Cours de Mathématiques

Maths Sup

F. Fayard

PREPA LAZOS

2023 ~ 2024

Aux Lazaristes - La Salle

15 avril 2024

La version de ce document est la 4000465.

Merci à tous les élèves des lycées Janson de Sailly, du Parc et des Lazaristes pour leurs remarques et corrections. Je remercie particulièrement Younès Achbad, Samuel Auroy, Antonin Aye, Antonin Barbier, Amin Belfkira, Martin Bot, Alexandre Brousse, Élodie Brun, Damien Callendrier, Lauren Calvosa, Sylvain Crosnier, Enguerrand De Jaegere, Thibaud De Valicourt, Victor Déru, Raphaël Des Boscs, Grégoire Dhimoïla, Léo Duhamel-Callot, Mehdi El Khalfioui, Sacha Evrard, Axel Faou, Titouan Francheteau, Anthony Gago-Klimenko, Hélène Ghaleb, Cédric Holocher, Maxime Joubert, Paul-Antonin Larrieu, Maxime Lombard, Mira Maamri, Gauthier Malandrin, Gabriel Moreau, Pierre-Antoine Nguyen, Baptiste Odouard, Hilaire Oudinot, Maëlyne Porté, Eliott Pradeleix, Corentin Prizzon, Yann-Ellie Ravon, Sixtine Reynaud, Vivien Thienot, Carole Vacherand, Camille Vialet, Paul Vilars et Antonin Villepontoux.

Je tiens enfin à remercier mes anciens professeurs et collègues qui ont eu une influence sur la rédaction de ce document : Walter Appel, Bruno Arsac, Jean-Pierre Barani, Vincent Bayle, Christophe Bertault, Laurence Bouyge, Gilles Chaffard, Alain Chillès, Denis Choimet, Vincent Clapiès, Gérard Esposito, Stéphane Gonnord, Victor Lambert, Frédéric Morlot, Franz Ridde, Emmanuel Roblet et Alain Troesch.

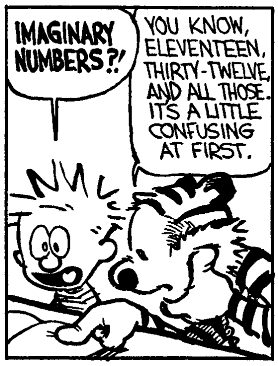
Table des matières

Chapitre 1

Nombres complexes

« La voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités du domaine réel passe souvent par le domaine imaginaire. »

— Jacques Hadamard (1865–1963)



1.1 Le corps des nombres complexes

1.1.1 Définition, conjugaison, module

Le carré de tout nombre réel étant positif, l'équation

$$x^2 = -1$$

n'admet aucune solution réelle. Nous admettrons qu'il existe un ensemble de nombres A ayant les propriétés suivantes.

— $\mathbb{R} \subset A$.
— On peut additionner, soustraire et multiplier les éléments de A en utilisant les règles usuelles de l'algèbre.
— L'équation $z^2 = -1$ admet au moins une solution sur A.

On note i une solution de cette équation.

Définition 1.1.1

On appelle corps des nombres complexes et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres $x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels.

Remarques

⇨ $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$. Autrement dit, tout nombre réel est un nombre complexe.

⇨ $\mathbb{C}$ est stable par les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication.

Définition 1.1.2

Pour tout nombre complexe z, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que $z = x + \mathrm{i}y$. Les réels x et y sont respectivement appelés *partie réelle* et *partie imaginaire* de z. On note

$$\mathrm{Re}(z) := x \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) := y$$

et on a donc $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$.

Remarques

⇨ On appelle *forme cartésienne* de $z \in \mathbb{C}$, toute écriture de la forme $z = x + \mathrm{i}y$ où $x, y \in \mathbb{R}$. La proposition précédente affirme que, quel que soit $z \in \mathbb{C}$, une telle écriture existe et est unique.

⇨ Si $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ sont tels que

$$x_1 + \mathrm{i}y_1 = x_2 + \mathrm{i}y_2,$$

alors $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. On dit souvent qu'on procède par *identification*, mais cette terminologie est abusive. On utilise en fait l'unicité provenant de la proposition précédente.

⇨ Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormé direct du plan. À tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, on associe le point M dont les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ sont (x, y). On a donc

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}$$

et on dit que M a pour affixe z. Pout tout point M du plan, il existe un unique $z \in \mathbb{C}$ tel que M a pour affixe z ; on dit alors que z est *l'affixe* du point M. On a ainsi identifié $\mathbb{C}$ avec l'ensemble des points du plan.

⇨ Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. On dit qu'un nombre complexe est *imaginaire pur* lorsque sa partie réelle est nulle. L'ensemble des nombres imaginaires purs est donc

$$\mathrm{i}\mathbb{R} := \{\mathrm{i}y : y \in \mathbb{R}\}.$$

⇨ De même qu'on ne peut pas écrire d'inégalités entre les points du plan, les inégalités entre nombres complexes n'ont aucun sens.

Proposition 1.1.3

Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

Proposition 1.1.4

Soit z et z' deux nombres complexes, λ et μ deux réels. Alors
— $\mathrm{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda\,\mathrm{Re}(z) + \mu\,\mathrm{Re}(z')$,
— $\mathrm{Im}(\lambda z + \mu z') = \lambda\,\mathrm{Im}(z) + \mu\,\mathrm{Im}(z')$.

Remarque

⇨ Attention, l'identité $\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')$ est fausse. Par exemple $\mathrm{Re}(\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}) = -1$ et $\mathrm{Re}(\mathrm{i})\,\mathrm{Re}(\mathrm{i}) = 0$.

Définition 1.1.5

Soit z un nombre complexe. On appelle *conjugué* de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe

$$\overline{z} := x - \mathrm{i}y$$

où x et y sont respectivement la partie réelle et imaginaire de z.

Remarque

⇨ Si M est le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$, le point M' d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe (Ox).

Proposition 1.1.6

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z}', \quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z}', \quad \text{et} \quad \overline{\overline{z}} = z.$$

Définition 1.1.7

Soit z un nombre complexe. On appelle *module* de z et on note $|z|$ le nombre réel positif

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

où x et y sont respectivement la partie réelle et imaginaire de z.

Remarques

⇨ Si $x \in \mathbb{R}$ est considéré comme un nombre complexe, son module est égal à sa valeur absolue.

⇨ Si M est le point d'affixe z, le module de z est la distance OM. Si A et B sont deux points d'affixes respectives a et b, alors $AB = |b - a|$.

⇨ Si $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$
- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$ est le *cercle* de centre a et de rayon r.
- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leqslant r\}$ est le *disque fermé* de centre a et de rayon r.
- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ est le *disque ouvert* de centre a et de rayon r.

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels qu'au moins l'un des deux réels a, b est non nul. Alors, l'ensemble d'équation

$$ax + by + c = 0$$

est une droite orthogonale au vecteur de coordonnées (a, b).

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors l'ensemble d'équation

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

est soit un cercle, soit un point, soit l'ensemble vide.

Définition 1.1.8

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Remarque

⇨ L'identification entre $\mathbb{C}$ et le plan complexe nous amène à identifier $\mathbb{U}$ avec le cercle de centre O et de rayon 1, appelé *cercle trigonométrique*.

Proposition 1.1.9

Soit z un nombre complexe. Alors

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

De plus, $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Remarque

⇨ Afin d'exploiter cette identité, on cherchera souvent à travailler avec le carré des modules.

Proposition 1.1.10

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors
$$|zz'| = |z|\,|z'| \quad \text{et} \quad |\overline{z}| = |z|\,.$$

Proposition 1.1.11

Si z et z' sont deux nombres complexes tels que $zz' = 0$, alors $z = 0$ ou $z' = 0$. On dit que $\mathbb{C}$ est *intègre*.

Proposition 1.1.12

Soit z un nombre complexe non nul. Alors il existe un unique nombre complexe z' tel que $zz' = 1$. On note ce nombre z^{-1} ou $1/z$. De plus
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Remarques

- Pour obtenir $1/z$ sous forme cartésienne, il suffit de multiplier son numérateur et son dénominateur par $\overline{z}$.
- Si $z \in \mathbb{U}$, alors $1/z = \overline{z}$. Pour inverser un nombre complexe de module 1, il suffit donc de le conjuguer.

Exercice 1

- Calculer l'inverse de $1 + \mathrm{i}$.

Proposition 1.1.13

Soit z un nombre complexe non nul. Alors
$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}.$$

Exercice 2

- Soit $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Montrer que
$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1.$$

Proposition 1.1.14

Soit z un nombre complexe. Alors
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}.$$

En particulier
- z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

Remarque

- En pratique, pour montrer qu'un nombre complexe est réel, une bonne méthode est de montrer qu'il est égal à son conjugué. La méthode consistant à montrer que sa partie imaginaire est nulle est à proscrire.

Exercices 3

- Soit a et b deux nombres complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$. Montrer que
$$\frac{a+b}{1+ab}$$
est un nombre réel.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ pour que
$$\frac{z+2}{1+\mathrm{i}z}$$
soit réel.

1.1.2 Inégalité triangulaire

Proposition 1.1.15

Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors
$$\mathrm{Re}(a) \leqslant |\mathrm{Re}(a)| \leqslant |a| \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(a) \leqslant |\mathrm{Im}(a)| \leqslant |a|\,.$$
De plus, $\mathrm{Re}(a) = |a|$ si et seulement si a est réel positif.

Proposition 1.1.16: Inégalité triangulaire

Soit a et b deux nombres complexes. Alors
$$|a+b| \leqslant |a| + |b|\,.$$
De plus, l'égalité a lieu si et seulement si a et b sont positivement liés, c'est-à-dire lorsque $a = 0$ ou lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $b = \lambda a$.

Remarques

⇨ Si (ABC) est un triangle, alors $AC \leqslant AB + BC$. En effet, si on note a, b, c les affixes respectives de A, B, C
$$AC = |c-a| = |c-b+b-a| \leqslant |c-b| + |b-a| = BC + AB.$$
Cette inégalité explique le nom d'inégalité triangulaire donné à la proposition précédente.

⇨ Attention, il est possible que a et b soient positivement liés sans qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $b = \lambda a$.

Proposition 1.1.17: Seconde inégalité triangulaire

Soit a et b deux nombres complexes. Alors
$$||a| - |b|| \leqslant |a+b|\,.$$

Remarque

⇨ La seconde inégalité triangulaire admet plusieurs variantes.
- Si on remplace b par $-b$, on obtient l'inégalité
$$||a| - |b|| \leqslant |a-b|$$
qui affirme que deux nombres complexes proches ont des modules proches.
- En remarquant que si x est réel, $|x| \geqslant x$, on obtient
$$|a+b| \geqslant |a| - |b|\,.$$
Cette inégalité affirme que si b a un module petit par rapport à celui de a, alors $a+b$ est éloigné de 0.

Exercices 4

⇨ Soit a et b deux nombres complexes distincts. On pose $\delta := |a-b|$. Montrer que les disques ouverts de centre a et b et de rayon $\delta/2$ sont disjoints.

