjecture concernant son comportement asymptotique en fonction de α.
— *Recherche d'un intervalle stable par f*
On cherche ensuite un intervalle I de $\mathbb{R}$, stable par f, tel que $u_0 \in I$. On en déduit que la relation de récurrence définit bien une suite (u_n) et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I.$$

— *Démonstration des résultats annoncés*
Si φ est de signe constant sur I, alors (u_n) est monotone. C'est le signe de φ qui donne le sens de variation de (u_n). Elle admet donc une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ qui est soit une extrémité de I, soit un élément de I. Dans le cas où $l \in I$ et f est continue en l, on a $f(l) = l$.

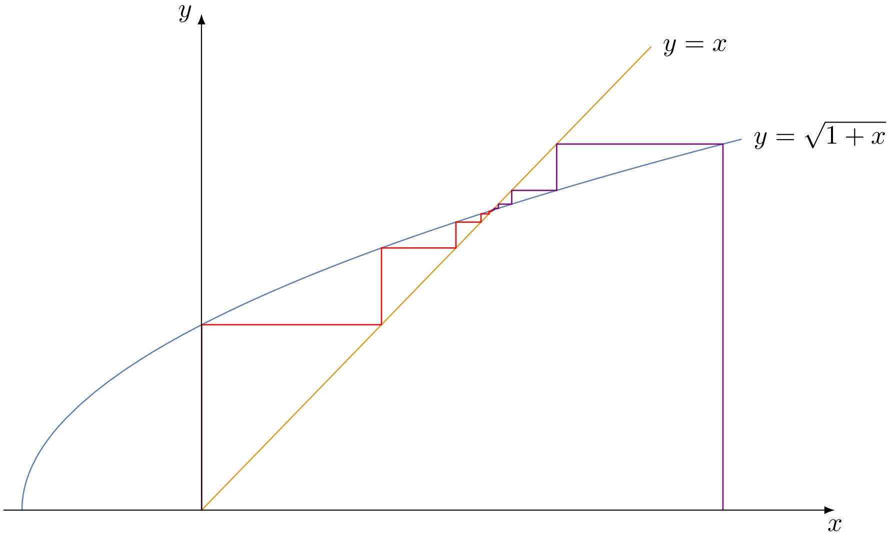
⇨ Remarquons que la croissance seule de f permet de montrer la monotonie de (u_n).

Exercices 18

⇨ Soit $\alpha \geqslant 0$ et (u_n) la suite définie par

$$u_0 := \alpha \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} := \sqrt{1 + u_n}.$$

Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).



⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par

$$u_0 := \alpha \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} := \frac{u_n^2 + 2}{3}.$$

Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

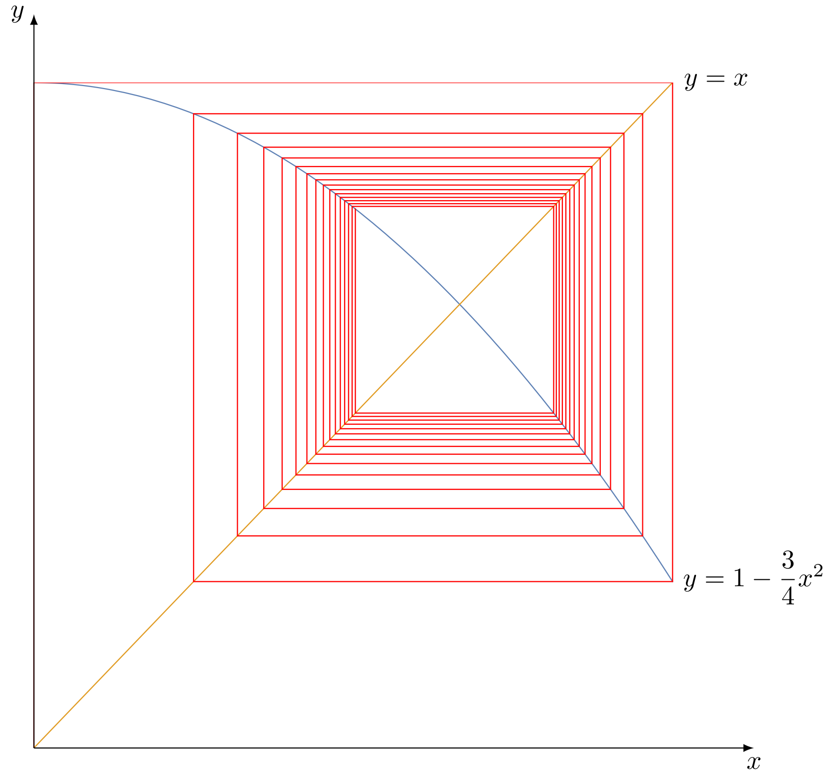
Remarque

⇨ Si f est décroissante, on étudie les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Ces suites vérifient une relation de récurrence faisant intervenir $f \circ f$. On commence par étudier la suite (u_{2n}). Comme f est décroissante, $f \circ f$ est croissante, et on est ramené au cas précédent. Puis, en remarquant que $u_{2n+1} = f(u_{2n})$, on en déduit la limite, si elle existe, de (u_{2n+1}). Si ces deux suites admettent la même limite $l \in \mathbb{R}$, alors (u_n) converge vers l. Dans le cas contraire, la suite (u_n) est divergente.

Exercice 19

⇨ Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 := 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} := 1 - \frac{3}{4}u_n^2.$$



8.4.3 Suites adjacentes

Définition 8.4.5

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* lorsque
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$,
- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante,
- $v_n - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Remarque

⇨ Si deux suites (u_n) et (v_n) vérifient les deux derniers points, alors elles vérifient le premier point. En théorie il est donc inutile de le vérifier, mais l'usage veut qu'on le fasse.

Proposition 8.4.6

Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant l \leqslant v_n.$$

Exercice 20

⇨ Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad v_n := \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

sont adjacentes. En utilisant une comparaison avec des intégrales, montrer qu'elles convergent vers $\ln 2$.

8.4.4 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 8.4.7: Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Exercice 21

⇨ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (p_n) une suite d'entiers relatifs et (q_n) une suite d'entiers naturels non nuls tels que

$$\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x.$$

Montrer que $q_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

8.5 Qcm

8.5.1 Suite réelle et complexe

Définition

Suite et relation d'ordre

1. Soit $a > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n \coloneqq n!/a^n$ est croissante à partir d'un certain rang

☐ **a.** pour tout $a > 0$
☐ **b.** seulement pour a dans $]0, 1]$
☐ **c.** seulement pour $a \geqslant 1$
☐ **d.** pour aucune valeur de a

2. La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n \coloneqq 2n + (-1)^n$ est

☐ **a.** croissante
☐ **b.** décroissante
☐ **c.** non monotone
☐ **d.** croissante et décroissante selon la parité de n

8.5.2 Notion de limite

Limite finie

1. Laquelle des conditions suivantes est incompatible avec le fait que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit périodique ?

☐ **a.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
☐ **b.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente
☐ **c.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante
☐ **d.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n} + \varepsilon$$

pour $n \geqslant N$. Alors $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 car

☐ **a.** $0 \leqslant \lim u_n \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ donc $\lim u_n = 0$
☐ **b.** $1/n + \varepsilon$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et ε tend vers 0
☐ **c.** $1/n$ tend vers 0 donc si $\varepsilon > 0$ est fixé, $0 \leqslant u_n \leqslant 2\varepsilon$ pour n assez grand
☐ **d.** En prenant $\varepsilon \coloneqq 1/n$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 2/n$ pour n assez grand

3. Lorsque t est un nombre réel, la suite $u_n \coloneqq \mathrm{e}^{int}$ converge pour

☐ **a.** $t \equiv 0\ [2\pi]$
☐ **b.** $t \equiv 0\ [\pi]$
☐ **c.** aucune valeur de t
☐ **d.** tout réel t

Limite infinie

Limite et relation d'ordre

1. Soit I un intervalle et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I qui converge. Pour quel intervalle I est-on certain que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans I ?

☐ **a.** $]0, 1[$
☐ **b.** $[0, 1]$
☐ **c.** $[0, 1[$
☐ **d.** $]0, +\infty[$

2. Parmi les conditions suivantes, laquelle est suffisante pour que la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tende vers 1 ?

☐ **a.** $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1
☐ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par 1 ou décroissante et minorée par 1
☐ **c.** $|u_n - 1| < 1/n$ à partir d'un certain rang
☐ **d.** la partie entière de u_n tend vers 1

3. Parmi les conditions suivantes, laquelle est nécessaire pour que la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tende vers 1 ?

☐ **a.** $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1
☐ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par 1 ou décroissante et minorée par 1
☐ **c.** $|u_n - 1| < 1/n$ à partir d'un certain rang
☐ **d.** la partie entière de u_n tend vers 1

4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que
$$1 - \frac{1}{n} < u_n < 2 + \frac{1}{n}$$
pour tout $n \geqslant 1$, alors

☐ **a.** $\lim u_n \in [1,2]$ ☐ **b.** $\lim u_n \in]1,2[$
☐ **c.** $\lim u_n = \dfrac{3}{2}$ ☐ **d.** u_n ne converge pas forcément

Théorèmes usuels et limites usuelles

1. Quelle est la limite de la suite $n^{1/n}$?

☐ **a.** 0 ☐ **b.** 1 ☐ **c.** e ☐ **d.** $+\infty$

2. Quelle est la limite de $u_n \coloneqq \frac{4^n-3^n}{2^n-1}$?

☐ **a.** $+\infty$ ☐ **b.** 2 ☐ **c.** 1 ☐ **d.** 2^n

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 1. Alors la suite $v_n \coloneqq u_n^n$

☐ **a.** tend aussi vers 1 ☐ **b.** converge vers 0 ☐ **c.** diverge vers $+\infty$ ☐ **d.** est une forme indeterminée

Suite extraite

1. Laquelle des suites suivantes est extraite de la suite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$?

☐ **a.** $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$ ☐ **b.** $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ ☐ **c.** $(u_{2n+2})_{n\geqslant 0}$ ☐ **d.** $(u_{n^2})_{n\geqslant 0}$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang ?

☐ **a.** u_n tend vers 0 ☐ **b.** $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0
☐ **c.** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 ☐ **d.** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$

8.5.3 Propriétés de $\mathbb{R}$

Voisinage

Densité

1. Parmi les parties suivantes, laquelle est dense dans $\mathbb{R}$?

☐ **a.** $\mathbb{Z}$ ☐ **b.** $\left\{\dfrac{p}{q} : 0 < p < q\right\}$ ☐ **c.** $\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ☐ **d.** $\{2k\pi : k \in \mathbb{Q}\}$

Propriété de la borne supérieure

1. Quelle est la borne supérieure de l'intervalle $[0,1[$?

☐ **a.** 1^- ☐ **b.** 1 ☐ **c.** $[1,+\infty[$ ☐ **d.** le plus grand réel strictement inférieur à 1

2. Quelle est la borne supérieure de $\{x \in [-2,2] \mid x^2 < 2\}$?

☐ **a.** 4 ☐ **b.** $\sqrt{2}$ ☐ **c.** $-\sqrt{2}$ ☐ **d.** 0

3. Parmi les ensembles suivants, lequel admet une borne supérieure ?

   ☐ **a.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x < x+1\}$ ☐ **b.** $\{x \in \mathbb{R}_+ \mid x < -1\}$

   ☐ **c.** $\left\{x \in [-2\pi, 2\pi] \;\middle|\; \sin x = \dfrac{1}{3}\right\}$ ☐ **d.** $\mathbb{Z}$

4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction décroissante, la quantité $\operatorname{Sup}\left\{f\left(x^2\right) : x \in [-1,1]\right\}$ vaut

   ☐ **a.** $f(0)$ ☐ **b.** $f(1)$ ☐ **c.** $f(-1)$ ☐ **d.** $\max(f(1), f(-1))$

5. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Laquelle des propositions suivantes signifie que le réel a est la borne supérieure de A.

   ☐ **a.** $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$ ☐ **b.** $a \in A$ et $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$

   ☐ **c.** $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$ et pour tout $b < a$ on peut trouver un élément de A dans l'intervalle $]b, a]$

   ☐ **d.** $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$ et on peut trouver $b < a$ tel que l'intervalle $]b, a[$ soit inclus dans A

8.5.4 Suite monotone

Suite monotone

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive et décroissante. Alors

   ☐ **a.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est positive ou nulle
   ☐ **b.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
   ☐ **c.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est strictement positive
   ☐ **d.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et est constante à partir d'un certain rang

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante. Laquelle des conditions suivantes n'est pas suffisante pour affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

   ☐ **a.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée
   ☐ **b.** la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge
   ☐ **c.** la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0
   ☐ **d.** la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Étude des suites définies par $u_{n+1} \coloneqq f(u_n)$

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} \coloneqq u_n + u_n^2$. Alors

   ☐ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge car elle est croissante
   ☐ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante donc elle tend vers $+\infty$
   ☐ **c.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante positive donc converge et sa limite l vérifie $l = l + l^2$ donc est nulle
   ☐ **d.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et non majorée

Suites adjacentes

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive. Laquelle des conditions suivantes suffit pour dire que les suites $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes ?

   ☐ **a.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
   ☐ **b.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
   ☐ **c.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0
   ☐ **d.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers 0

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle croissante. On pose $v_n \coloneqq u_n + 1/n$. Les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes lorsque

   ☐ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge ☐ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée

   ☐ **c.** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$ ☐ **d.** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \geqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$

3. Soit $u_n := 1 - 1/n$ pour $n \geqslant 1$. Si (v_n) est une suite adjacente avec (u_n), alors

☐ **a.** pour tout n, on a $v_n > 1$
☐ **b.** pour tout n, on a $v_n - u_n \geqslant 1/n$
☐ **c.** $\lim v_n > 1$
☐ **d.** (v_n) est croissante

Théorème de Bolzano-Weierstrass

1. Le théorème de Bolzano-Weierstrass dit

☐ **a.** qu'une suite réelle bornée converge
☐ **b.** qu'une suite réelle bornée admet une sous-suite qui converge
☐ **c.** que toute sous-suite d'une suite réelle bornée converge
☐ **d.** qu'une suite qui converge est bornée

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Combien y a-t-il de sous-suites de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui convergent ?

☐ **a.** il n'y en a pas forcément
☐ **b.** il y en a au moins une
☐ **c.** il y en a toujours une infinité
☐ **d.** il n'y en a qu'un nombre fini

8.6 Exercices

8.6.1 Suite réelle et complexe

Définition

Suite et relation d'ordre

8.6.2 Notion de limite

Limite finie

Exercice 1 : Minimum et Maximum

Soit u et v deux suites réelles convergeant respectivement vers l_u et l_v. Montrer que les suites de terme général $\max(u_n, v_n)$ et $\min(u_n, v_n)$ sont convergentes et calculer leurs limites.

Exercice 2 : Plus grand et plus petit élément

Soit (u_n) une suite de réels. On pose
$$A \coloneqq \{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

1. On suppose que (u_n) diverge vers $+\infty$. Montrer que A admet un plus petit élément.
2. On suppose que (u_n) converge. Montrer que A admet un plus petit ou un plus grand élément.

Exercice 3 : Quelques calculs de limite

Montrer que les suites suivantes, définies par leur terme général, admettent une limite que l'on calculera.

$$\textbf{a. } \frac{\sin(n^3)}{n}, \qquad \textbf{b. } \frac{n^3+5n}{5n^3+\cos n+\frac{1}{n^2}}, \qquad \textbf{c. } \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}, \qquad \textbf{d. } \sqrt[n]{3+\sin n},$$

$$\textbf{e. } \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n, \qquad \textbf{f. } \operatorname{Arctan}\left(\frac{n^2-n\cos n+(-1)^n}{\ln n+n^2}\right), \qquad \textbf{g. } \left(5\sin\frac{1}{n^2}+\frac{1}{5}\cos n\right)^n,$$

$$\textbf{h. } \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor, \qquad \textbf{i. } \left(a+\frac{b}{n}\right)^n \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont réels et } a \geqslant 0.$$

Exercice 4 : Une manipulation fine d'ε

Soit (u_n) une suite réelle telle que
$$\forall k, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{k}{n} + \frac{1}{k}.$$
Le but de cet exercice est de montrer que (u_n) converge vers 0 de deux manières distinctes.

1. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une constante C telle que
$$\forall n \geqslant 1, \quad |u_n| \leqslant \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$
   (b) En déduire que (u_n) converge vers 0.
2. Montrer directement ce résultat en choisissant judicieusement k.

Exercice 5 : Théorème de Cesàro

Étant donnée une suite complexe (u_n), on définit la suite (c_n) par
$$\forall n \geqslant 1, \quad c_n \coloneqq \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$
appelée moyenne de Cesàro de la suite (u_n).

1. On suppose dans cette question que (u_n) est convergente. Il existe donc $l \in \mathbb{C}$ tel que
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$
   On souhaite montrer que (c_n) converge vers l.

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant N_0, \quad |c_n - l| \leqslant \frac{|u_1 - l| + \cdots + |u_{N_0-1} - l|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

(b) En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad |c_n - l| \leqslant \varepsilon$$

et conclure.

2. Réciproquement, on suppose (c_n) convergente. Peut-on en déduire que (u_n) est convergente ?
3. Que dire si (u_n) est une suite réelle divergeant vers $+\infty$?

Exercice 6 : Applications du théorème de Cesàro

Dans cet exercice, on pourra utiliser librement le théorème de Cesàro.

1. Soit (u_n) une suite complexe telle que $u_{n+1} - u_n$ converge vers $l \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l.$$

2. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs convergeant vers un réel $l > 0$. Montrer que

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l.$$

Exercice 7 : Autour de Cesàro

Soit (u_n) une suite complexe convergeant vers $l \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n := \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k u_k$$

converge vers $l/2$.

2. Montrer que la suite (w_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n := \frac{\binom{n}{0} u_0 + \binom{n}{1} u_1 + \cdots + \binom{n}{n} u_n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$$

converge vers l.

Exercice 8 : Produit de Cauchy

Soit (u_n) et (v_n) deux suites complexes convergeant vers 0. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leqslant M.$$

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Limite infinie

Limite et relation d'ordre

Exercice 9 : Calcul de limite

1. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{p+1} \leqslant \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leqslant \frac{1}{p}.$$

2. En déduire la limite de la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Exercice 10 : Calcul de limite

Déterminer les limites des suites de terme général

$$\textbf{a.}\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}, \qquad \textbf{b.}\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad \textbf{c.}\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}, \qquad \textbf{d.}\ \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!}.$$

Exercice 11 : Exercice

Soit (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $[0,1]$ telles que

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers 1.

Théorèmes usuels et limites usuelles

Suite extraite

Exercice 12 : Suites divergentes

Montrer que les suites suivantes, définies par leur terme général, sont divergentes

$$\textbf{a.}\ \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right), \qquad \textbf{b.}\ \frac{5n^2+\sin n}{2(n+1)^2\cos\frac{n\pi}{5}}, \qquad \textbf{c.}\ \frac{2+n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right)}.$$

Exercice 13 : Autour de la notion d'extractrice

1. Soit (u_n) une suite réelle prenant un nombre fini de valeurs. Montrer que l'on peut en extraire une suite constante.
2. Soit (u_n) une suite réelle ne divergeant pas vers $+\infty$. Montrer que l'on peut en extraire une suite majorée.
3. Soit (u_n) une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes.
   — Il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers l.
   — Quel que soit $\varepsilon > 0$, l'ensemble
   $$A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - l| \leqslant \varepsilon\}$$
   est infini.

   Donner un exemple d'une suite non convergente vérifiant cette propriété.
4. Montrer que de toute suite réelle divergeant vers $+\infty$, on peut extraire une suite croissante.

Exercice 14 : Convergence et suites extraites

1. Soit (u_n) une suite réelle croissante. On suppose que (u_n) admet une suite extraite convergente. Montrer que (u_n) converge.
2. Montrer que si les suites extraites de terme général u_{3n}, u_{3n+1} et u_{3n+2} convergent vers le même complexe l, alors (u_n) converge vers l.
3. On suppose qu'il existe un réel l tel que pour tout entier $k \geqslant 2$, la suite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Peut-on en déduire la convergence de la suite (u_n) ?

8.6.3 Propriétés de $\mathbb{R}$

Voisinage

Densité

Exercice 15 : Partie dense

On pose

$$A := \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

1. Montrer que

$$\forall x, y \in A, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}, \qquad nx + my \in A$$
$$\forall x, y \in A, \qquad xy \in A.$$

2. En déduire que la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \left(\sqrt{2}-1\right)^n$$

est une suite d'éléments de A convergeant vers 0.

3. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Propriété de la borne supérieure

Exercice 16 : Comparaison de deux ensembles

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (a,b) \in A \times B \quad a \leqslant b$$

1. Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.
2. Si l'on suppose maintenant que quel que soit $(a,b) \in A \times B$ on a $a < b$, peut-on en conclure que $\sup(A) < \inf(B)$?