⇨ Que peut-on dire de $|z|$ si $|1-z| \leqslant 1/4$? Faire un dessin puis une preuve.

Proposition 1.1.18

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Alors
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|\,.$$

1.1.3 Puissance entière, binôme de Newton

Définition 1.1.19

Soit $a \in \mathbb{C}$. On définit a^n pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ en posant
- $a^0 := 1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a^{n+1} := a^n a$.

Remarque

⇨ En particulier, $0^0 = 1$.

Proposition 1.1.20

Soit a, b deux nombres complexes, n et m deux entiers naturels. Alors

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad a^{n+m} = a^n a^m \quad \text{et} \quad (a^n)^m = a^{nm}.$$

Proposition 1.1.21

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\overline{a^n} = \overline{a}^n \quad \text{et} \quad |a^n| = |a|^n.$$

Exercice 5

⇨ Montrer que si $P(z) := a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ est un polynôme à coefficients réels, l'ensemble de ses racines est stable par conjugaison.

Définition 1.1.22

Soit a un nombre complexe non nul. On étend la définition de a^n à $n \in \mathbb{Z}$ en posant

$$a^n := \frac{1}{a^{-n}}$$

lorsque $n < 0$.

Proposition 1.1.23

Soit a, b deux nombres complexes non nuls, n et m deux entiers relatifs. Alors

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad a^{n+m} = a^n a^m \quad \text{et} \quad (a^n)^m = a^{nm}.$$

Proposition 1.1.24

Soit a un nombre complexe non nul et $n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\overline{a^n} = \overline{a}^n \quad \text{et} \quad |a^n| = |a|^n.$$

Définition 1.1.25: Division euclidienne

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$a = qb + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < b.$$

q est appelé *quotient* de la division euclidienne de a par b, r son *reste*.

Exercice 6

⇨ On pose $\mathrm{j} := -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^3, puis en déduire j^{2023}.

Définition 1.1.26

Pour tout entier naturel n, on définit la *factorielle* de n que l'on note $n!$ par
- $0! := 1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! := (n+1)\, n!$.

Remarque

➯ Si $n \in \mathbb{N}^*$

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Définition 1.1.27

Pour tout couple (k, n) d'entiers naturels, on définit $\binom{n}{k}$ que l'on prononce « k parmi n », comme étant le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Remarques

➯ Si $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$.

➯ Si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Proposition 1.1.28

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Proposition 1.1.29: Relation de Pascal

Soit k et n deux entiers naturels. Alors

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Remarque

➯ Cette formule est appelée relation de Pascal. Elle permet de calculer efficacement les $\binom{n}{k}$ en construisant le triangle de Pascal. Dans ce tableau contenant les $\binom{n}{k}$, où n désigne la ligne et k désigne la colonne, on commence par placer une colonne de 1 indiquant le fait que $\binom{n}{0} = 1$, puis une diagonale de 1 indiquant le fait que $\binom{n}{n} = 1$. Les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls et ne sont généralement pas représentés. Ceux en dessous de la diagonale sont complétés, ligne après ligne en utilisant la relation de Pascal qui affirme que chaque coefficient est la somme du coefficient se situant au-dessus de lui et de celui au-dessus à gauche.

$$\begin{array}{cccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

Ce triangle permet par exemple de lire sur la dernière ligne que $\binom{5}{1} = 5$ et $\binom{5}{2} = 10$.

Proposition 1.1.30

Soit n un entier naturel et $k \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Remarques

➯ On peut simplifier l'écriture de $\binom{n}{k}$ en

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{\overbrace{n\,(n-1)\cdots(n-(k-1))}^{k \text{ termes}}}{k!}.$$

En particulier

$$\binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

⇨ Si $k, n \in \mathbb{N}^*$, on a la formule dite « du capitaine »

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Exercice 7

⇨ Soit $k, n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!}.$$

Proposition 1.1.31: Binôme de Newton

Soit a et b deux nombres complexes et n un entier naturel. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Exercice 8

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Proposition 1.1.32

Soit a et b deux nombres complexes. Alors

— $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

— Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ &= (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right). \end{aligned}$$

Proposition 1.1.33

Soit a un nombre complexe et n un entier naturel. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

1.2 Forme trigonométrique

1.2.1 Exponentielle $\mathrm{i}\theta$

Définition 1.2.1

Pour tout réel θ, on définit l'exponentielle de $\mathrm{i}\theta$ par

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} := \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

Proposition 1.2.2

Soit θ_1 et θ_2 deux réels. Alors

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}.$$

Proposition 1.2.3

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors
$$\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$
De plus, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est non nul et si $n \in \mathbb{Z}$, alors
$$\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n.$$

Proposition 1.2.4: Formules d'Euler et Moivre

Soit θ un réel. Alors les formules d'Euler s'écrivent
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$
Pour $n \in \mathbb{Z}$, la formule de Moivre nous donne
$$\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n.$$

Proposition 1.2.5

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1$ si et seulement si $\theta \equiv 0 \ [2\pi]$.
- Plus précisément, étant donnés θ_1 et $\theta_2 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$ si et seulement si $\theta_1 \equiv \theta_2 \ [2\pi]$.

Exercice 9

⇨ Déterminer la partie réelle de
$$\frac{1}{1 - \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}.$$

Proposition 1.2.6: Paramétrisation de $\mathbb{U}$ par « l'exponentielle $\mathrm{i}\theta$ »

L'application qui à θ associe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$. Autrement dit :
- Si $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{U}$.
- Pour tout $u \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

1.2.2 Application à la trigonométrie

Applications

⇨ *Factorisation par l'arc moitié*
Étant donné un réel θ
$$\begin{aligned} 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$
De même
$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= -2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$
Plus généralement, étant donnés $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}},$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right) = 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}.$$

⇨ *Calcul de sommes trigonométriques*
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$C_n := \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n := \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

⇨ *Linéarisation de* $\cos^n \theta \sin^m \theta$
Étant donné deux entiers naturels n et m, on cherche à exprimer $\cos^n \theta \sin^m \theta$ comme combinaison linéaire des $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Pour cela, on peut utiliser les formules d'Euler avant de développer l'expression par la formule du binôme de Newton et de regrouper les termes en utilisant à nouveau les formules d'Euler. Cette opération sera utile lors du calcul de primitives.
Exemple : Linéariser $\sin^6 \theta$ et $\sin \theta \cos^4 \theta$.

⇨ *Expression de* $\cos(n\theta)$ *et* $\sin(n\theta)$ *comme polynôme en* $\cos \theta$ *et* $\sin \theta$
Pour cette opération, une méthode consiste à utiliser la formule de Moivre avant de développer l'expression obtenue à l'aide du binôme de Newton.
Exemple : Exprimer $\cos(5\theta)$ comme un polynôme en $\cos \theta$.

Exercices 10

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta).$$

⇨ En exprimant $\cos(5\theta)$ comme un polynôme en $\cos \theta$, montrer que $\cos(\pi/10)$ est racine d'un polynôme à coefficients entiers. En déduire une expression de $\cos(\pi/10)$ à l'aide de radicaux.

1.2.3 Forme trigonométrique

Définition 1.2.7

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle *forme trigonométrique* de z toute écriture
$$z = r e^{i\theta}$$
où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Remarques

⇨ Si $z = re^{i\theta}$ est une forme trigonométrique, alors $r = |z|$.

⇨ Tout nombre complexe non nul admet une forme trigonométrique. En pratique, pour la déterminer, on force la factorisation de z par $|z|$ et on écrit le second terme sous la forme $e^{i\theta}$.

⇨ Il existe deux moyens de représenter un même nombre complexe : la forme cartésienne et la forme trigonométrique. La première est particulièrement adaptée aux calculs de sommes, tandis que la seconde est particulièrement adaptée aux calculs de produits.

Exercices 11

⇨ Mettre $-2 - 2\sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique.

⇨ Mettre sous forme trigonométrique
$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}.$$

Définition 1.2.8

On appelle *argument* de $z \in \mathbb{C}^*$ tout réel θ tel que
$$z = |z| e^{i\theta}.$$

Proposition 1.2.9

Tout nombre complexe non nul $z \in \mathbb{C}^*$ admet au moins un argument. Si θ est l'un de ses arguments, l'ensemble de ses arguments est $\theta + 2\pi\mathbb{Z} := \{\theta + k2\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. On écrit
$$\arg(z) \equiv \theta \quad [2\pi].$$

Remarques

- Soit $r_1, r_2 > 0$ et $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Alors
$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2}$$
si et seulement si $r_1 = r_2$ et $\theta_1 \equiv \theta_2 \; [2\pi]$. Contrairement à la forme cartésienne, il n'y a donc pas unicité de la forme trigonométrique.
- Si z est un nombre complexe non nul, il existe un unique $\theta \in \,]-\pi, \pi]$ tel que $\arg z \equiv \theta \; [2\pi]$. On dit que θ est l'*argument principal* de z et on le note $\mathrm{Arg}(z)$.
- Étant donné un nombre complexe z, on appelle *forme trigonométrique généralisée* de z toute écriture du type $z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Attention, même si $z \neq 0$, on n'a pas nécessairement $\arg z \equiv \theta \; [2\pi]$. En effet :
  — Si $\rho > 0$, alors $\rho = |z|$ et $\arg z \equiv \theta \; [2\pi]$.
  — Si $\rho < 0$, alors $\rho = -|z|$ et $\arg z \equiv \theta + \pi \; [2\pi]$.
  Lorsque l'énoncé demandera explicitement de mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique, c'est bien sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ qu'il faudra le mettre. Cependant, lorsqu'on demandera de mettre z sous forme trigonométrique pour conduire des calculs, une forme trigonométrique généralisée suffira le plus souvent.

Exercices 12

- Résoudre l'équation
$$z^2 = \overline{z}$$
en utilisant la forme cartésienne, puis la forme trigonométrique de z.
- Résoudre l'équation $z^5 = 1/\overline{z}$.

Proposition 1.2.10

Soit $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors
$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \;\; [2\pi]\,, \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \;\; [2\pi]\,,$$
$$\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \;\; [2\pi]\,, \qquad \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \;\; [2\pi].$$

Remarque

- En général, $\mathrm{Arg}(zz') \neq \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')$. Par exemple $\mathrm{Arg}((-1)(-1)) = 0$ et $\mathrm{Arg}(-1) + \mathrm{Arg}(-1) = 2\pi$.

1.2.4 Exponentielle complexe

Définition 1.2.11

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe où x et y sont respectivement la partie réelle et imaginaire de z. On appelle exponentielle de z et on note e^z le nombre complexe défini par
$$e^z := e^x (\cos y + i \sin y)\,.$$

Proposition 1.2.12

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors
$$e^0 = 1 \qquad \text{et} \qquad e^{z+z'} = e^z e^{z'}.$$

Proposition 1.2.13

Soit z un nombre complexe, et $n \in \mathbb{Z}$. Alors e^z est non nul,
$$\frac{1}{e^z} = e^{-z} \qquad \text{et} \qquad e^{nz} = (e^z)^n\,.$$

Proposition 1.2.14

Soit z un nombre complexe. Alors
$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}, \qquad |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \qquad \text{et} \qquad \arg(e^z) \equiv \mathrm{Im}(z) \;\; [2\pi].$$

Proposition 1.2.15

— Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $\mathrm{e}^z = 1$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = \mathrm{i}k2\pi$.
— Plus précisément, étant donnés z_1 et z_2 deux nombres complexes, $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z_1 = z_2 + \mathrm{i}k2\pi$.

Proposition 1.2.16

L'exponentielle est une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$. Autrement dit :
— Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z \in \mathbb{C}^*$.
— Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{e}^{z'} = z$.

Remarque

⇨ Si $z \in \mathbb{C}^*$, nous venons de voir qu'il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $e^{z'} = z$. Cependant, z' n'est pas unique, ce qui nous empêche de définir le logarithme de z. Par contre, on peut montrer qu'il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{e}^{z'} = z$ et $\mathrm{Im}(z') \in \left]-\pi, \pi\right]$. Ce nombre est appelé logarithme principal de z et noté $\mathrm{Ln}(z)$. De plus $\mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)$. C'est le logarithme calculé par les logiciels de calcul formel ainsi que vos calculatrices. Malheureusement, l'identité $\mathrm{Ln}\,(zz') = \mathrm{Ln}(z) + \mathrm{Ln}(z')$ est fausse ; elle n'est vraie que modulo $\mathrm{i}2\pi$. C'est pourquoi, nous n'emploierons jamais de logarithme avec les nombres complexes.

Exercice 13

⇨ Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{e}^z = \sqrt{3} + 3\mathrm{i}$.

1.3 Racines d'un nombre complexe

1.3.1 L'équation du second degré

Définition 1.3.1

Soit a un nombre complexe. On appelle *racine* de a tout nombre complexe z tel que

$$z^2 = a.$$

Remarques

⇨ Si a est un réel positif, les racines de a sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. Si a est un réel négatif, ses racines sont $\mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.

⇨ Si $a \in \mathbb{C}$, on parlera de racine de a, mais on n'écrira jamais $\sqrt{a}$. Cette notation est réservée aux réels positifs.

Proposition 1.3.2

Soit a un nombre complexe non nul. Alors a admet exactement deux racines distinctes opposées l'une à l'autre.

Remarque

⇨ En pratique, pour trouver les racines d'un nombre complexe a, on procède ainsi
— *Si a s'exprime facilement sous forme trigonométrique.* On connait donc $r > 0$ et θ tels que $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Alors les racines de a sont $\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.
— *Si a est sous forme cartésienne et qu'il n'est pas simple de le mettre sous forme trigonométrique.* On recherche les racines de a sous la forme $z := x + \mathrm{i}y$ en effectuant une analyse : on suppose que z est une racine de a et on exploite le fait que $|z|^2 = |a|$ et que z^2 et a ont même partie réelle. On obtient donc

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= |a|\,, \\ x^2 - y^2 &= \mathrm{Re}(a). \end{aligned}$$

En résolvant ce système linéaire en x^2 et y^2, on obtient 4 couples (x, y) de solutions parmi lesquelles se trouvent les racines de a. Un argument de signe sur les parties imaginaires de z^2 et a permet d'éliminer deux candidats. La proposition précédente nous assure que les deux candidats restants sont bien des racines de a.

Exercices 14

⇨ Calculer les racines carrées de $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

⇨ Calculer les racines de $1 + \mathrm{i}$ de deux manières différentes. En déduire une expression avec des radicaux emboîtés de $\cos(\pi/8)$, $\sin(\pi/8)$ et $\tan(\pi/8)$.

Proposition 1.3.3

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$(E) \qquad az^2 + bz + c = 0.$$

On appelle discriminant de (E) le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Si $\Delta \neq 0$, le trinôme admet deux racines distinctes

$$z_1 := \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 := \frac{-b-\delta}{2a}.$$

où δ est une racine carrée de Δ.

— Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une seule racine, appelée racine double

$$z_0 := -\frac{b}{2a}.$$

Remarque

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$(E) \qquad az^2 + bz + c = 0.$$

— Si $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles distinctes

$$z_1 := \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 := \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

— Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une seule racine réelle, appelée racine double

$$z_0 := -\frac{b}{2a}.$$

— Si $\Delta < 0$, le trinôme admet deux racines complexes conjuguées

$$z_1 := \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 := \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Exercice 15

⇨ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.

Proposition 1.3.4

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et z_1, z_2 deux nombres complexes. Alors z_1 et z_2 sont les deux racines, éventuellement égales, de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Remarque

⇨ Si $P, S \in \mathbb{C}$, les solutions du système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P, \end{cases}$$

sont (ω_1, ω_2) et (ω_2, ω_1) où ω_1 et ω_2 sont les racines du trinôme $z^2 - Sz + P = 0$.

Exercices 16

⇨ Déterminer les solutions de l'équation $3z^2 - 5z + 2 = 0$.

⇨ Résoudre sur $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 3 - 2\mathrm{i} \\ uv = 3 + \mathrm{i}. \end{cases}$$

1.3.2 Racines n-ièmes

Définition 1.3.5

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$, on appelle *racine n-ième* de a tout nombre complexe z tel que $z^n = a$. Les racines n-ièmes de 1 sont appelées *racines n-ièmes de l'unité* et l'ensemble de ces racines est noté $\mathbb{U}_n$.

Remarque

⇨ Les racines n-ièmes de 1 sont de module 1. Autrement dit, $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

Proposition 1.3.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité. En posant $\omega := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$, ce sont

$$1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}.$$

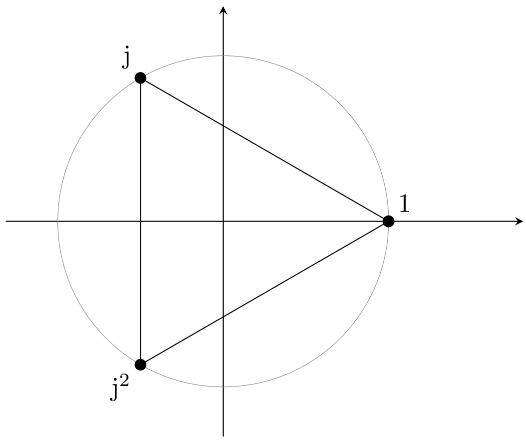
Remarques

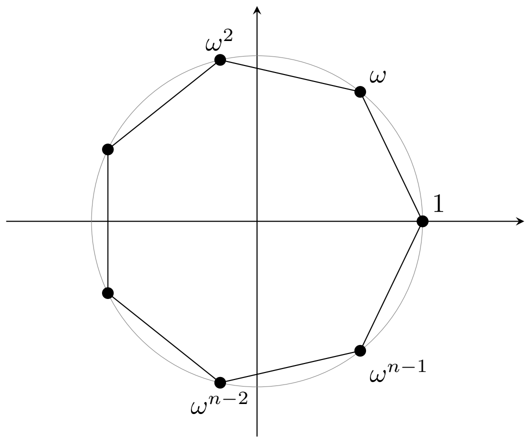
⇨ Lorsque l'on doit calculer sur des racines n-ièmes, il est souvent plus efficace de les manipuler via leur propriété ($z^n = 1$) plutôt que par leur description ($z = \omega^k$). On ne se rabat sur la description que lorsque la relation $z^n = 1$ ne suffit pas, ou en toute fin de calcul.

⇨ Dans le cas où $n = 3$, ω est noté j. Les racines 3-ièmes de l'unité sont donc $1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2$. Lorsqu'on travaille avec le nombre complexe j, on exploite les relations

$$\mathrm{j}^3 = 1, \qquad 1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathrm{j}} = \bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2.$$

⇨ Les racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés.





Exercices 17

⇨ Que dire de deux nombres complexes $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a^3 = b^3$?

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z+1)^n = (z-1)^n.$$

⇨ Calculer

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1|.$$

Proposition 1.3.7

Soit $n \geqslant 2$ et ζ une racine n-ième de l'unité, différente de 1. Alors

$$1 + \zeta + \cdots + \zeta^{n-1} = 0.$$

En particulier, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Proposition 1.3.8

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors a admet exactement n racines n-ièmes. En posant $\omega := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$, si z_0 est une racine n-ième de a, les racines n-ièmes de a sont

$$z_0, \omega z_0, \ldots, \omega^{n-1} z_0.$$

Remarques

⇨ Si $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est sous forme trigonométrique, alors

$$z_0 = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}$$

est une racine n-ième de a.

⇨ Si $n \geqslant 2$, la somme des racines n-ièmes d'un nombre complexe est nulle.

Exercices 18

⇨ Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation

$$27\,(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0.$$

⇨ En considérant les racines 7-ièmes de -1, montrer que

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

1.4 Nombres complexes et géométrie plane

1.4.1 Le plan complexe

Définition 1.4.1

Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien orienté et $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormé direct.

— Si M est un point du plan de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}$$

on appelle *affixe* de M le nombre complexe $x + \mathrm{i}y$.

— Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}$$

on appelle *affixe* de $\overrightarrow{u}$ le nombre complexe $x + \mathrm{i}y$.

Remarque

⇨ Si M est un point du plan, son affixe est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Proposition 1.4.2

— Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives a et $b \in \mathbb{C}$. Alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$.

— Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives u et $v \in \mathbb{C}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda\,\overrightarrow{u} + \mu\,\overrightarrow{v}$ a pour affixe $\lambda u + \mu v$.

Proposition 1.4.3

— Soit a et b deux nombres complexes. Alors $|a - b|$ est la distance entre les points d'affixes a et b.

— Soit u un nombre complexe. Alors $|u|$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Proposition 1.4.4

Soit A, B, C trois points deux à deux distincts d'affixes respectives a, b, c. Alors

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{AC}{AB} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \ [2\pi].$$

Proposition 1.4.5

Soit A, B, C trois points deux à deux distincts d'affixes respectives a, b, c. Alors
- A, B, C sont alignés si et seulement si
$$\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}.$$
- (AB) et (AC) sont orthogonales si et seulement si
$$\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}.$$

Remarques

⇨ Soit A, B, C trois points d'affixes respectives a, b, $c \in \mathbb{C}$. Si A, B, C sont deux à deux distincts, alors
$$\begin{aligned} A,\ B,\ C \text{ sont alignés} \quad &\iff \quad \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \\ &\iff \quad \frac{c-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{c-a}{b-a}\right)} \\ &\iff \quad (c-a)\overline{(b-a)} = \overline{(c-a)}(b-a). \end{aligned}$$
On vérifie facilement que même si A, B, C ne sont pas deux à deux distincts
$$A,\ B,\ C \text{ sont alignés} \quad \iff \quad (c-a)\overline{(b-a)} = \overline{(c-a)}(b-a).$$

⇨ La proposition précédente étant essentiellement utilisée de cette manière, on pourra tolérer exceptionnellement de l'appliquer, même si A, B, C ne sont pas deux à deux distincts. Ce genre de « division par zéro » est parfois tolérée en géométrie. Bien entendu, dans tout autre domaine des mathématiques, ces horreurs ne seront pas tolérées.