Exercice 17 : Borne supérieure

Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \sup(A) - \inf(A).$$

Exercice 18 : Calcul de bornes supérieures

Déterminer, si elles ou ils existent, les bornes supérieures, bornes inférieures, plus grands éléments, plus petits éléments des parties de $\mathbb{R}$ suivantes.

$$\begin{aligned} A &:= \left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{p} : (n,p) \in {\mathbb{N}^*}^2\right\}, \\ B &:= \left\{\frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}^*\right\}, \\ C &:= \left\{\frac{1}{n}+(-1)^p : (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}\right\}. \end{aligned}$$

Exercice 19 : Bornes supérieures

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées. Soit λ un nombre réel. On pose

$$\begin{aligned} C &:= \{a+b : a \in A \quad b \in B\}, \\ D &:= \{\lambda \cdot a : a \in A\}, \\ E &:= \{a \cdot b : a \in A \quad b \in B\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que $\sup(C)$ existe et vaut $\sup(A)+\sup(B)$.
2. Que peut-on dire de l'existence et de la valeur de $\sup(D)$, $\sup(E)$? On pourra formuler des hypothèses supplémentaires adéquates sur A et B.

Exercice 20 : Un théorème de point fixe

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to [a,b]$ une application croissante. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = c$. Pour cela, on pourra considérer la partie

$$A := \{x \in [a,b] \mid f(x) \geqslant x\}.$$

8.6.4 Suite monotone

Suite monotone

Exercice 21 : Moyenne arithmético-géométrique

Soit a et b deux réels positifs. Soit (u_n) et (v_n) les suites initialisées par $u_0 := a$ et $v_0 := b$ et définies par la récurrence

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} := \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} := \frac{u_n+v_n}{2}.$$

1. (a) Montrer que (u_n) et (v_n) sont bien définies, puis que

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n \leqslant v_n.$$

   (b) En déduire la monotonie des suites (u_n) et (v_n).
   (c) Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite que l'on note $M(a, b)$.
2. (a) Calculer $M(0, 1)$ et $M(1, 1)$.
   (b) Montrer que si $0 \leqslant x \leqslant y$, alors $M(1, x) \leqslant M(1, y)$.

Exercice 22 : Suite définie implicitement

Pour tout $n \geqslant 2$, on définit la fonction $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) \coloneqq x^n - nx + 1.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe un unique $x \in [0, 1]$ tel que $f_n(x) = 0$. On note cet élément u_n.
2. Pour tout $n \geqslant 2$, déterminer le signe de $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n)$. En déduire que (u_n) est monotone.
3. Montrer que (u_n) converge vers 0.
4. Montrer que

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

   c'est-à-dire que nu_n tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Étude des suites définies par $u_{n+1} \coloneqq f(u_n)$

Exercice 23 : Quelques applications directes du cours

Étudier les suites (u_n) définies ci-dessous.

1. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq u_n(1 - u_n)$.
2. $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq 2\ln(1 + u_n)$.
3. $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq \frac{3}{2+u_n}$.

Exercice 24 : Un point fixe attractif, puis répulsif

Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = a \cdot \frac{1 + a^2}{1 + x^2}.$$

Soit $\alpha \geqslant 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 \coloneqq \alpha$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq f(u_n).$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence éventuelle de la suite (u_n).

1. (a) Étudier la monotonie de f ainsi que la position de son graphe par rapport à la première bissectrice. On montrera en particulier que $x \in \mathbb{R}_+$ est un point fixe de f si et seulement si il est racine de

$$P(x) \coloneqq (x - a)(x^2 + ax + (1 + a^2)).$$

   (b) Tracer sur le même dessin le graphe de f ainsi que la première bissectrice.
2. (a) Étudier la monotonie de $f \circ f$.
   (b) Montrer que $x \in \mathbb{R}_+$ est un point fixe de $f \circ f$ si et seulement si il est racine du polynôme

$$Q(x) \coloneqq (x - a)(x^2 + ax + (1 + a^2))(x^2 - a(1 + a^2)x + 1).$$

   (c) Étudier la position du graphe de $f \circ f$ par rapport à la première bissectrice en discutant selon les valeurs de a. Dans les différents cas, on tracera le graphe de $f \circ f$ ainsi que la première bissectrice.

Dans la suite de l'exercice, on définit la suite (v_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \coloneqq u_{2n}.$$

On remarquera que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)$.

3. Montrer que la suite (v_n) est monotone et bornée.
4. On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.
   (a) Montrer que (v_n) converge et calculer sa limite.
   (b) Qu'en déduire pour la suite (u_n) ?
5. Dans cette question, on suppose que $a > 1$.
   (a) Si $\alpha < a$, montrer que (v_n) converge vers un réel a_1 strictement inférieur à a. En déduire que la suite (u_n) diverge.
   (b) Que dire si $u_0 > a$? Si $u_0 = a$?

Suites adjacentes

Exercice 25 : Suites adjacentes

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes.

$$\textbf{a.}\ u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

$$\textbf{b.}\ u_n := \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{et} \quad v_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n,$$

Exercice 26 : e est irrationnel

Le but de cet exercice est de montrer que e est un nombre irrationnel.

1. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad v_n := u_n + \frac{1}{nn!}.$$

   (a) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (b) On note l leur limite commune. On suppose que l est rationnel et on note $l = \frac{p}{q}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}.$$

   (c) Conclure à une absurdité en choisissant $n = q$.
2. Le but de cette question est de montrer que $l = \mathrm{e}$.
   (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

   (b) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

   puis conclure.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Exercice 27 : Récurrence

Soit (u_n) une suite complexe telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{2^n}.$$

On définit la suite (m_n) en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n := \max(|u_n|, |u_{n+1}|)$.

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m_{n+1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) m_n.$$

2. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m_n \leqslant \mathrm{e}^2 m_0$$
puis que (u_n) est bornée.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe donc une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge.

3. Déterminer un réel a tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_{\varphi(n)} - u_n\right| \leqslant \frac{a}{2^n}.$$
4. En déduire que la suite (u_n) converge.

Chapitre 9

Matrices

9.1 Matrice **87**
- 9.1.1 Matrice 87
- 9.1.2 Matrice carrée 88

9.2 Opérations sur les matrices **90**
- 9.2.1 Combinaison linéaire 90
- 9.2.2 Produit 91
- 9.2.3 Calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ 92
- 9.2.4 Matrice inversible 93

9.3 Matrice et système linéaire **94**
- 9.3.1 Interprétation matricielle 94
- 9.3.2 Calcul d'inverse, système de Cramer 95
- 9.3.3 Opérations élémentaires par produit matriciel 96
- 9.3.4 Matrice échelonnée 97

9.4 Qcm **98**
- 9.4.1 Matrice 98
- 9.4.2 Opérations sur les matrices 98
- 9.4.3 Matrice et système linéaire 99

9.5 Exercices **100**
- 9.5.1 Matrice 100
- 9.5.2 Opérations sur les matrices 100
- 9.5.3 Matrice et système linéaire 102

9.1 Matrice

9.1.1 Matrice

Définition 9.1.1

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $q, p \in \mathbb{N}$. On appelle *matrice* à q lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute famille $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1, q]\!] \times [\![1, p]\!]$.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{q,1} & \cdots & a_{q,p} \end{pmatrix} \; i \end{array}$$

On note $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à q lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque

⇨ On appelle *matrice nulle* à q lignes et p colonnes et on note $0_{q,p}$ ou plus simplement 0 la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 9.1.2

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, on définit

- la famille $(l_1, \dots, l_q)$ des *vecteurs ligne* de A, où pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $l_i := (a_{i,1}, \dots, a_{i,p}) \in \mathbb{K}^p$.
- la famille $(c_1, \dots, c_p)$ des *vecteurs colonne* de A, où pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $c_j := (a_{1,j}, \dots, a_{q,j}) \in \mathbb{K}^q$.

Définition 9.1.3

On dit qu'une matrice A est

- une *matrice colonne* lorsqu'elle ne possède qu'une seule colonne.
- une *matrice ligne* lorsqu'elle ne possède qu'une seule ligne.

Remarque

⇨ Si $n \in \mathbb{N}$, l'application φ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, qui à $(x_1, \dots, x_n)$ associe

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est une bijection. Elle permet d'identifier $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, identification que nous ferons parfois dans ce cours. Cependant, on ne se permettra pas d'identifier $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, cette identification permet de considérer que les vecteurs colonne de A sont des éléments de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ et donc des matrices colonne.

Définition 9.1.4

On appelle *transposée* de $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et on note $A^\top$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs lignes de A. Autrement dit

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \forall j \in [\![1, q]\!], \quad \left[A^\top\right]_{i,j} := a_{j,i}.$$

Exemple

⇨ Si on pose

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K}), \quad \text{alors} \quad A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K}).$$

Proposition 9.1.5

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors

$$\left(A^\top\right)^\top = A.$$

9.1.2 Matrice carrée

Définition 9.1.6

On dit qu'une matrice est *carrée* lorsqu'elle possède autant de lignes que de colonnes. L'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 9.1.7

On appelle *matrice identité* et on note I_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad [I_n]_{i,j} := \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 9.1.8

— On dit que $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \Longrightarrow d_{i,j} = 0.$$

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales à n lignes et n colonnes.

— Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on note $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la matrice

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

— Les matrices $\mathrm{Diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ sont appelées *matrices scalaires*.

Définition 9.1.9

On dit que $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i > j \Longrightarrow t_{i,j} = 0.$$

On note $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à n lignes et n colonnes. Graphiquement, une matrice triangulaire supérieure T s'écrit

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Remarque

⇨ On dit qu'une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire inférieure lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad j > i \Longrightarrow t_{i,j} = 0.$$

Autrement dit T est triangulaire inférieure si et seulement si $T^\top$ est triangulaire supérieure.

Définition 9.1.10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— On dit que A est *symétrique* lorsque $A^\top = A$ c'est-à-dire lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad a_{j,i} = a_{i,j}.$$

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques à n lignes et n colonnes.

— On dit que A est *antisymétrique* lorsque $A^\top = -A$ c'est-à-dire lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad a_{j,i} = -a_{i,j}.$$

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques à n lignes et n colonnes.

Remarque

⇨ Les formes générales d'une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et d'une matrice antisymétrique $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{1,n} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 9.1.11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *trace* de A et on note $\operatorname{tr}(A)$ la somme de ses coefficients diagonaux.

$$\operatorname{tr}(A) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

9.2 Opérations sur les matrices

9.2.1 Combinaison linéaire

Définition 9.2.1

— Soit $A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit $A + B$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall i \in [\![1, q]\!], \quad \forall j \in [\![1, p]\!], \quad [A + B]_{i,j} \coloneqq a_{i,j} + b_{i,j}.$$

— Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $\lambda \cdot A$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall i \in [\![1, q]\!], \quad \forall j \in [\![1, p]\!], \quad [\lambda \cdot A]_{i,j} \coloneqq \lambda a_{i,j}.$$

Remarque

⇨ Les matrices scalaires sont les λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 9.2.2

$(\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont l'élément neutre est la matrice nulle.

Définition 9.2.3

Pour tout $i \in [\![1, q]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$ on définit $E_{i,j}$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall k \in [\![1, q]\!], \quad \forall l \in [\![1, p]\!], \quad [E_{i,j}]_{k,l} \coloneqq \delta_{i,k}\delta_{j,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les matrices $E_{i,j}$ sont appelées *matrices élémentaires*.