Exercice 19

⇨ Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé. On construit A_1 extérieur au quadrilatère tel que le triangle BA_1C est isocèle et rectangle en A_1. De même pour B_1, C_1, D_1. Montrer que les segments $[A_1C_1]$ et $[D_1B_1]$ ont même longueur et sont orthogonaux.

1.4.2 Les similitudes directes

Définition 1.4.6

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. On appelle *translation* de vecteur $\overrightarrow{u}$ l'application qui au point M associe l'unique point M' tel que
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}.$$

Proposition 1.4.7

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe $u \in \mathbb{C}$. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ transforme le point M d'affixe z en le point M' d'affixe
$$z' = z + u.$$

Remarque

⇨ Une translation conserve les distances et les angles.

Définition 1.4.8

Soit Ω un point du plan et $\rho \in \mathbb{R}^*$. On appelle *homothétie* de centre Ω et de rapport ρ l'application qui au point M associe l'unique point M' tel que
$$\overrightarrow{\Omega M'} = \rho\overrightarrow{\Omega M}.$$

Proposition 1.4.9

Soit Ω un point du plan d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$ et $\rho \in \mathbb{R}^*$. L'homothétie de centre Ω et de rapport ρ transforme le point M d'affixe z en le point M' d'affixe
$$z' = \rho(z - \omega) + \omega.$$

Remarque

⇨ Une homothétie de rapport $\rho \in \mathbb{R}^*$ multiplie les distances par $|\rho|$ et conserve les angles.

Définition 1.4.10

Soit Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *rotation* de centre Ω et d'angle θ l'application qui au point M associe

— Ω si $M = \Omega$.

— l'unique point M' tel que

$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta \ [2\pi]$$

sinon.

Proposition 1.4.11

Soit Ω un point du plan d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre Ω et d'angle θ transforme le point M d'affixe z en le point M' d'affixe

$$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Remarque

⇨ Une rotation conserve les distances et les angles.

Exercice 20

⇨ Quelle est l'expression en notation complexe des transformations suivantes ?

— **a.** La symétrie centrale de centre 0.

— **b.** L'homothétie de centre 0 et de rapport 2.

— **c.** L'homothétie de centre 2 et de rapport 1/2.

— **d.** La composée des deux dernières transformations.

— **e.** La rotation de centre 0 et d'angle $\pi/2$.

— **f.** La rotation de centre $1 + \mathrm{i}$ et d'angle $\pi/2$.

— **g.** La composée des deux dernières transformations.

— **h.** La symétrie orthogonale d'axe (Ox).

— **i.** La symétrie orthogonale dont l'axe $\mathcal{D}_\theta$ fait un angle θ avec l'axe (Ox).

Définition 1.4.12

Soit Ω un point du plan, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *similitude* de centre Ω, de rapport r et d'angle θ la composée (commutative) de l'homothétie de centre Ω et de rapport r et de la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Proposition 1.4.13

Soit Ω un point du plan d'affixe ω, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La similitude de centre Ω, de rapport r et d'angle θ transforme le point M d'affixe z en le point M' d'affixe

$$z' = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Remarques

⇨ Si $\rho < 0$, l'homothétie de centre Ω et de rapport ρ est une similitude de centre Ω, de rapport $|\rho|$ et d'angle π.

⇨ Une similitude de rapport $r > 0$ et d'angle θ multiplie les distances par r et conserve les angles.

Dans la suite, on confondra un point et son affixe, un vecteur et son affixe. On identifie ainsi le plan à $\mathbb{C}$.

Définition 1.4.14

On appelle *similitude directe* toute application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = az + b.$$

Remarque

⇨ Les translations et les similitudes de centre Ω de rapport $r \in \mathbb{R}_+^*$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ sont des similitudes directes. Nous allons voir que ce sont les seules.

Proposition 1.4.15

La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.

Proposition 1.4.16

Soit f une similitude directe et $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = az + b.$$

— Si $a = 1$, f est la translation de vecteur b.
— Sinon, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. f admet un unique point fixe ω et

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Autrement dit f est la similitude de centre ω, de rapport r et d'angle θ.

Exercice 21

⇨ À quelle transformation géométrique correspond la fonction $f : z \mapsto (3 - \mathrm{i}) + 2\mathrm{i}z$?

1.5 Qcm

Le corps des nombres complexes

Définition, conjugaison, module

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Le nombre complexe $(z - \mathrm{i})(z - 2\mathrm{i})$ est égal à

☐ **a.** $z^2 - 2$ ☐ **b.** $z^2 + 2$ ☐ **c.** $z^2 - 3\mathrm{i}z - 2$ ☐ **d.** $z^2 - 3\mathrm{i}z + 2$

2. Si z est un nombre complexe, quelle est la partie imaginaire de $z - \mathrm{i}\overline{z}$?

☐ **a.** $2\,\mathrm{Im}(z)$ ☐ **b.** $\mathrm{Im}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(\overline{z})$ ☐ **c.** $\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z)$ ☐ **d.** $\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z)$

3. Si z est un nombre complexe, quelle est la partie réelle de $z + \mathrm{i}\overline{z}$?

☐ **a.** $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(\overline{z})$ ☐ **b.** $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$ ☐ **c.** $\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)$ ☐ **d.** $2\,\mathrm{Re}(z)$

4. Si x est un nombre réel, la partie réelle de $z := \frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}$ est

☐ **a.** $\dfrac{1}{1+x^2}$ ☐ **b.** $\dfrac{1}{1-x^2}$ ☐ **c.** $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ ☐ **d.** $\dfrac{2x}{1-x^2}$

5. Quel est l'inverse de $3 - 4\mathrm{i}$?

☐ **a.** $\dfrac{1}{3} - \dfrac{\mathrm{i}}{4}$ ☐ **b.** $\dfrac{1}{3} + \dfrac{\mathrm{i}}{4}$ ☐ **c.** $\dfrac{3}{5} + \dfrac{4\mathrm{i}}{5}$ ☐ **d.** $\dfrac{3}{25} + \dfrac{4\mathrm{i}}{25}$

6. L'inverse d'un nombre complexe non nul z est égal à son conjugué $\overline{z}$ si et seulement si

☐ **a.** $z = 1$ ☐ **b.** $|z| = 1$
☐ **c.** z est réel ☐ **d.** z est imaginaire pur

7. Soit $z, u \in \mathbb{C}$ tels que $u^2 = z$. Quand peut-on dire que $|u| < |z|$?

☐ **a.** c'est toujours le cas ☐ **b.** lorsque z n'est pas nul
☐ **c.** lorsque $0 < |z| < 1$ ☐ **d.** lorsque $|z| > 1$

8. Notons C_r le cercle du plan complexe de centre 0 et de rayon $r > 0$. L'ensemble C_r est stable pour le produit

☐ **a.** pour tout r ☐ **b.** seulement pour $r \leqslant 1$
☐ **c.** seulement pour $r = 1$ ☐ **d.** jamais

Inégalité triangulaire

1. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Si $|z| = 1$ et $|z'| = 2$, alors $|z' - z|$ est

☐ **a.** égal à 1 ☐ **b.** compris entre 1 et $\sqrt{5}$
☐ **c.** compris entre 1 et 3 ☐ **d.** inférieur à -1

2. Combien y a-t-il de nombres complexes z tels que $|z - \mathrm{i}| \leqslant 1$ et $|z - 2| \leqslant 1$?

☐ **a.** aucun ☐ **b.** un seul
☐ **c.** deux complexes conjugués ☐ **d.** une infinité

Puissance entière, binôme de Newton

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et x un réel. Combien vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k+1}$?

☐ **a.** $(1+x)^{2n+1}$ ☐ **b.** $x\left(1+x^2\right)^n$ ☐ **c.** $2^n x^{2k+1}$ ☐ **d.** $\left(1 + x^{2+\frac{1}{k}}\right)^n$

Forme trigonométrique

Exponentielle $\mathrm{i}\theta$

1. La formule de Moivre indique que pour tout réel x

☐ **a.** $(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)$ ☐ **b.** $(\cos x + \sin x)^n = \cos(nx) + \sin(nx)$
☐ **c.** $2\cos x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$ ☐ **d.** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

2. Si x est un réel non nul modulo π, le quotient $\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-1}$ vaut

☐ **a.** $\mathrm{i}\tan x$ ☐ **b.** $\operatorname{cotan} x$ ☐ **c.** $\mathrm{i}\operatorname{cotan} x$ ☐ **d.** $-\mathrm{i}\operatorname{cotan} x$

3. Si a et b sont deux réels, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = 0$ pour

☐ **a.** $a \equiv -b\ [2\pi]$ ☐ **b.** $a \equiv -b\ [\pi]$ ☐ **c.** $a \equiv b + \pi\ [2\pi]$ ☐ **d.** aucune valeur de a et b

4. La fonction $f : t \mapsto \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^2$ est périodique de période

☐ **a.** 1 ☐ **b.** $\frac{\pi}{2}$ ☐ **c.** π ☐ **d.** elle n'est pas périodique

Application à la trigonométrie

1. Si x est un nombre réel, $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^6$ vaut

☐ **a.** $-64\sin^6 x$ ☐ **b.** $64\sin^6 x$ ☐ **c.** $64\cos^6 x$ ☐ **d.** $64\sin(6x)$

2. Si x est un réel dans $]0, 2\pi[$, le nombre complexe $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1}$ est égal à

☐ **a.** $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(n-1)x}{2}} \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ ☐ **b.** $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(n-1)x}{2}} \frac{\cos\frac{nx}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ ☐ **c.** $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(n+1)x}{2}} \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ ☐ **d.** $\mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}nx}{2}} \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

Forme trigonométrique

1. Un argument de $1 - \mathrm{i}$ est

☐ **a.** $\frac{\pi}{4}$ ☐ **b.** $\frac{3\pi}{4}$ ☐ **c.** $\frac{5\pi}{4}$ ☐ **d.** $\frac{7\pi}{4}$

2. Le module de $z := \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$ est

☐ **a.** $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$ ☐ **b.** $\sqrt{2}$ ☐ **c.** $\frac{1}{2}$ ☐ **d.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Un argument de $z := \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$ est

☐ **a.** $-\frac{\pi}{12}$ ☐ **b.** $\frac{\pi}{12}$ ☐ **c.** $\frac{5\pi}{12}$ ☐ **d.** $\frac{7\pi}{12}$

4. Si a et b sont deux réels, l'argument de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$ (lorsque ce nombre est non nul) est égal à

☐ **a.** $\frac{a+b}{2}\ [\pi]$ ☐ **b.** $\frac{a+b}{2}\ [2\pi]$ ☐ **c.** $\pm\frac{a+b}{2}\ [2\pi]$ ☐ **d.** $a + b\ [2\pi]$

Exponentielle complexe

1. Soit $z := r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ un nombre complexe, où r est un réel positif. Le module de e^z est

☐ **a.** e^r ☐ **b.** $\mathrm{e}^{r\cos t}$ ☐ **c.** $\mathrm{e}^{r\sin t}$ ☐ **d.** $r\mathrm{e}^{|t|}$

2. Soit $z := r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ un nombre complexe, où r est un réel positif. Un argument de e^z est

☐ **a.** $\sin t$ ☐ **b.** $r\sin t$ ☐ **c.** rt ☐ **d.** $r\cos t$

Racines d'un nombre complexe

L'équation du second degré

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Que dire de z si z^2 est réel ?

☐ **a.** z est réel ☐ **b.** z est réel ou de module 1
☐ **c.** z est réel ou imaginaire pur ☐ **d.** z est réel ou égal à i ou $-$i

2. Que dire d'un nombre complexe z dont les deux racines carrées sont conjuguées ?

☐ **a.** c'est toujours le cas ☐ **b.** cela n'est pas possible
☐ **c.** z est un imaginaire pur ☐ **d.** z est un nombre réel négatif

3. Soit a et b deux nombres complexes et z_1 la racine de l'équation du second degré $z^2 - 2az + b = 0$ qui a le plus grand module. Alors

☐ **a.** $|z_1| \leqslant |a|$ ☐ **b.** $|z_1| \leqslant |b|$
☐ **c.** $|z_1| \geqslant |a|$ ☐ **d.** $|z_1| \geqslant |b|$

4. Soit z un nombre complexe non nul tel que $z + \frac{1}{z}$ est réel. Alors

☐ **a.** z est réel ☐ **b.** z est réel ou de module 1
☐ **c.** z est réel ou imaginaire pur ☐ **d.** z est réel ou égal à i ou égal à $-$i

5. Laquelle des équations suivantes admet deux solutions complexes conjuguées ?

☐ **a.** $z^2 + 3\mathrm{i}z + 4 = 0$ ☐ **b.** $z^2 + 3\mathrm{i}z - 4 = 0$
☐ **c.** $z^2 + 3z + 4 = 0$ ☐ **d.** $z^2 + 3z - 4 = 0$

Racines n-ièmes

1. Le nombre complexe $z := 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ est une racine 6-ième de

☐ **a.** 2 ☐ **b.** 12 ☐ **c.** 64 ☐ **d.** $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{18}}$

2. Les solutions de l'équation $z^6 = \overline{z}^2$ sont

☐ **a.** les racines quatrièmes de l'unité ☐ **b.** les racines quatrièmes de l'unité et 0
☐ **c.** les racines huitièmes de l'unité ☐ **d.** les racines huitièmes de l'unité et 0

3. Soit $n \geqslant 2$. Que dire du nombre complexe z si l'ensemble des racines n-ièmes de z est stable par conjugaison ?

☐ **a.** $z = 1$ ☐ **b.** z est un réel positif
☐ **c.** z est un réel quelconque ☐ **d.** z est un imaginaire pur

4. Laquelle des parties suivantes de $\mathbb{C}$ n'est pas stable par l'application $z \mapsto 1/z$?

☐ **a.** Le cercle $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
☐ **b.** La droite des imaginaires purs privée de 0
☐ **c.** Le demi-plan des complexes de partie imaginaire strictement positive
☐ **d.** L'ensemble des racines 100-ièmes de 1

Nombres complexes et géométrie plane

Le plan complexe

Les similitudes directes

1.6 Exercices

Le corps des nombres complexes

Définition, conjugaison, module

Exercice 1 : Lieu

1. On note f la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ par
$$f(z) \coloneqq \frac{z+1}{z-2}.$$
Pour quels nombres $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ a-t-on $|f(z)| = 1$? $\mathrm{Re}\,(f(z)) = 0$?
2. On note g la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{2\mathrm{i}\}$ par
$$g(z) \coloneqq \frac{2z - \mathrm{i}}{z - 2\mathrm{i}}.$$
Pour quels nombres $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\mathrm{i}\}$ a-t-on $g(z) \in \mathbb{R}$? $g(z) \in \mathbb{U}$?

Inégalité triangulaire

Exercice 2 : Inégalité

Soit a et b deux nombres complexes.

1. Montrer que
$$|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|\,.$$
2. Déterminer les cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

Exercice 3 : Somme

Soit $z_0, z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes de module 1. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z_k}{2^k} \neq 0.$$
On pourra commencer par majorer
$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{2^k}\right|.$$

Exercice 4 : Majoration

Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que
$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = nz^n.$$
Montrer que $|z| \leqslant 1$.

Puissance entière, binôme de Newton

Exercice 5 : Majorations

1. Soit a et b deux nombres complexes et n un entier naturel non nul. Montrer que si on pose $M \coloneqq \max(|a|\,, |b|)$, alors
$$|a^n - b^n| \leqslant nM^{n-1}\,|a-b|\,.$$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ et n un entier non nul. Montrer que
$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n.$$

Forme trigonométrique

Exponentielle $\mathrm{i}\theta$

Application à la trigonométrie

Exercice 6 : Linéarisation

Linéariser l'expression $\cos^2 x \sin^3 x$.

Exercice 7 : Calcul de sommes trigonométriques

On se donne un réel x.

1. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx), \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx), \qquad \sum_{k=0}^{n} k\cos(kx).$$

2. (a) On suppose que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-k}^{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx} = \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2.$$

   (b) Calculer la valeur de cette somme pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ de deux manières distinctes.

Forme trigonométrique

Exercice 8 : Mise sous forme trigonométrique

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose

$$z = -\sin 2\theta + 2\mathrm{i}\cos^2\theta.$$

1. Déterminer le module et l'argument de z.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que z et $z-1$ aient même module.

Exercice 9 : Calculs

Mettez les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique généralisée

$$\textbf{a. } \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20}, \qquad \textbf{b. } \left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n, \qquad \textbf{c. } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'},$$

$$\textbf{d. } \frac{a+b}{a-b} \quad \text{et} \quad \textbf{e. } \frac{a+b}{1-ab} \qquad \text{où } a := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \text{ et } b := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}.$$

Exponentielle complexe

Racines d'un nombre complexe

L'équation du second degré

Exercice 10 : L'équation du second degré

Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$$\textbf{a. } z^2 = -7+24\mathrm{i}, \qquad \textbf{b. } z^2 = -3-4\mathrm{i}, \qquad \textbf{c. } z^2+z+1=0,$$

$$\textbf{d. } z^2 - 2(2+\mathrm{i})z + 6 + 8\mathrm{i} = 0, \qquad \textbf{e. } \mathrm{i}z^2 + (4\mathrm{i}-3)z + \mathrm{i} - 5 = 0,$$

$$\textbf{f. } z^4 + 2z^3 + z^2 + 2z + 1 = 0 \quad \textit{On pourra poser } u := z + \frac{1}{z},$$

$$\textbf{g. } \begin{cases} z_1 z_2 = \frac{1}{2} \\ z_1 + 2z_2 = \sqrt{3}, \end{cases} \qquad \textbf{h. } \begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ z_1^2 + z_2^2 = 3. \end{cases}$$

Exercice 11 : Modules et arguments des racines d'un trinôme

Soit u un réel tel que $|u| < \pi$. Calculer les modules et arguments de chacune des racines de l'équation

$$z^2 - 2z(\cos u + \mathrm{i}\sin u) + 2\mathrm{i}\sin u(\cos u + \mathrm{i}\sin u) = 0.$$

Exercice 12 : Trinôme dont les racines ont même module

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que les racines de $z^2 + az + b = 0$ ont même module si et seulement si il existe $\lambda \in [0, 4]$ tel que $a^2 = \lambda b$.

Racines n-ièmes

Exercice 13 : Équations

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{C}$

$$\textbf{a. } z^5 = -1, \qquad \textbf{b. } z^6 = \frac{-4}{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}, \qquad \textbf{c. } z^3 = \overline{z},$$

$$\textbf{d. } (z + \mathrm{i})^n = (z - \mathrm{i})^n, \qquad \textbf{e. } 1 + \frac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}} + \left(\frac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}\right)^2 + \left(\frac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}\right)^3 = 0.$$

Exercice 14 : Équation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation

$$\left(z^2 + 1\right)^n = (z - \mathrm{i})^{2n}.$$

Exercice 15 : Relation trigonométrique

En considérant les racines 11-ièmes de 1, montrer que

$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 16 : Calcul avec j

1. Calculer
$$\left(a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2\right)\left(a + b\mathrm{j}^2 + c\mathrm{j}\right).$$
2. Sans effectuer de développement, retrouver le fait que cette expression ne change pas lorsqu'on échange deux variables.

Exercice 17 : Autour des racines de l'unité

Soit $(\omega_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité. Calculer pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k.$$

Nombres complexes et géométrie plane

Le plan complexe

Exercice 18 : Caractérisation d'un triangle équilatéral

Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b et c.

1. On suppose que $B \neq A$. Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si
$$\frac{c - a}{b - a} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad \frac{c - a}{b - a} = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}.$$
2. En déduire que ABC est équilatéral si et seulement si
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + cb.$$

Exercice 19 : Triangles équilatéraux

Soit (ABC) et (ADE) deux triangles équilatéraux directs et $(ACFD)$ un parallélogramme. Montrer que (BFE) est équilatéral direct.

Exercice 20 : Algèbre et géométrie

A tout nombre complexe $z \neq 4$, on associe le nombre

$$z' = \frac{\mathrm{i}z - 4}{z - 4}$$

et on note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que z' est réel. Déterminer $\mathcal{C}$ par une méthode algébrique puis par une méthode géométrique.

Exercice 21 : Lieu

Soit le point A d'affixe 2 et le point B d'affixe -2. À tout point M d'affixe z, autre que A, on associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{2z - 4}{\bar{z} - 2}.$$

1. Déterminer $|z|$. Que peut-on en déduire pour M' ?
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points d'affixe z tels que $M' = B$.
3. Pour tout point M de $\mathcal{E}$ et distincts de A et B, que peut-on dire de

$$\frac{z - 2}{z' - 2} ?$$

   Interpréter géométriquement ce résultat et en déduire une construction de M'.

Exercice 22 : Triangles

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1, z et $\mathrm{i}z$. Déterminer l'ensemble des points B pour lesquels A, B et C sont alignés.
2. On considère les points E, F et G non alignés, d'affixes respectives, z_1, z_2 et z_3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle (EFG) soit rectangle isocèle en E.

Les similitudes directes

Exercice 23 : Similitudes

1. Caractériser géométriquement la similitude

$$z \mapsto 2(1+\mathrm{i})z - 7 - 4\mathrm{i}.$$

2. Déterminer l'expression complexe de la rotation de centre $1 + \mathrm{i}$ et d'angle $\pi/4$.
3. On note r la rotation de centre $2 + \mathrm{i}$ et d'angle $\pi/2$ et s la symétrie centrale de centre $1 - \mathrm{i}$. Caractériser géométriquement $s \circ r$.
4. On note r la rotation de centre i et d'angle $\pi/3$ et r' la rotation de centre $2\mathrm{i}$ et d'angle $-\pi/3$. Caractériser géométriquement $r' \circ r$.