Remarque

⇨ Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, on a

$$A = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}.$$

En particulier, $\operatorname{Vect}(E_{1,1}, \ldots, E_{1,p}, \ldots, E_{q,1}, \ldots, E_{q,p}) = \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

Proposition 9.2.4

La transposition est linéaire

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top.$$

De plus cette application est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Proposition 9.2.5

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)$$

est la décomposition de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 9.2.6

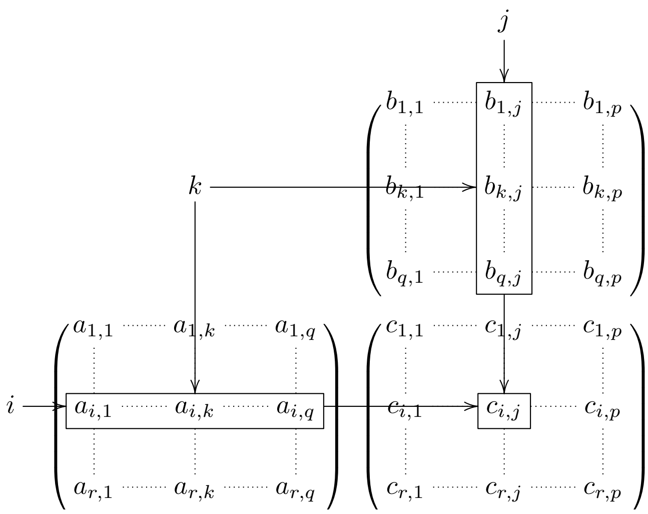
La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

9.2.2 Produit

Définition 9.2.7

Soit $A \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit AB comme la matrice de $\mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall i \in [\![1, r]\!], \quad \forall j \in [\![1, p]\!], \quad [AB]_{i,j} := \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}.$$



Remarques

⇨ Il est possible que le produit AB ait un sens sans que le produit BA en ait un. Mais si ces deux produits en ont un, en général, $AB \neq BA$. Enfin, il est possible que $AB = 0$ sans que $A = 0$ ou $B = 0$.

⇨ Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A et B *commutent* lorsque $AB = BA$.

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ alors

$$AX = Y \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q. \end{cases}$$

⇨ Si on note $C_1, \dots, C_p \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ les vecteurs colonne de $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et si $X := \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_p \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, alors

$$AX = x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p.$$

Exercice 1

⇨ Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec $B := \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ si et seulement si elle est diagonale.

Proposition 9.2.8

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors $A = 0$ si et seulement si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0.$$

Proposition 9.2.9

$$\begin{array}{llll} \forall A \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K}), & \forall B, C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), & \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, & A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC \\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K}), & \forall C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), & \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, & (\lambda A + \mu B) C = \lambda AC + \mu BC \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \forall A \in \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{K}), & \forall B \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K}), & \forall C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), & (AB) C = A(BC) \\ & & \forall A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), & AI_p = A \quad \text{et} \quad I_q A = A \end{array}$$

Proposition 9.2.10

Soit $A \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Proposition 9.2.11

Soit $r, q, p \in \mathbb{N}$, $i_2 \in [\![1, r]\!]$, $i_1, j_2 \in [\![1, q]\!]$ et $j_1 \in [\![1, p]\!]$. Alors

$$E_{i_2,j_2} E_{i_1,j_1} = \delta_{j_2,i_1} E_{i_2,j_1} = \begin{cases} 0 & \text{si } j_2 \neq i_1 \\ E_{i_2,j_1} & \text{si } j_2 = i_1. \end{cases}$$

Exercice 2

⇨ Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si c'est une matrice scalaire.

Proposition 9.2.12

— Si D et D' sont deux matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont respectivement $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n$, DD' est diagonale et ses coefficients diagonaux sont $\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n$.
— Si T et T' sont deux matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont respectivement $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n$, TT' est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n$.

9.2.3 Calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 9.2.13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$ par récurrence.
— $A^0 := I_n$
— $\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^{p+1} := A^p A$.

Proposition 9.2.14

— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \qquad \begin{array}{l} A^{p+q} = A^p A^q \\ (A^p)^q = A^{pq}. \end{array}$$

— Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, A^p et B^q commutent. De plus

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (AB)^p = A^p B^p.$$

Proposition 9.2.15

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k \qquad \text{et} \qquad A^p - B^p = (A-B)\left[\sum_{k=0}^{p-1} A^{(p-1)-k} B^k\right].$$

Définition 9.2.16

On dit qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *nilpotente* lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$.

Proposition 9.2.17

Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont nuls, alors $N^n = 0$. En particulier, N est nilpotente.

Exercice 3

⇨ On pose

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$.

Proposition 9.2.18

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Remarque

⇨ Cependant, en général, $\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(ACB)$.

Exercice 4

⇨ Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.

9.2.4 Matrice inversible

Définition 9.2.19

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *inversible* lorsqu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n.$$

Si tel est le cas, B est unique ; on la note A^{-1}. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

Remarque

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, A^{-1} l'est aussi et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Exercices 5

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 - 5A + 6I_n = 0$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

⇨ Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Montrer que $I_n + N$ est inversible.

Proposition 9.2.20

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles, il en est de même pour AB et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Proposition 9.2.21

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ possède les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned} & I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \forall A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad & AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad & A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}). \end{aligned}$$

Nous dirons que $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe, que l'on appelle *groupe linéaire*.

Proposition 9.2.22

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A^\top$ est inversible si et seulement si A l'est. De plus, si tel est le cas

$$\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top.$$

Proposition 9.2.23

Une matrice diagonale $D := \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k \neq 0.$$

Si tel est le cas

$$D^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

9.3 Matrice et système linéaire

9.3.1 Interprétation matricielle

Définition 9.3.1

On considère le *système linéaire* à q équations et p inconnues

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q. \end{cases}$$

La matrice $A := (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est appelée matrice du système. La matrice $Y := (y_i) \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ est appelée second membre. Si $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, alors $(x_1, \ldots, x_p)$ est solution du système si et seulement si $AX = Y$.

Remarque

⇨ Le système est homogène lorsque $Y = 0$. On rappelle que dans ce cas, $X = 0$ est une solution, appelée solution triviale du système.

Définition 9.3.2

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

— On appelle *noyau* de A et on note $\mathrm{Ker}\, A$ l'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0$.

$$\mathrm{Ker}\, A := \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}.$$

— On note $C_1, \ldots, C_p \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ les vecteurs colonne de A. On appelle *image* de A et on note $\mathrm{Im}\, A$ l'ensemble

$$\mathrm{Im}\, A := \{x_1C_1 + \cdots + x_pC_p : x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}\}.$$

Remarque

⇨ Ces définitions sont motivées par le fait que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}.$$

est une application linéaire dont le noyau et l'image sont respectivement $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.

Proposition 9.3.3

On considère le système linéaire $AX = Y$ où $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$.

— Ce système admet au moins une solution si et seulement si $Y \in \operatorname{Im} A$.

— Si c'est le cas, soit $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ une solution particulière. Alors l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = X_0 + \operatorname{Ker} A := \{X_0 + X : X \in \operatorname{Ker} A\}.$$

9.3.2 Calcul d'inverse, système de Cramer

Proposition 9.3.4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = Y \quad \Longleftrightarrow \quad X = BY.$$

De plus, si tel est le cas, B est l'inverse de A.

Remarque

⇨ Étant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, cette proposition affirme que s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que quels que soient $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = y_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_{1,1}y_1 + b_{1,2}y_2 + \cdots + b_{1,n}y_n \\ \quad\vdots \\ x_n = b_{n,1}y_1 + b_{n,2}y_2 + \cdots + b_{n,n}y_n \end{cases}$$

alors A est inversible et $A^{-1} = B$. Inverser une matrice revient donc à résoudre un système linéaire.

Exercice 6

⇨ Montrer que la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

Définition 9.3.5

On dit qu'un système $AX = Y$ à n équations et n inconnues est de *Cramer* lorsque $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Remarque

⇨ Le fait d'être de Cramer est une propriété qui ne dépend pas du second membre.

Proposition 9.3.6

Un système de Cramer admet une unique solution.

9.3.3 Opérations élémentaires par produit matriciel

Définition 9.3.7: Matrice de dilatation

Soit $\mu \in \mathbb{K}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Alors, il existe une et une seule matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice DA est obtenue en multipliant la $k^{\text{ième}}$ ligne de A par μ.
- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, la matrice AD est obtenue en multipliant la $k^{\text{ième}}$ colonne de A par μ.

On la note $D_k(\mu)$ et on dit que c'est une *matrice de dilatation*. De plus

$$D_k(\mu) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & k & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & (0) & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \mu & & & \\ & & & & 1 & & \\ & (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & k \end{array}$$

Proposition 9.3.8

Soit $\mu \in \mathbb{K}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Alors, la matrice de dilatation $D_k(\mu)$ est inversible et

$$[D_k(\mu)]^{-1} = D_k\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Définition 9.3.9: Matrice de transvection

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$. Alors, il existe une et une seule matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice TA est obtenue en ajoutant λ fois la $j^{\text{ième}}$ ligne de A à sa $i^{\text{ième}}$ ligne.
- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, la matrice AT est obtenue en ajoutant λ fois la i-ième colonne de A à sa j-ième colonne.

On la note $T_{i,j}(\lambda)$ et on dit que c'est une *matrice de transvection*. De plus

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} & j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & (0) & \\ & & \ddots & \\ & \lambda & & 1 \end{pmatrix} & i \end{array}$$

Proposition 9.3.10

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$. Alors, la matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ est inversible et

$$[T_{i,j}(\lambda)]^{-1} = T_{i,j}(-\lambda).$$

Définition 9.3.11: Matrice de transposition

Soit $k_1, k_2 \in [\![1, n]\!]$ tels que $k_1 \neq k_2$. Alors, il existe une et une seule matrice $\tau \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice τA est obtenue en échangeant les $k_1{}^{\text{ième}}$ et $k_2{}^{\text{ième}}$ lignes.
- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, la matrice $A\tau$ est obtenue en échangeant les $k_1{}^{\text{ième}}$ et $k_2{}^{\text{ième}}$ colonnes.

On la note τ_{k_1,k_2} et on dit que c'est une *matrice de transposition*. De plus

$$\tau_{k_1,k_2} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccccc} & & & k_1 & & & & k_2 & & & \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ \\ k_1 \\ \\ \\ \\ k_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Proposition 9.3.12

Soit $k_1, k_2 \in [\![1, n]\!]$ tels que $k_1 \neq k_2$. Alors, la matrice de transposition τ_{k_1,k_2} est inversible et

$$\tau_{k_1,k_2}^{-1} = \tau_{k_1,k_2}$$

9.3.4 Matrice échelonnée

Définition 9.3.13

On dit qu'une matrice $E \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est *échelonnée à pivots diagonaux* lorsqu'il existe $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{K}^*$ tels que

$$E = \begin{pmatrix} p_1 & \star & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & p_r & \star & \cdots \star \\ \vdots & & 0 & 0 & \cdots 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots 0 \end{pmatrix}$$

Les coefficients $p_1, \ldots, p_r$ sont appelés *pivots* de la matrice E.