Chapitre 2

Logique, ensembles

« Si la logique est l'hygiène du mathématicien, ce n'est pas elle qui lui fournit sa nourriture ; le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes. »

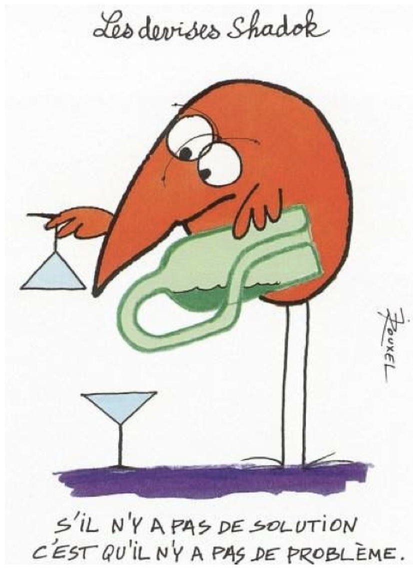
— André Weil (1906-1998)

« Sur l'enseigne du barbier du village, on peut lire : Je rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là. Savez-vous qui rase le barbier ? »

— Bertrand Russel (1872–1970)

« J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion. »

— Stendhal (1783-1842)



2.1 Éléments de logique

2.1.1 Assertion, prédicat

Définition 2.1.1

— On appelle *assertion* toute phrase mathématique à laquelle on peut attribuer une et une seule valeur de vérité : vrai ou faux.
— Soit E un ensemble. On appelle *prédicat* sur E toute phrase mathématique dont la valeur de vérité dépend d'un élément $x \in E$.

Exemples

⇨ « 7 est un nombre premier » est une assertion vraie. L'assertion « 7 est divisible par 3 » est fausse.

⇨ $P(x) \coloneqq$ « x est rationnel » est un prédicat sur $\mathbb{R}$. $P(3/4)$ est vrai alors que $P(\sqrt{2})$ est faux.

⇨ $P(a,b,c) \coloneqq$ « $a^2+b^2=c^2$ » est un prédicat sur $\mathbb{N}^3$.

⇨ « L'ensemble des nombres premiers est infini » est une assertion vraie. L'assertion « Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p+2$ est premier » est une assertion dont on pense qu'elle est vraie. Mais aujourd'hui, personne n'en a fait la preuve.

Remarques

⇨ Deux principes fondamentaux gouvernent les valeurs de vérité des assertions.
— Le *principe de non-contradiction* : Une assertion ne peut être à la fois vraie et fausse.
— Le *principe du tiers exclu* : Une assertion qui n'est pas vraie est fausse.

⇨ Si P est un prédicat, on dit que P est vrai lorsque, quel que soit $x \in E$, $P(x)$ est vraie. Dire que P n'est pas vrai signifie qu'il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ est faux.

Définition 2.1.2

— Le *quantificateur universel* $\forall$ signifie « pour tout »
— Le *quantificateur existentiel* $\exists$ signifie « il existe (au moins) un »

Remarque

⇨ On trouve parfois le quantificateur $\exists!$ qui signifie « il existe un unique ».

Exercices 1

⇨ Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

1. $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad x+y \geqslant 0.$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x+y \geqslant 0.$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 \geqslant x.$

⇨ Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^{n+2} \leqslant x^{n+1} + x^n.$$

Définition 2.1.3

Soit P et Q deux assertions.
— On définit l'assertion (non P) comme étant vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

— On définit l'assertion $[P \quad \text{et} \quad Q]$ comme étant vraie lorsque P et Q sont vraies et fausse sinon.
— On définit l'assertion $[P \quad \text{ou} \quad Q]$ comme étant vraie lorsqu'au moins l'une des deux assertions est vraie, et fausse sinon.

Remarques

⇨ Les valeurs de vérité de ces assertions sont données par les tables suivantes.

P	V	F
non P	F	V

non P

P \ Q	V	F
V	V	F
F	F	F

$P \quad \text{et} \quad Q$

P \ Q	V	F
V	V	V
F	V	F

$P \quad \text{ou} \quad Q$

⇨ Lorsque le menu d'un restaurant vous propose « fromage ou dessert », le « ou » est employé au sens strict (on dit aussi exclusif) ; il n'est pas possible d'avoir les deux. En mathématiques, le « ou » est employé au sens large (on dit aussi inclusif). Lorsqu'on dit qu'un entier naturel n est divisible par 2 ou par 3, il peut très bien être divisible par 2 et par 3.

2.1.2 Implication, équivalence

Définition 2.1.4

Soit P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \Longrightarrow Q$ comme étant fausse lorsque P est vraie et Q est fausse, et vraie sinon.

Remarques

⇨ Montrer $P \Longrightarrow Q$ revient à prouver que si P est vraie, alors Q est vraie.

⇨ Si P et Q sont deux prédicats sur E, $P \Longrightarrow Q$ signifie que $Q(x)$ est vraie dès que $P(x)$ est vraie. Si c'est le cas, on écrit
$$\forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$$
et on dit que P est une condition suffisante pour Q ou que Q est une condition nécessaire pour P.

Exercices 2

⇨ Dans les exemples suivants, dites si le prédicat P est une condition nécessaire ou une condition suffisante pour Q.
— $E = \mathbb{R}$, $P(x) :=$ « $x \in \mathbb{Q}$ » et $Q(x) :=$ « $x^2 \in \mathbb{Q}$ ».
— E est l'ensemble des triangles du plan, $P(T) :=$ « T est isocèle » et $Q(T) :=$ « T est équilatéral ».
— $E = \mathbb{R}^2$, $P(x, y) :=$ « $x \equiv y \ [2\pi]$ » et $Q(x, y) :=$ « $x \equiv y \ [\pi]$ ».

⇨ Montrer que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad [xy > 0 \quad \text{et} \quad x + y > 0] \quad \Longrightarrow \quad [x > 0 \quad \text{et} \quad y > 0].$$

⇨ Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad |x| \leqslant \varepsilon\right] \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

Proposition 2.1.5: Modus Ponens

Soit P et Q deux assertions. Si P et $P \Longrightarrow Q$ sont vraies, alors Q est vraie.

Remarque

⇨ En pratique, on utilise cette proposition lorsque P et Q sont des prédicats. Si $P \Longrightarrow Q$ est vrai et x est un élément de E tel que $P(x)$ est vrai, alors $Q(x)$ est vrai. Dans ce cadre, on dit que $P \Longrightarrow Q$ est un théorème. Vérifier les hypothèses du théorème revient à vérifier que $P(x)$ est vrai et appliquer le théorème nous permet de conclure que $Q(x)$ est vrai. Traduisons mathématiquement le raisonnement suivant : « Socrate est un homme. Puisque tous les hommes sont mortels, alors Socrate est mortel ». Si $P(x) :=$ « x est un homme » et $Q(x) :=$ « x est mortel », alors l'énoncé « Tous les hommes sont mortels » s'écrit
$$\forall x \in U, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x).$$
Puisque Socrate est un homme (P (Socrate) est vrai), on en déduit que Socrate est mortel (Q (Socrate) est vrai).

Exercice 3

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < a \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant b.$$

Montrer que $a \leqslant b$.

Définition 2.1.6

Soit P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \Longleftrightarrow Q$ comme étant vraie lorsque P et Q ont même valeur de vérité, et fausse sinon.

Remarques

⇨ Les valeurs de vérité des assertions $P \Longrightarrow Q$ et $P \Longleftrightarrow Q$ sont regroupées dans les tableaux suivants.

P \ Q	V	F
V	V	F
F	V	V

$P \Longrightarrow Q$

P \ Q	V	F
V	V	F
F	F	V

$P \Longleftrightarrow Q$

⇨ Les assertions $P \Longleftrightarrow Q$ et $Q \Longleftrightarrow P$ ont même valeur de vérité ; on dit que la relation d'équivalence est symétrique.

⇨ Si P et Q sont deux prédicats sur E, dire que $P \Longleftrightarrow Q$ est vrai signifie que $Q(x)$ et $P(x)$ ont même valeur de vérité quel que soit $x \in E$. Si c'est le cas, on écrit

$$\forall x \in E, \quad P(x) \Longleftrightarrow Q(x)$$

et on dit que P est une condition nécessaire et suffisante pour Q.

Proposition 2.1.7

Soit P et Q deux assertions. Alors $P \Longleftrightarrow Q$ et $[(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)]$ ont même valeur de vérité.

Remarque

⇨ Pour démontrer que $P \Longleftrightarrow Q$, on pourra démontrer que $P \Longrightarrow Q$, puis que $Q \Longrightarrow P$; on dit qu'on raisonne par double implication.

Exercice 4

⇨ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \sin(\lambda x).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit 2π-périodique.

Proposition 2.1.8

Soit P, Q, R trois assertions. Alors

$$\begin{aligned} [P \quad \text{et} \quad (Q \quad \text{ou} \quad R)] &\quad\Longleftrightarrow\quad [(P \quad \text{et} \quad Q) \quad \text{ou} \quad (P \quad \text{et} \quad R)]\,, \\ [P \quad \text{ou} \quad (Q \quad \text{et} \quad R)] &\quad\Longleftrightarrow\quad [(P \quad \text{ou} \quad Q) \quad \text{et} \quad (P \quad \text{ou} \quad R)]\,. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.9: Lois de Morgan

Soit P et Q deux assertions. Alors

$$\begin{aligned} \text{non} \ (P \quad \text{et} \quad Q) &\quad\Longleftrightarrow\quad [(\text{non} \quad P) \quad \text{ou} \quad (\text{non} \quad Q)]\,, \\ \text{non} \ (P \quad \text{ou} \quad Q) &\quad\Longleftrightarrow\quad [(\text{non} \quad P) \quad \text{et} \quad (\text{non} \quad Q)]\,, \\ \text{non} \ (\text{non} \quad P) &\quad\Longleftrightarrow\quad P. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.10: Raisonnement par contraposée

Soit P et Q deux assertions. Alors

$$[P \Longrightarrow Q] \quad\Longleftrightarrow\quad [\text{non} \quad Q \Longrightarrow \text{non} \quad P]\,.$$

Remarque

⇨ Lorsque l'on démontre $[(\text{non } Q) \Longrightarrow (\text{non } P)]$ pour montrer que $[P \Longrightarrow Q]$, on dit que l'on raisonne par contraposée.

Exercice 5

⇨ Supposons que l'on ait montré que π^2 est irrationnel. Peut-on en déduire que π est irrationnel ?