Remarque

⇨ Dans le cas où la matrice échelonnée à pivots diagonaux $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est carrée, elle est inversible si et seulement si $r = n$, c'est-à-dire si et seulement si E ne possède aucune ligne de 0.

Proposition 9.3.14

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

- Alors, il existe une succession d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes transformant A en une matrice échelonnée à pivots diagonaux.
- Autrement dit, il existe des familles $Q_1, \ldots, Q_l \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $P_1, \ldots, P_m \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ de matrices d'opérations élémentaires telles que $Q_l \cdots Q_1 A P_1 \cdots P_m$ est une matrice échelonnée à pivots diagonaux.

9.4 Qcm

9.4.1 Matrice

Matrice

Matrice carrée

1. Une matrice triangulaire supérieure et symétrique est

☐ **a.** nulle ☐ **b.** triangulaire inférieure ☐ **c.** diagonale ☐ **d.** antisymétrique

9.4.2 Opérations sur les matrices

Combinaison linéaire

1. Si M est une matrice carrée telle que $M^\top = 2M$, alors

☐ **a.** les coefficients diagonaux de M sont nuls ☐ **b.** M est une matrice diagonale
☐ **c.** M est une matrice symétrique ☐ **d.** M est nulle

2. Laquelle des hypothèses suivantes n'implique pas que la matrice A soit aussi diagonale ?

☐ **a.** $A^\top$ est diagonale ☐ **b.** $A - I$ est diagonale ☐ **c.** A^2 est diagonale ☐ **d.** $2A$ est diagonale

3. Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = M^\top$. Alors $\operatorname{Ker}(\varphi + \operatorname{Id})$ est l'espace vectoriel

☐ **a.** $\{0\}$ ☐ **b.** $\{-I\}$ ☐ **c.** des matrices symétriques ☐ **d.** des matrices antisymétriques

Produit

1. Si M est une matrice 3×3, combien de produits de coefficients doit-on effectuer pour calculer M^2 ?

☐ **a.** 9 ☐ **b.** 18 ☐ **c.** 27 ☐ **d.** 81

2. Soit

$$M \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice $(M - I_3)(M - 2I_3)(M - 3I_3)$ vaut

☐ **a.** $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ☐ **b.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ **c.** $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ☐ **d.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

3. Combien vaut la matrice $(E_{1,2} + E_{2,1})^2$?

☐ **a.** $2E_{1,1}$ ☐ **b.** $2E_{2,2}$ ☐ **c.** $E_{1,2} + E_{2,1}$ ☐ **d.** $E_{1,1} + E_{2,2}$

4. On calcule tous les produits $E_{1,2}E_{i,j}$. Combien de ces produits sont non nuls ?

☐ **a.** n ☐ **b.** $n^2 - n$ ☐ **c.** n^3 ☐ **d.** aucun car $E_{1,2}$ est non nulle

5. Combien de matrices $E_{i,j}$ commutent avec $E_{1,1}$?

☐ **a.** 1 ☐ **b.** $(n-1)^2$ ☐ **c.** $(n-1)^2 + 1$ ☐ **d.** n^2

6. On pose

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors A et B commutent si et seulement si

☐ **a.** A est triangulaire supérieure ☐ **b.** $c = 0$ et $a = d$ ☐ **c.** $a = c = d = 0$ ☐ **d.** $b = 0$

7. Soit M la matrice dont tous les coefficients valent 0 sur la diagonale et 1 ailleurs. Les coefficients de M^2 valent

☐ **a.** 0 sur la diagonale et $n-1$ ailleurs ☐ **b.** $n-2$ sur la diagonale et $n-1$ ailleurs
☐ **c.** $n-1$ sur la diagonale et $n-2$ ailleurs ☐ **d.** $n-2$ sur la diagonale et n ailleurs

8. Si A est une matrice carrée, $A^\top A$ est toujours

☐ **a.** triangulaire supérieure ☐ **b.** diagonale ☐ **c.** symétrique ☐ **d.** antisymétrique

Calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Matrice inversible

1. Soit A, B deux matrices carrées. Si A et B ne sont pas inversibles, laquelle des matrices suivantes peut quand même être inversible ?

   ☐ **a.** AB ☐ **b.** $2A$ ☐ **c.** $A + B$ ☐ **d.** $A^\top$

2. Si A, B sont deux matrices carrées inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'inverse de $(AB)^\top$ est

   ☐ **a.** $\left(A^{-1}\right)^\top \left(B^{-1}\right)^\top$ ☐ **b.** $\left(B^{-1}\right)^\top \left(A^{-1}\right)^\top$ ☐ **c.** $B^{-1}A^{-1}$ ☐ **d.** $A^{-1}B^{-1}$

3. Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $ABC = 0$, alors on peut affirmer que

   ☐ **a.** $CBA = 0$ ☐ **b.** A, B ou C est non inversible
   ☐ **c.** A, B ou C est nulle ☐ **d.** A, B et C sont nulles

9.4.3 Matrice et système linéaire

Interprétation matricielle

Calcul d'inverse, système de Cramer

Opérations élémentaires par produit matriciel

Matrice échelonnée

9.5 Exercices

9.5.1 Matrice

Matrice

Matrice carrée

9.5.2 Opérations sur les matrices

Combinaison linéaire

Produit

Exercice 1 : Sous-structures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

où a, b, c, d sont des nombres complexes.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, stable par produit.
2. Les éléments de E commutent-ils entre eux ?
3. Soit $A, B \in E$. Est-il possible d'avoir $AB = 0$ sans que $A = 0$ ou $B = 0$?

Exercice 2 : Produit

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad AXB = 0.$$

Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 3 : Crochet de Lie

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On note $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et on pose

$$\mathcal{C} := \{AD - DA : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}.$$

1. Montrer que les matrices de $\mathcal{C}$ ont une diagonale nulle.
2. Réciproquement, montrer que toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la diagonale est nulle est dans $\mathcal{C}$.

Exercice 4 : Équation matricielle

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer l'ensemble des matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$X + \operatorname{tr}(X)\, A = B.$$

Calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice 5 : Calcul de puissances successives

Calculer la puissance n-ième des matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : Matrices nilpotentes

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices nilpotentes qui commutent.

1. Montrer que AB est nilpotente.
2. Montrer que $A + B$ est nilpotente.

Exercice 7 : Trace et matrices symétriques

1. Montrer que pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$$\operatorname{tr}\left(X^\top X\right) \geqslant 0.$$

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques.

2. Montrer que
$$\operatorname{tr}\left((AB-BA)^\top (AB-BA)\right) = 2\left[\operatorname{tr}\left(A^2B^2\right) - \operatorname{tr}(ABAB)\right].$$
3. En déduire que
$$\operatorname{tr}(ABAB) \leqslant \operatorname{tr}\left(A^2B^2\right).$$

Exercice 8 : Norme matricielle

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit $\|A\|$ par
$$\|A\| \coloneqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

1. Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\| \qquad \text{et} \qquad \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|.$$
2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que
$$A^k - B^k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i(A-B)B^{k-1-i}.$$
   (b) En déduire que si $\|A\| \neq \|B\|$
$$\frac{\left\|A^k - B^k\right\|}{\|A-B\|} \leqslant \frac{\|A\|^k - \|B\|^k}{\|A\| - \|B\|}.$$

Exercice 9 : Puissances

On pose
$$A \coloneqq \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et I_3, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = \lambda A + \mu I_3$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
3. Donner une expression explicite de a_n et b_n, puis de A^n.

Matrice inversible

Exercice 10 : Déterminant

Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})A + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})I = 0$.
2. Montrer que A est inversible si et seulement si $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$.

Exercice 11 : Calcul d'inverse

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On définit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par
$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad a_{i,j} \coloneqq \begin{cases} a^{j-i} & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En introduisant la matrice N définie par
$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad n_{i,j} \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

9.5.3 Matrice et système linéaire

Interprétation matricielle

Calcul d'inverse, système de Cramer

Exercice 12 : Calcul d'inverse

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

$$\textbf{a.}\ \begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \textbf{b.}\ \begin{pmatrix}1&2&-1\\3&0&-2\\-3&6&0\end{pmatrix},\quad \textbf{c.}\ \begin{pmatrix}0&1&0&2\\2&1&1&1\\1&2&1&0\\2&2&1&2\end{pmatrix},\quad \textbf{d.}\ \begin{pmatrix}4&2&3\\1&2&9\\5&2&1\end{pmatrix},$$

$$\textbf{e.}\ \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix},\quad \textbf{f.}\ \begin{pmatrix}0&1&2\\1&3&5\\1&1&0\end{pmatrix},\quad \textbf{g.}\ \begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&1\\0&1&1\end{pmatrix},\quad \textbf{h.}\ \begin{pmatrix}1&\bar{z}&\bar{z}^2\\z&1&\bar{z}\\z^2&z&1\end{pmatrix}\quad \text{où } z\in\mathbb{C}.$$

Exercice 13 : Réduction

On pose

$$A := \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre le système linéaire $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déduire 3 matrices colonne $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulles ainsi que 3 réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et
$$\forall k \in [\![1,3]\!],\quad AX_k = \lambda_k X_k.$$
On choisira X_1, X_2, X_3 de manière à ce que leur second coefficient soit égal à 1.

Dans la suite, on note $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont les vecteurs colonne sont X_1, X_2 et X_3.

2. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
3. Déterminer, sans calcul brutal, une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telle que $AP = PD$.
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de P, D^n et P^{-1}. Puis, déterminer une expression de A^n en fonction de n seulement.

Pivot de Gauss

Exercice 14 : Systèmes linéaires

Soit $p \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\textbf{a.}\ \begin{cases}2px + y = p\\ 2x + py = p\end{cases}\qquad \textbf{b.}\ \begin{cases}x + py + 2z = 1\\ px + y + 2z = 1\\ x + 2py + 3z = 0\end{cases}\qquad \textbf{c.}\ \begin{cases}px + py + 4z = 1\\ 2x + y + pz = 1\\ x + 2y + z = 0\end{cases}$$

$$\textbf{d.}\ \begin{cases}x + y + z = 1-p\\ px + (1+p)y + (1+p)z = p - p^2\\ px + (1-p)y + (1-p)z = p^2\end{cases}\qquad \textbf{e.}\ \begin{cases}x - 2y + 3z = 1\\ 2x + py + 6z = 6\\ -x + 3y + (p-3)z = 0.\end{cases}$$

Exercice 15 : Exercice

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases}x + y + z + t = 3\\ x + my + z - mt = m+2\\ mx - y - mz - t = -1.\end{cases}$$

Exercice 16 : Exercice

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Résoudre le système

$$\begin{cases}x + y + z = a\\ x + \mathrm{j}y + \mathrm{j}^2 z = b\\ x + \mathrm{j}^2 y + \mathrm{j}z = c\end{cases}$$

et donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que les solutions soient réelles.

Opérations élémentaires par produit matriciel

Matrice échelonnée

Chapitre 10

Dénombrement

10.1 Cardinal **105**
- 10.1.1 Équipotence 105
- 10.1.2 Ensemble fini, cardinal 106

10.2 Dénombrement **107**
- 10.2.1 Dénombrement élémentaire 107
- 10.2.2 Arrangement, combinaison 109

10.3 Qcm **113**
- 10.3.1 Cardinal 113
- 10.3.2 Dénombrement 113

10.4 Exercices **115**
- 10.4.1 Cardinal 115
- 10.4.2 Dénombrement 116

10.1 Cardinal

10.1.1 Équipotence

Définition 10.1.1

Soit A et B deux ensembles. On dit que A est *équipotent* à B lorsqu'il existe une bijection de A dans B.

Proposition 10.1.2

La relation « est équipotent à » est une relation d'équivalence.

Remarques

- ⇨ Une fois que nous aurons défini le cardinal d'un ensemble fini, nous verrons que deux ensembles finis sont équipotents si et seulement si ils ont le même nombre d'éléments.
- ⇨ Il est possible qu'un ensemble soit équipotent à l'une de ses parties strictes ; ces ensembles sont infinis. Par exemple l'application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$ qui à n associe $n+1$ est une bijection, ce qui montre que $\mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{N}^*$. Pourtant $\mathbb{N}^*$ est une partie stricte de $\mathbb{N}$. De même, l'application f de $[0,1]$ dans $[0,2]$ qui à x associe $2x$ est une bijection. Pourtant $[0,1]$ est une partie stricte de $[0,2]$.
- ⇨ Il existe des ensembles infinis qui ne sont pas équipotents. Par exemple, on peut montrer que, quel que soit l'ensemble X, les ensembles X et $\mathcal{P}(X)$ ne sont pas équipotents. En particulier $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne sont pas équipotents. Il existe donc des ensembles infinis qui ont « plus d'éléments » que d'autres.
- ⇨ On dit qu'un ensemble est *dénombrable* lorsqu'il est équipotent à $\mathbb{N}$. On peut montrer que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. On peut montrer cependant que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. On dit qu'un ensemble est *au plus dénombrable* lorsqu'il est fini ou dénombrable.

10.1.2 Ensemble fini, cardinal

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[\![1,n]\!] := \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}$. En particulier $[\![1,0]\!] = \varnothing$, $[\![1,1]\!] = \{1\}$, $[\![1,2]\!] = \{1,2\}$, $[\![1,3]\!] = \{1,2,3\}$, etc.

Définition 10.1.3

On dit qu'un ensemble A est *fini* lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que A est équipotent à $[\![1,n]\!]$. On dit qu'il est *infini* dans le cas contraire.

Définition 10.1.4

Soit A un ensemble fini. Alors il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que A est équipotent à $[\![1,n]\!]$. On l'appelle *cardinal* de A et on le note $\mathrm{Card}(A)$ ou $|A|$.

Remarques

- ⇨ Un ensemble A est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si il existe une bijection de $[\![0,n[\![$ dans A.
- ⇨ Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leqslant b+1$. L'ensemble $[\![a,b]\!]$ est fini de cardinal $b-a+1$.

Proposition 10.1.5

Soit A un ensemble fini et B un ensemble. Alors, A et B sont équipotents si et seulement si B est fini et $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$.

Exercices 1

- ⇨ Dénombrer les couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3a+b=833$.
- ⇨ On a utilisé 6921 chiffres (les caractères d'imprimerie) pour numéroter les pages d'un dictionnaire. Combien de pages ce dictionnaire contient-il ? Chaque page est numérotée une seule fois, la première portant le numéro 1.

Définition 10.1.6

Soit A une partie de $\mathbb{N}$.

- — Si A est fini, il est l'image d'une unique application strictement croissante de $[\![1,\mathrm{Card}(A)]\!]$ dans $\mathbb{N}$.
- — Sinon, A est infini et il est l'image d'une unique application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Une telle application est appelée une *énumération* de A.

Proposition 10.1.7

Une partie de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée.

Proposition 10.1.8

Soit E un ensemble fini et A une partie de E. Alors

- — A est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.
- — $A = E$ si et seulement si $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$.

Proposition 10.1.9

Soit E et F deux ensembles. Alors
- Si F est fini, il existe une injection de E dans F si et seulement si E est fini et $\operatorname{Card}(E) \leqslant \operatorname{Card}(F)$.
- Si E est fini et F est non vide, il existe une surjection de E dans F si et seulement si F est fini et $\operatorname{Card}(F) \leqslant \operatorname{Card}(E)$.
- Si l'un des ensembles est fini, il existe une bijection de E dans F si et seulement si l'autre est fini et $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$.

Proposition 10.1.10: Principe des tiroirs

Soit E et F deux ensembles finis tels que $\operatorname{Card}(F) < \operatorname{Card}(E)$ et f une application de E dans F. Alors, il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.

Exercices 2

⇨ Soit $n \geqslant 2$. En supposant que la relation « est ami avec » est symétrique, montrer que dans une assemblée de n personnes, il y en a au moins deux qui ont le même nombre d'amis.

⇨ Soit $x_1, \dots, x_{n+1} \in [0,1]$. Montrer qu'il existe $i, j \in [\![1, n+1]\!]$ tels que $i \neq j$ et

$$|x_i - x_j| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Proposition 10.1.11

Soit E un ensemble fini, F un ensemble et f une application de E dans F. Alors
- $f(E)$ est un ensemble fini et $\operatorname{Card}(f(E)) \leqslant \operatorname{Card}(E)$
- $\operatorname{Card}(f(E)) = \operatorname{Card}(E)$ si et seulement si f est injective.

Si de plus F est un ensemble fini.
- $\operatorname{Card}(f(E)) \leqslant \operatorname{Card}(F)$
- $\operatorname{Card}(f(E)) = \operatorname{Card}(F)$ si et seulement si f est surjective.

Proposition 10.1.12

Soit E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F.
- Si f est injective et $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$, alors f est bijective.
- Si f est surjective et $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$, alors f est bijective.

Autrement dit, si $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$, alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est bijective} \iff f \text{ est surjective.}$$

10.2 Dénombrement

10.2.1 Dénombrement élémentaire

Proposition 10.2.1

Soit E un ensemble fini et A, B deux parties disjointes de E, c'est-à-dire telles que $A \cap B = \varnothing$. Alors

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B).$$

Remarques

⇨ Le « ou exclusif » se traduit donc par un $+$ en dénombrement.

⇨ Si A et B sont deux parties disjointes, leur réunion est parfois notée $A \sqcup B$.

Proposition 10.2.2

Soit E un ensemble fini.
- Si A est une partie de E

$$\operatorname{Card}(\bar{A}) = \operatorname{Card}(E) - \operatorname{Card}(A).$$

— Si A et B sont deux parties de E

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B) - \operatorname{Card}(A \cap B).$$

— Si $(A_1, \dots, A_n)$ est une partition de E, alors

$$\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(A_1) + \cdots + \operatorname{Card}(A_n).$$

Remarque

⇨ L'avantage du passage au complémentaire est qu'il permet de prendre la négation de la propriété qui définit l'ensemble. Cela donne parfois une phrase plus simple à manipuler et donc un ensemble plus simple à dénombrer.

Exercices 3

⇨ Quel est le nombre d'entiers entre 1 et 100 qui ne sont pas divisibles par 3 ?

⇨ Dénombrer

$$A \coloneqq \{n \in [\![1, 100]\!] \mid 2|n \text{ ou } 3|n\}.$$

⇨ Quel est le nombre de rythmes de n temps que l'on peut composer uniquement avec des noires (1 temps) et des blanches (2 temps) ?

Proposition 10.2.3: Formule du crible

Soit $A_1, \dots, A_n$ des parties d'un même ensemble fini E. Alors

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

Remarque

⇨ Par exemple, pour $n = 3$, la formule du crible s'écrit

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \operatorname{Card}(A_1) + \operatorname{Card}(A_2) + \operatorname{Card}(A_3) \\ &\quad - [\operatorname{Card}(A_2 \cap A_3) + \operatorname{Card}(A_1 \cap A_3) + \operatorname{Card}(A_1 \cap A_2)] \\ &\quad + \operatorname{Card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).\end{aligned}$$

Proposition 10.2.4

— Si A et B sont deux ensembles finis, alors $A \times B$ est fini et

$$\operatorname{Card}(A \times B) = \operatorname{Card}(A) \operatorname{Card}(B).$$

Plus généralement, si $A_1, \dots, A_n$ sont des ensembles finis, $A_1 \times \cdots \times A_n$ est fini et

$$\operatorname{Card}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{Card}(A_k).$$

— Si A est un ensemble fini et $n \in \mathbb{N}$, alors A^n est fini et

$$\operatorname{Card}(A^n) = \operatorname{Card}(A)^n.$$

Remarque

⇨ La formule $\operatorname{Card}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \operatorname{Card}(A_1) \cdots \operatorname{Card}(A_n)$ dit simplement que lorsque l'on doit faire une succession « et » de choix indépendants, on dénombre ces choix et on les multiplie.

Exercices 4

⇨ Montrer que dans un village de 700 personnes, deux au moins ont les mêmes initiales.

⇨ Combien de menus différents peut-on faire avec 4 entrées, 6 plats et 2 desserts ?

⇨ Quel est le nombre de mots de 4 lettres contenant au moins un « e » ?

Proposition 10.2.5

— Soit E et F deux ensembles finis. Alors $\mathcal{F}(E,F) = F^E$ est fini et

$$\text{Card}\left(\mathcal{F}(E,F)\right) = \text{Card}\left(F^E\right) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}.$$

— Soit E un ensemble fini. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et

$$\text{Card}\left(\mathcal{P}(E)\right) = 2^{\text{Card}(E)}.$$

Exercice 5

⇨ Quel est le nombre de possibilités de répartir p boules distinctes dans n urnes distinctes ?

⇨ Une urne contient n boules distinctes. On effectue p tirages successifs avec remise (c'est-à-dire que l'on remet la boule dans l'urne après chaque tirage). Combien y-a-t-il de possibilités ?

⇨ De combien de manières peut-on descendre $n+1$ marches (donc n « paliers »), en en sautant éventuellement certaines ?

Proposition 10.2.6: Lemme des bergers

Soit E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall y \in F, \quad \text{Card}\left(f^{-1}\left(\{y\}\right)\right) = p.$$

Alors $\text{Card}(E) = p\,\text{Card}(F)$.