Proposition 2.1.11

Soit P et Q deux assertions. Alors

$$[\text{non } (P \Longrightarrow Q)] \quad \Longleftrightarrow \quad [P \quad \text{et} \quad (\text{non } Q)] \,.$$

Proposition 2.1.12

Soit P un prédicat sur l'ensemble E. Alors

$$\begin{aligned} \text{non } [\forall x \in E, \quad P(x)] \quad &\Longleftrightarrow \quad [\exists x \in E, \quad \text{non } (P(x))] \,, \\ \text{non } [\exists x \in E, \quad P(x)] \quad &\Longleftrightarrow \quad [\forall x \in E, \quad \text{non } (P(x))] \,. \end{aligned}$$

Exercice 6

⇨ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire les phrases suivantes avec des quantificateurs. En déduire leur négation.

« f est majorée », « f est croissante », « f est décroissante ».

2.2 Ensemble

2.2.1 Ensemble, élément

Définition 2.2.1

Les notions d'*ensemble*, d'*élément* et d'*appartenance* sont des notions premières en mathématiques que l'on ne définit pas. Intuitivement, un ensemble est une collection d'objets mathématiques appelés éléments. La notation $x \in E$ signifie que l'élément x appartient à l'ensemble E.

Remarque

⇨ Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des objets mathématiques, l'ensemble constitué de ces éléments est noté $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Définition 2.2.2

Soit A et B deux ensembles. On dit que A est *inclus* dans B et on note $A \subset B$ lorsque

$$\forall x \in A, \quad x \in B.$$

Proposition 2.2.3

Deux ensembles A et B sont égaux lorsqu'ils possèdent les mêmes éléments, c'est-à-dire lorsque

$$A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset A.$$

Remarque

⇨ En particulier $\{0, 1\} = \{1, 0\}$ et $\{0, 0, 1\} = \{0, 1\}$.

Définition 2.2.4

Soit E un ensemble. On appelle partie de E tout ensemble A inclus dans E. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarque

⇨ Un même objet mathématique peut très bien, selon le contexte, être un élément ou un ensemble. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}$ est un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 7

⇨ Déterminer $\mathcal{P}(\{1,2\})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$.

2.2.2 Opérations élémentaires

Définition 2.2.5

Soit E un ensemble et P un prédicat sur E. On définit

$$\{x \in E \mid P(x)\}$$

comme l'ensemble des éléments x de E tels que $P(x)$ est vrai. C'est une partie de E.

Définition 2.2.6

Soit A et B deux parties de E. On définit

$$A \cap B := \{x \in E \mid x \in A \quad \text{et} \quad x \in B\}, \qquad A \cup B := \{x \in E \mid x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\},$$

$$\overline{A} := \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Remarques

⇨ Le complémentaire de A dans E est aussi noté A^c.

⇨ On dit que deux ensembles A et B sont *disjoints* lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Proposition 2.2.7

Soit A, B, C trois parties de E. Alors

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Proposition 2.2.8: Lois de Morgan

Soit A et B deux parties de E. Alors

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}, \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}, \\ \overline{\overline{A}} &= A. \end{aligned}$$

Exercices 8

⇨ Soit A et B deux parties d'un même ensemble. Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

⇨ Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E non vide.

1. Si $A \cup B = A \cup C$, a-t-on $B = C$?
2. Si $A \cup B = A \cap B$, a-t-on $A = B$?
3. Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.
4. Montrer que si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \varnothing$, alors $A = \overline{B}$ et $B = \overline{A}$.

Définition 2.2.9

Soit A et B deux parties de E. On définit

$$A \setminus B := \{x \in E \mid x \in A \quad \text{et} \quad x \notin B\}.$$

Remarques

⇨ L'ensemble $A \setminus B$ se lit « A privé de B ».

⇨ Si A est une partie de E, $\bar{A} = E \setminus A$.

Définition 2.2.10

Soit A et B deux ensembles. On définit $A \times B$ comme l'ensemble des *couples* (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$. Par définition, deux couples $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ sont égaux lorsque $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

Définition 2.2.11

— Si $A_1, \ldots, A_n$ sont n ensembles, on définit $A_1 \times \cdots \times A_n$ comme l'ensemble des n-uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ avec $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$. Par définition, deux n-uplets $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$ sont égaux lorsque

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad a_k = b_k.$$

— Si A est un ensemble et $n \in \mathbb{N}$, on définit A^n comme

$$A^n := \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois } A}.$$

Remarques

⇨ A^1 est l'ensemble des 1-uplets (a), pour $a \in A$; on confondra cet ensemble avec A. Quant à A^0, c'est l'ensemble qui contient un unique élément, le 0-uplet $()$.

⇨ Pour énoncer qu'un prédicat portant sur deux variables est vrai, on peut écrire « $\forall x \in A, \quad \forall y \in A, \quad P(x, y)$ ». On condense cependant souvent cette phrase en « $\forall (x, y) \in A^2, \quad P(x, y)$ » ou en « $\forall x, y \in A, \quad P(x, y)$ ».

2.3 Application

2.3.1 Définition, exemples

Définition 2.3.1

Soit E et F deux ensembles. Une *application* f de E dans F associe à tout élément $x \in E$ un unique élément $f(x) \in F$, appelé image de x par f. On note

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

On dit que E est le *domaine* de f et que F est son *codomaine*. L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$.

Remarques

⇨ Deux applications sont égales lorsqu'elles ont même domaine et codomaine et qu'elles prennent la même valeur en chaque point de ce domaine.

⇨ On utilise aussi les expressions « ensemble de départ » et « ensemble d'arrivée » d'une application pour désigner respectivement son domaine et son codomaine.

⇨ « application » et « fonction » sont synonymes. L'usage veut cependant que l'on réserve le mot « fonction » aux applications dont le domaine et le codomaine sont des parties de $\mathbb{C}$.

⇨ L'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ est aussi noté F^E.

⇨ Pour les fonctions usuelles, il arrive qu'on omette les parenthèses et qu'on écrive $\sin x$ au lieu de $\sin(x)$. Cependant, on ne se permettra pas de faire cela avec les autres fonctions.

Définition 2.3.2

Si f est une application de E dans F, on appelle *graphe* de f l'ensemble

$$\{(x, y) \in E \times F \mid f(x) = y\}.$$

Définition 2.3.3

Soit A une partie de E. On appelle *fonction caractéristique* de A et on note $\mathbb{1}_A$ l'application de E dans $\{0, 1\}$

définie par

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarques

⇨ Deux parties A et B de E sont égales si et seulement si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

⇨ Si A et B sont deux parties de E, alors

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \max\left(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\right).$$

Définition 2.3.4

Soit $f : E \to F$ et $y \in F$. On appelle *antécédent* de y tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 9

⇨ Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui au couple (x, y) associe le couple $(x+2y, xy)$. Déterminer les antécédents de $(3, 1)$.

Définition 2.3.5

Soit $f : E \to F$.

— Soit B une partie de F. On appelle image réciproque de B et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est dans B.

$$f^{-1}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

— Soit A une partie de E. On appelle image directe de A et on note $f(A)$ l'ensemble des éléments de F qui sont image d'un élément de A par f.

$$f(A) := \{y \in F \mid \exists x \in A, \quad f(x) = y\}$$

L'ensemble $f(E)$ est appelé image de f et noté $\operatorname{Im} f$.

Remarque

⇨ L'ensemble image $f(A)$ est aussi noté

$$\{f(x) : x \in A\}.$$

Exercices 10

⇨ Soit f la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

Calculer $f^{-1}(f(\{\pi/2\}))$ et $f(f^{-1}(\{0, 2\}))$.

⇨ Soit f la fonction de $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$. Calculer $f^{-1}(\mathbb{U})$.

⇨ Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{x}{1+x^2}.$$

En lisant le tableau de variations de f, intuiter $f(\mathbb{R})$, puis prouver rigoureusement ce résultat.

⇨ Soit f une application de E dans F. Si A est une partie de E, comparer $f^{-1}(f(A))$ et A. De même, si B est une partie de F, comparer $f(f^{-1}(B))$ et B.

Définition 2.3.6

Soit f une application de E dans F.

— Si A est une partie de E, l'application

$$f\big|_A : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est appelée *restriction* de f à A.

— On dit qu'une application g est un *prolongement* de f lorsque f est une restriction de g.
— Si B est une partie de F telle que
$$\forall x \in E, \quad f(x) \in B$$
l'application
$$f|^B : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
est appelée *corestriction* de f à B.

Remarque

⇨ Soit $f : E \to F$, A une partie de E et B une partie de F telles que
$$\forall x \in A, \quad f(x) \in B.$$
Alors, on peut définir l'application
$$f|_A^B : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
appelée restriction de f à A, corestreinte à B.

Définition 2.3.7

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On définit l'application $g \circ f$ de E dans G par
$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) := g\left(f(x)\right).$$

Remarque

⇨ Si A est une partie de E, alors $(g \circ f)(A) = g(f(A))$. De même, si B est une partie de G, alors
$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)).$$

Proposition 2.3.8

Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. Alors
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$
On note cette application $h \circ g \circ f$.

2.3.2 Application injective, surjective, bijective

Définition 2.3.9

Soit $f : E \to F$. On dit que f est *injective* lorsque
$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$
c'est-à-dire lorsque tout élément de F a au plus un antécédent.

Exercices 11

⇨ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement monotone alors elle est injective. La réciproque est-elle vraie ?

⇨ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$. Montrer qu'elle est injective.

⇨ Soit φ l'application qui à la fonction f de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ associe la fonction $\varphi(f)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\varphi(f)](x) := f(\sin x)$$
Montrer que φ est injective.

⇨ Soit E un ensemble et A une partie de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A \end{array}$$

soit injective.

Définition 2.3.10

Soit $f : E \to F$. On dit que f est *surjective* lorsque

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y$$

c'est-à-dire lorsque tout élément de F a au moins un antécédent.

Proposition 2.3.11

Une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Exercices 12

⇨ L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & f(0) \end{array}$$

est-elle injective ? surjective ?

Définition 2.3.12

On dit qu'une application $f : E \to F$ est *bijective* lorsqu'elle est injective et surjective, c'est-à-dire lorsque tout élément de F possède un unique antécédent.

Exercices 13

⇨ Montrer que la fonction f qui à x associe $\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

⇨ Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (a, b) & \longmapsto & 2^a (2b+1) - 1 \end{array}$$

est bijective.

⇨ Soit X un ensemble et $f : X^2 \to X$ une bijection. Montrer que

$$\begin{array}{rccc} g : & X^3 & \longrightarrow & X \\ & (x, y, z) & \longmapsto & f(x, f(y, z)) \end{array}$$

est bijective.

Proposition 2.3.13

— La composée de deux applications injectives est injective.
— La composée de deux applications surjectives est surjective.
— La composée de deux applications bijectives est bijective.

Exercices 14

⇨ Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. De même, montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

⇨ Est-il vrai que si $g \circ f$ est bijective, f et g le sont ?

Définition 2.3.14

Soit E un ensemble. On appelle *identité* et on note Id_E l'application de E dans E définie par

$$\forall x \in E, \quad \operatorname{Id}_E(x) := x.$$

Si f est une application de E dans F

$$f \circ \operatorname{Id}_E = f \quad \text{et} \quad \operatorname{Id}_F \circ f = f.$$

Proposition 2.3.15

Soit f une application de E dans F.