Remarque

⇨ Soit E l'ensemble des pattes des moutons foulant un pré, F l'ensemble des moutons du pré et f l'application de E dans F qui à chaque patte associe son propriétaire. Comme chaque mouton a 4 pattes

$$\forall m \in F, \quad \text{Card}\left(f^{-1}\left(\{m\}\right)\right) = 4.$$

On en déduit que le nombre de pattes foulant le pré est égal à quatre fois le nombre de moutons. C'est de cet exemple que la proposition précédente tire son nom de « lemme des bergers ».

10.2.2 Arrangement, combinaison

Définition 10.2.7: p-listes

Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}$. On appelle *p-liste* d'éléments de E tout p-uplet $(a_1, \dots, a_p) \in E^p$.

Exercice 6

⇨ Si $E = \{1,2,3\}$, donner les 2-listes d'éléments de E.

Remarques

⇨ Les p-listes d'éléments de E sont les fonctions de $[\![1,p]\!]$ dans E.

⇨ Choisir une p-liste, c'est choisir p éléments de E en tenant compte de l'*ordre* et en autorisant les *répétitions*.

Proposition 10.2.8: Nombre de listes

Soit E un ensemble de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$. Alors, il existe

$$n^p$$

p-listes d'éléments de E.

Définition 10.2.9: p-arrangements

Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}$. On appelle *p-arrangement* d'éléments de E toute p-liste $(a_1, \dots, a_p) \in E^p$ telle que

$$\forall i,j \in [\![1,p]\!], \quad i \neq j \quad \Longrightarrow \quad a_i \neq a_j.$$

Exercice 7

➯ Si $E = \{1, 2, 3\}$, donner les 2-arrangements d'éléments de E.

Remarques

➯ Les p-arrangements d'éléments de E sont les fonctions injectives $[\![1, p]\!]$ dans E.

➯ Choisir un p-arrangement, c'est choisir p éléments de E en tenant compte de l'*ordre* et en n'autorisant pas les *répétitions*.

Proposition 10.2.10: Nombre d'arrangements

Soit E un ensemble de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$. Alors il existe

$$A_n^p := \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

p-arrangements d'éléments de E.

Remarque

➯ Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, alors

$$A_n^p = \underbrace{n\,(n-1)\cdots(n-(p-1))}_{p \text{ termes}}.$$

Exercices 8

➯ On répartit p boules distinctes dans n urnes distinctes. Quel est le nombre de répartitions pour lesquelles chaque urne contient au plus une boule ?

➯ Une urne contient n boules distinctes. On effectue p tirages successifs sans remise. Combien y-a-t-il de possibilités ?

Proposition 10.2.11

— Il existe A_n^p injections d'un ensemble à $p \in \mathbb{N}$ éléments dans un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments.
— Il existe $n!$ bijections d'un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments dans un ensemble à n éléments.

Remarque

➯ En particulier, si E est un ensemble à n éléments, il existe $n!$ bijections de E dans E. De telles applications sont appelées des *permutations* de E.

Exercice 9

➯ Combien d'anagrammes peut-on former avec les mots « maths », « chimie » et « anagramme » ?

Définition 10.2.12: p-combinaisons

Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}$. On appelle *p-combinaison* d'éléments de E toute partie de E à p éléments.

Remarque

➯ Choisir une p-combinaison, c'est choisir p éléments de E sans tenir compte de l'*ordre* et en n'autorisant pas les *répétitions*.

Proposition 10.2.13: Nombre de combinaisons

Soit E un ensemble de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$. Alors il existe

$$C_n^p := \begin{cases} \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

p-combinaisons d'éléments de E.

Remarques

⇨ Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, alors

$$C_n^p = \frac{\overbrace{n\,(n-1)\cdots(n-(p-1))}^{p \text{ termes}}}{p!}.$$

⇨ Le nombre de combinaisons C_n^p est aussi noté $\binom{n}{p}$. Nous utiliserons par la suite cette notation qui est la notation internationale.

Exercices 10

⇨ Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. Dénombrer les tirages possibles si on tire 3 boules
- successivement et avec remise.
- successivement et sans remise.
- simultanément.

⇨ Un code de coffre-fort est composé de 6 chiffres entre 0 et 9 dont l'ordre compte. Dénombrer
- tous les codes possibles.
- les codes dont tous les chiffres sont distincts.
- les codes ne contenant pas 0.
- les codes contenant au plus deux fois le chiffre 1.
- les codes contenant autant de chiffres pairs que de chiffres impairs.
- les codes contenant la succession 123 quelque part.
- les codes strictement croissants.

⇨ Quel est le nombre de manières de répartir p boules indiscernables dans n urnes distinctes sachant qu'on ne peut pas mettre plus d'une boule par urne ?

⇨ Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x_1 + \cdots + x_n = p$ dans $\{0,1\}^n$.

⇨ Combien peut-on former de mots contenant p fois la lettre O et q fois la lettre I ?

⇨ Quel est le nombre de manières de répartir p boules indiscernables dans n urnes distinctes ?

⇨ Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x_1 + \cdots + x_n = p$ dans $\mathbb{N}^n$.

⇨ Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

⇨ Combien y a-t-il d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

Proposition 10.2.14

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in [\![0, n]\!], \qquad & \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}\\
\forall n, p \in \mathbb{N}, \qquad & \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}\\
\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \qquad & \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.
\end{aligned}$$

Remarque

⇨ La dernière formule est parfois appelée « formule du capitaine » ou formule du « comité président ».

Proposition 10.2.15

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \qquad & \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n\\
\forall a, b, n \in \mathbb{N}, \qquad & \sum_{p=0}^{n} \binom{a}{p}\binom{b}{n-p} = \binom{a+b}{n}.
\end{aligned}$$

Remarque

⇨ La seconde formule est appelée formule de Vandermonde.

Proposition 10.2.16: Binôme de Newton

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p.$$

10.3 Qcm

10.3.1 Cardinal

10.3.2 Dénombrement

1. Si E est un ensemble fini de cardinal n, l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ est de cardinal

   ☐ **a.** n^4 ☐ **b.** 2^{2n} ☐ **c.** 2^{2^n} ☐ **d.** $n!^2$

2. Combien y a-t-il de couples (a, b) dans $\{0, \ldots, 10\}^2$ tels que $a + b = 10$?

   ☐ **a.** 2 ☐ **b.** 10 ☐ **c.** 11 ☐ **d.** 22

3. Le nombre de mots de 3 lettres distinctes qu'on peut écrire avec les 26 lettres de l'alphabet est

   ☐ **a.** $\binom{26}{3}$ ☐ **b.** $3\binom{26}{3}$ ☐ **c.** $26 \times 25 \times 24$ ☐ **d.** $26^3 - 26$

4. Quel est le cardinal de $\{0, 1, \ldots, 10\}^2 \backslash \{(k, k), k \in \{0, \ldots, 10\}\}$?

   ☐ **a.** 10 ☐ **b.** 89 ☐ **c.** 90 ☐ **d.** 110

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre de bijections de $\{0, \ldots, n\}$ sur lui-même est

   ☐ **a.** $n!$ ☐ **b.** $(n + 1)!$ ☐ **c.** n^n ☐ **d.** $(n + 1)^{n+1}$

6. Le nombre d'entiers entre 1 et 60 qui ont la propriété d'être pairs ou d'être divisibles par 3 est

   ☐ **a.** 20 ☐ **b.** 30 ☐ **c.** 40 ☐ **d.** 50

7. Si $n \geqslant 1$, la somme $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ vaut

   ☐ **a.** 0 ☐ **b.** 1 ☐ **c.** 2^n ☐ **d.** $n!$

8. Si E et F sont deux ensembles finis, le cardinal de $E \backslash F$ vaut

   ☐ **a.** $|E| - |F|$ ☐ **b.** $|E| - |E \cap F|$ ☐ **c.** $|E| - |F| + |E \cap F|$ ☐ **d.** $|E| + |F| - |E \cap F|$

9. Le nombre de parties de $\{1, 2, \ldots, n\}$ qui ne contiennent pas 1 est

   ☐ **a.** $2^n - 1$ ☐ **b.** 2^{n-1} ☐ **c.** $2^n - n$ ☐ **d.** $\binom{n}{n-1}$

10. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$ l'entier $k\binom{n}{k}$ est égal à

    ☐ **a.** $n\binom{n-1}{k-1}$ ☐ **b.** $n\binom{n-1}{k}$ ☐ **c.** $n\binom{n}{n-k}$ ☐ **d.** $n\binom{n}{k-1}$

11. Combien y a-t-il de n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'entiers entre 1 et 10 qui contiennent au moins un nombre pair ?

    ☐ **a.** $\dfrac{10^n}{2}$ ☐ **b.** $10^n - 5^n$ ☐ **c.** $\dfrac{10^n}{5^n} = 2^n$ ☐ **d.** $n^{10} - n^5$

12. Si E est un ensemble fini de cardinal n, le nombre d'applications de $E \times E$ dans E est

    ☐ **a.** n^3 ☐ **b.** n^{2n} ☐ **c.** n^{n^2} ☐ **d.** n^n

13. Soit $n \geqslant 2$. On note E la fonction partie entière. Combien y a-t-il d'entiers k tels que $\frac{n}{2} \leqslant k \leqslant n$?

    ☐ **a.** $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + 1$ ☐ **b.** $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ ☐ **c.** $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$ ☐ **d.** $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + \dfrac{1}{2}$

14. Soit $n \in \mathbb{N}$ et x un réel. Combien vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k+1}$?

    ☐ **a.** $(1 + x)^{2n+1}$ ☐ **b.** $x\left(1 + x^2\right)^n$ ☐ **c.** $2^n x^{2k+1}$ ☐ **d.** $\left(1 + x^{2+1/k}\right)^n$

15. Soit $n \geqslant 1$. Combien y a t-il de surjections de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans $\{n+1, \dots, 2n\}$?

☐ **a.** 2^n ☐ **b.** $\binom{2n}{n}$ ☐ **c.** $(2n)!$ ☐ **d.** $n!$

16. Pour $p \in \mathbb{N}$, que vaut $\binom{p+3}{p} + \binom{p+3}{p+1}$?

☐ **a.** $\binom{p+3}{p+2}$ ☐ **b.** $\binom{p+4}{p+1}$ ☐ **c.** $\binom{p+4}{p}$ ☐ **d.** $\binom{p+4}{2p+1}$

17. Pour tout $n \geqslant 1$, la somme $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ est égale à

☐ **a.** $\dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$ ☐ **b.** $\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ ☐ **c.** $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ☐ **d.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$

18. Le nombre de suites strictement croissantes formées de 5 entiers choisis dans l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ est

☐ **a.** $\dfrac{10!}{5!}$ ☐ **b.** $\binom{10}{5}$ ☐ **c.** 10^5 ☐ **d.** $5!$

19. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ANAGRAMME ?

☐ **a.** $\dfrac{9!}{3!2!}$ ☐ **b.** $\dfrac{9!}{3 \times 2}$ ☐ **c.** $\dfrac{5!}{3!2!}$ ☐ **d.** $\dfrac{5!}{3 \times 2}$

20. Quel est le nombre de couples (a, b) de $\mathbb{Z}^2$ tels que $\max(|a|, |b|) \leqslant n$?

☐ **a.** $2n$ ☐ **b.** $4n + 2$ ☐ **c.** $(2n)^2$ ☐ **d.** $(2n + 1)^2$

21. Soit $n \geqslant 2$. Quel est le nombre de couples (a, b) tels que $1 \leqslant a < b \leqslant n$?

☐ **a.** $n(n-1)$ ☐ **b.** $\binom{n}{2}$ ☐ **c.** $n - b$ ☐ **d.** $n(n-1)\binom{n}{2}$

22. Soit E un ensemble de cardinal n et A une partie de E de cardinal p. Combien y a-t-il de parties de E qui contiennent A ?

☐ **a.** 2^p ☐ **b.** 2^{n-p} ☐ **c.** $\binom{n}{p}$ ☐ **d.** $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k}$

23. Soit n, p dans $\mathbb{N}^*$. Lorsque f est une application de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans $\{1, 2, \dots, p\}$, à partir de quelle valeur de n est-on en mesure d'affirmer qu'un des éléments de $\{1, 2, \dots, p\}$ admet au moins trois antécédents ?

☐ **a.** $n \geqslant 3$ ☐ **b.** $n \geqslant p + 3$ ☐ **c.** $n \geqslant 2p + 1$ ☐ **d.** $n \geqslant 3p$

10.4 Exercices

10.4.1 Cardinal

Équipotence

Exercice 1 : Non dénombrabilité de $[0,1]$

Le but de cet exercice est de démontrer que $[0,1]$ n'est pas dénombrable, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $[0,1]$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de $[0,1]$ telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad u_n = x.$$

1. Construire deux suites (a_n) et (b_n) de réels telles que
   — $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
   — $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$.
   — $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n - a_n)$.
   — $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$.
2. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune $l \in [0,1]$, puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq l.$$

   Conclure.

Ensemble fini, cardinal

Exercice 2 : Ensemble d'entiers

Étant donnés 51 entiers compris entre 1 et 100, montrer qu'il en existe toujours 2 consécutifs.

Exercice 3 : Théorème d'approximation de Dirichlet

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $\delta_k := kx - \lfloor kx \rfloor$. En appliquant le principe des tiroirs aux réels δ_k, montrer le théorème d'approximation de Dirichlet

$$\exists p \in \mathbb{Z}, \quad \exists q \in [\![1,n]\!], \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   (a) Montrer qu'il existe une infinité de $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

   (b) Montrer qu'il existe une infinité de $p \in \mathbb{Z}$ pour lesquels

$$\exists q \in \mathbb{N}^*, \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

3. On admet que π est irrationnel. Dans ces conditions $\sin n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on peut poser

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n := \frac{1}{n \sin n}.$$

   On souhaite montrer que la suite (u_n) n'admet pas de limite. On raisonne par l'absurde et on suppose que (u_n) admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
   (a) Montrer que $l = 0$.
   (b) Obtenir une contradiction en appliquant les résultats de la question 2.b au réel π.

Exercice 4 : 7 nombres réels

Soit sept nombres réels $x_1, \ldots, x_7$. Montrer qu'il existe deux indices i et j distincts tels que

$$0 < \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Rappelez vous que la trigonométrie se cache même aux endroits où on ne l'attend pas.

10.4.2 Dénombrement

Dénombrement élémentaire

Exercice 5 : Couples dans le plan

Combien y a-t-il de couples (i, j)

1. dans $[\![1, n]\!]^2$ pour lesquels $i + j = n$?
2. dans $[\![1, n]\!]^2$ pour lesquels $i < j$?
3. dans $[\![1, n]\!] \times [\![1, 2n]\!]$ pour lesquels $i < j$?
4. dans $[\![1, n]\!]^2$ pour lesquels $|i - j| \leqslant 1$?

Exercice 6 : Autour du crible

Une certaine ville compte 17 500 actifs dans sa population. À l'issue d'un recensement, on a obtenu les informations suivantes sur ces 17 500 actifs :

— 4 actifs sur 7 sont des femmes et 6 d'entre elles sur 10 ont voté aux dernières municipales.
— 3 actifs sur 5 ont voté aux dernières municipales et 40% de ces personnes sont au chômage.
— Le chômage touche 1 actif sur 4 et 60% des demandeurs d'emploi sont des femmes.
— 60% des femmes au chômage ont voté aux dernières municipales.

Combien d'hommes qui ne sont pas au chômage sont restés chez eux le jour des élections municipales ?

Arrangement, combinaison

Exercice 7 : Anagrammes

Dénombrer les anagrammes des mots suivants

COUVERT, COUTEAU, FOURCHETTE.

Exercice 8 : Le livreur

Un livreur doit distribuer des colis à cinq personnes A, B, C, D, E. Combien y a-t-il de trajets possibles ? S'il souhaite livrer A avant B et C, combien y a-t-il de trajets possibles ?

Exercice 9 : Surjections d'un ensemble fini dans un autre

Quels que soient $n, p \in \mathbb{N}$, on note $S_{p,n}$ le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

1. On suppose que $p \leqslant n$. Que vaut $S_{p,n}$?
2. Calculer $S_{n+1,n}$ et $S_{p,2}$.
3. Montrer que
$$\forall p, n \in \mathbb{N}, \quad n^p = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} S_{p,i}.$$

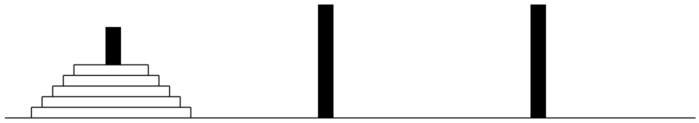
Exercice 10 : Partitions d'un ensemble

Quels que soient $n, p \in \mathbb{N}$, on note $P_{n,p}$ le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal np en n parties à p éléments. Montrer que
$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1,p} = \frac{1}{n+1} \binom{(n+1)p}{p} P_{n,p}.$$
En déduire $P_{n,p}$.

Exercice 11 : Tours de Hanoï

Le jeu des tours de Hanoï se compose de trois tiges sur lesquelles on peut empiler n disques deux à deux distincts ($n \geq 1$). Initialement, les n disques sont empilés sur la première tige, par ordre décroissant de taille, du bas vers le haut. Le but du jeu est de transporter la tour complète sur une autre tige par une suite de mouvements consistant à déplacer un disque à la fois, et en respectant les deux règles suivantes :

— on ne peut ôter d'une tige que le disque se trouvant au sommet de la pile ;
— on ne peut empiler un disque sur une tige que si elle est vide ou bien si l'on pose le disque en question sur un autre plus grand.



Notons a_n le nombre minimal de mouvements nécessaires au transport de la tour initiale de n disques.

1. Montrer que $a_1 = 1$ et $a_2 = 3$.
2. Établir une relation entre a_{n+1} et a_n pour tout $n \geq 1$.
3. Montrer que $a_n = 2^n - 1$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 12 : Exercice

Sur une étagère, on range les n tomes d'une encyclopédie. Combien y a-t-il de manières de les ranger tout en étant sûr que le tome 1 et le tome 2 sont côte à côte et dans cet ordre ?

Exercice 13 : Exercice

De combien de façons différentes peut-on ranger les nombres $1, 2, \dots, n$ si l'on veut que le produit de deux nombres voisins soit toujours pair ?

Exercice 14 : Exercice

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. La boule 1 est jaune, les boules 2 et 3 sont bleues, les boules 4,5,6 sont rouges et les boules 7,8,9,10 sont vertes. On tire dans l'urne successivement et avec remise 5 boules. Le résultat est donc la liste ordonnée des cinq numéros des boules tirées. Déterminer le nombre de résultats

1. en tout,
2. pour lesquels les cinq boules sont toutes de la même couleur,
3. pour lesquels les quatre couleurs apparaissent parmi les cinq boules,
4. pour lesquels la boule numéro 8 a été tirée et exactement deux des boules tirées sont rouges.

Exercice 15 : Exercice

On dispose de trois urnes notées A, B, C et de six boules. On répartit les six boules dans les trois urnes (chaque urne peut contenir de 0 à 6 boules). Une répartition est une liste ordonnée de trois nombres indiquant le nombre de boules contenues dans les urnes A, B, C. Par exemple, la répartition $(2, 4, 0)$ indique que l'urne A contient 2 boules, l'urne B en contient 4 et l'urne C est vide. Déterminer le nombre de répartitions

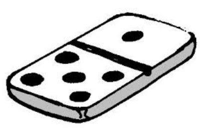
1. en tout,
2. telles que l'urne A est vide,
3. telles que l'urne A est la seule urne vide,
4. telles qu'une urne et une seulement est vide,
5. telles qu'aucune urne est vide,
6. telles qu'au moins une urne est vide.

Exercice 16 : Exercice

On considère un quadrillage de n lignes et m colonnes. On part de la case en haut à gauche pour arriver à la case en bas à droite. Les seuls mouvements possibles sont de se déplacer d'une case à droite ou d'une case en bas. Combien existe-t-il de chemins ?

Exercice 17 : Dominos

Un domino est un rectangle constitué de deux carrés, chacun comportant entre 0 et 6 points.



1. Combien existe-t-il de pièces distinctes ?
2. Combien de paires peut-on former avec deux dominos distincts ayant un nombre en commun ?

Exercice 18 : Nombre de partitions en paires

Soit E un ensemble de cardinal $2n$. On appelle partition de E en paires tout ensemble $\{\{a_1, b_1\}, \dots, \{a_n, b_n\}\}$ avec pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i \neq b_i$ et $(\{a_1, b_1\}, \dots, \{a_n, b_n\})$ est une partition de E. Dénombrer les partitions de E en paires.

Exercice 19 : Exercice

Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer de deux manières différentes les couples $(a, A) \in E \times \mathcal{P}(E)$ tels que $a \notin A$. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

Exercice 20 : Compter les matrices

Combien existe-t-il de matrices de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ dont les entrées sont « 0 » ou « 1 » et

1. dont chaque ligne contient exactement un coefficient « 1 » ?
2. dont chaque ligne contient exactement deux coefficients « 1 » ?
3. dont chaque ligne et chaque colonne contiennent exactement un coefficient « 1 » (on suppose ici $q = p$) ?

Exercice 21 : Le crible

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!.$$
On pourra appliquer la formule du crible aux ensembles $[\![1, n]\!] \setminus \{k\}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
2. Simplifier de même
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$
pour tout $p \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 22 : Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre d'applications f de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ telles que $f \circ f = \mathrm{Id}$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).