- L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que
$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_F\,.$$
Si tel est le cas, g est unique ; on l'appelle *bijection réciproque* de f et on la note f^{-1}.
- Si $f : E \to F$ est bijective, f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Remarques

⇨ Soit f une bijection de E dans F. Quel que soit $y \in F$, si $x \in E$ est tel que $f(x) = y$, alors $f^{-1}(y) = x$.

⇨ La fonction ln de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ est une bijection et sa bijection réciproque est la fonction exp de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercices 15

⇨ Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (2x+y, 5x+3y) \end{array}$$
est bijective et calculer f^{-1}.

⇨ Soit f une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement croissante, il en est de même pour f^{-1}. Que dire si f est impaire ?

Proposition 2.3.16

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

2.3.3 Famille

Si E est un ensemble, il est courant de se donner n éléments $f_1, \ldots, f_n$ de E. Cela revient à définir une application
$$\begin{array}{rccl} f : & [\![1,n]\!] & \longrightarrow & E \\ & i & \longmapsto & f(i) \end{array}$$
où l'on pose $f(i) \coloneqq f_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Nous dirons que f est une famille d'éléments de E indexée par $[\![1,n]\!]$. On peut généraliser ce principe et construire des familles indexées par un ensemble quelconque. Par exemple, on peut considérer l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, qui à $\lambda \in \mathbb{R}$ associe la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) \coloneqq \mathrm{e}^{\lambda x}.$$
On a ainsi défini une famille d'éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ indexée par $\mathbb{R}$.

Définition 2.3.17

Soit E un ensemble et I un ensemble, appelé ensemble d'indices. On appelle *famille d'éléments de E indexée par I* toute application
$$\begin{array}{rccl} f : & I & \longrightarrow & E \\ & i & \longmapsto & f_i. \end{array}$$
Cette application est notée $(f_i)_{i \in I}$. L'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I est noté E^I.

Remarques

⇨ Une famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$ est une suite d'éléments de E.

⇨ On appelle sous-famille d'une famille $(f_i)_{i \in I}$ toute famille de la forme $(f_i)_{i \in J}$ où J est une partie de I.

⇨ Si A est un ensemble, on dit qu'une famille $(f_i)_{i \in I}$ est la famille des éléments de A lorsque f est une bijection de I dans A. Le fait de parler de « la » famille des éléments de A est un abus de langage, car cette famille n'est pas unique.

Définition 2.3.18

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On définit alors

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{x \in E \mid \forall i \in I, \quad x \in A_i\},$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{x \in E \mid \exists i \in I, \quad x \in A_i\}.$$

Exercice 16

⇨ Soit $f : E \to E$. On définit f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$f^0 := \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \left[\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{n+1} := f \circ f^n\right]$$

Soit A une partie de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n := f^n(A)$. Enfin, on pose $B := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que $A \subset B$ et que $f(B) \subset B$.

Proposition 2.3.19

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. Alors

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Définition 2.3.20: Partition

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une *partition* de E lorsque

$$E = \bigcup_{i\in I} A_i \qquad \text{et} \qquad \left[\forall i, j \in I, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing\right].$$

Remarques

⇨ La définition de partition peut varier d'un cours à l'autre. Dans certains cours, on demande en plus que les A_i soient non vides ; on appelle alors *recouvrement disjoint* ce que nous appelons ici partition.

⇨ La notion de partition a été définie à l'aide de familles. Mais on peut aussi la définir de manière ensembliste ; on dit qu'une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}(E)$ est une *partition (au sens ensembliste)* de E lorsque
— $\forall x \in E, \quad \exists A \in \mathcal{P}, \quad x \in A$.
— $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{P}, \quad A_1 \neq A_2 \Longrightarrow A_1 \cap A_2 = \varnothing$.
— $\forall A \in \mathcal{P}, \quad A \neq \varnothing$.
Remarquons que dans la définition ensembliste, on demande à ce que les ensembles appartenant à $\mathcal{P}$ soient non vides.

Exercice 17

⇨ Déterminer les partitions au sens ensembliste de $E := \{1, 2, 3\}$.

2.4 Relation binaire

Définition 2.4.1

Soit E un ensemble. On appelle *relation binaire* sur E tout prédicat $\mathcal{R}$ défini sur $E \times E$. Si x et y sont deux éléments de E et $\mathcal{R}(x, y)$ est vrai, on écrit $x\mathcal{R}y$.

Définition 2.4.2

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est
— *réflexive* lorsque

$$\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x.$$

— *transitive* lorsque

$$\forall x, y, z \in E, \quad [x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z] \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$$

— *symétrique* lorsque

$$\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x.$$

— *antisymétrique* lorsque

$$\forall x, y \in E, \quad [x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}x] \Longrightarrow x = y.$$

2.4.1 Relation d'ordre

Définition 2.4.3

On dit qu'une relation binaire $\preceq$ est une *relation d'ordre* lorsqu'elle est
— réflexive : $\forall x \in E, \quad x \preceq x.$
— transitive : $\forall x, y, z \in E, \quad [x \preceq y \quad \text{et} \quad y \preceq z] \Longrightarrow x \preceq z.$
— antisymétrique : $\forall x, y \in E, \quad [x \preceq y \quad \text{et} \quad y \preceq x] \Longrightarrow x = y.$
On appelle *ensemble ordonné* tout ensemble muni d'une relation d'ordre.

Remarques

⇨ La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. La relation $\leqslant$ définie sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \leqslant g \quad \Longleftrightarrow \quad [\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x)]$$

est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

⇨ Si E est un ensemble, la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

⇨ Si $\preceq$ est une relation d'ordre sur E, la relation $\succeq$ définie par

$$\forall x, y \in E, \quad x \succeq y \quad \Longleftrightarrow \quad y \preceq x$$

est une relation d'ordre appelée relation d'ordre opposée à la première.

⇨ La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas réflexive.

Exercice 18

⇨ Montrer que la relation $|$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad a|b \quad \Longleftrightarrow \quad [\exists k \in \mathbb{N}, \quad b = ka]$$

est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

Définition 2.4.4

On dit qu'une relation d'ordre $\preceq$ est totale lorsque

$$\forall x, y \in E, \quad x \preceq y \quad \text{ou} \quad y \preceq x.$$

Remarque

⇨ La relation d'ordre $\leqslant$ est totale sur $\mathbb{R}$. Par contre, les relations $\leqslant$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ et $|$ sur $\mathbb{N}$ ne sont pas totales.

Définition 2.4.5

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.
— On dit que $M \in E$ est un *majorant* de A lorsque

$$\forall a \in A, \quad a \preceq M.$$

— On dit que $m \in E$ est un *minorant* de A lorsque

$$\forall a \in A, \quad m \preceq a.$$

Exercice 19

⇨ Soit $c > 0$. On définit la relation $\preceq$ sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, t), (x', t') \in \mathbb{R}^2, \quad (x, t) \preceq (x', t') \quad \Longleftrightarrow \quad |x' - x| \leqslant c \cdot (t' - t).$$

Vérifier que c'est une relation d'ordre. Dessiner l'ensemble des majorants et des minorants d'un couple (x_0, t_0).

L'ordre est-il total ?

Définition 2.4.6

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.
- On dit que A admet un *plus grand élément* lorsqu'il existe un majorant de A appartenant à A. Si un tel élément existe, il est unique et on l'appelle plus grand élément de A.
- On dit que A admet un *plus petit élément* lorsqu'il existe un minorant de A appartenant à A. Si un tel élément existe, il est unique et on l'appelle plus petit élément de A.

Remarques

⇨ Muni de l'ordre usuel, $[0, 1[$ admet un plus petit élément 0 mais n'admet pas de plus grand élément. Muni de la relation de divisibilité, $\{2, 3\}$ n'admet ni de plus grand ni de plus petit élément.

⇨ Un ensemble admettant un plus petit ou un plus grand élément est non vide.

⇨ Si E est totalement ordonné et A est une partie finie non vide de E, alors il admet un plus petit et un plus grand élément.

2.4.2 Relation d'équivalence

Définition 2.4.7

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une *relation d'équivalence* lorsqu'elle est
- réflexive : $\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$.
- transitive : $\forall x, y, z \in E, \quad [x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z] \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.
- symétrique : $\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$.

Remarque

⇨ Si E est un ensemble quelconque, la relation d'égalité est une relation d'équivalence. Si $n \in \mathbb{N}^*$, la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par « $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad a\mathcal{R}b \quad \Longleftrightarrow \quad a \equiv b \ [n]$ » est une relation d'équivalence. De même, si f est une application de E dans F, la relation $\mathcal{R}$ définie sur E par « $\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = f(y)$ » est une relation d'équivalence.

Exercice 20

⇨ Soit E un ensemble. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A\mathcal{R}B \quad \Longleftrightarrow \quad \text{« Il existe une bijection de } A \text{ dans } B. \text{ »}$$

est une relation d'équivalence.

Définition 2.4.8

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et $x \in E$. On appelle *classe d'équivalence de x* et on note $\mathrm{Cl}(x)$ l'ensemble des éléments de E en relation avec x

$$\mathrm{Cl}(x) := \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}.$$

On dit qu'une partie A de E est *une classe d'équivalence* lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $A = \mathrm{Cl}(x)$.

Remarque

⇨ Si $x, y \in E$, alors

$$\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y) \quad \Longleftrightarrow \quad x\mathcal{R}y.$$

Proposition 2.4.9

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Alors, l'ensemble des classes d'équivalence réalise une partition de E.

Exercice 21

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de classes d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ pour la relation de congruence modulo n.

2.5 L'ensemble des entiers naturels

Dans ce cours, nous ne chercherons pas à construire l'ensemble des entiers naturels. Nous nous limiterons à la définition intuitive suivante.

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Nous supposerons aussi définies les opérations usuelles $+$ et $\times$ ainsi que la relation d'ordre totale $\leqslant$. Nous admettrons enfin la proposition suivante.

Proposition 2.5.1

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Proposition 2.5.2

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

2.5.1 Récurrence

Proposition 2.5.3: Principe de récurrence

Soit A une partie de $\mathbb{N}$ telle que
- $0 \in A$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \in A \Longrightarrow n+1 \in A$.

Alors $A = \mathbb{N}$.

Remarques

⇨ Cette proposition est au cœur du principe de récurrence. Si $\mathcal{H}$ est un prédicat sur $\mathbb{N}$ tel que
- $\mathcal{H}_0$ est vraie,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$,

alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit pour démontrer cela d'appliquer la proposition précédente à

$$A := \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{H}_n \text{ est vraie}\}.$$

⇨ Le principe de récurrence double est une conséquence du principe de récurrence. En effet, si $\mathcal{H}$ est un prédicat sur $\mathbb{N}$ tel que
- $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont vraies,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad [\mathcal{H}_n \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{n+1}] \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+2}$,

alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit pour cela de remarquer que le prédicat $\mathcal{P}$ défini sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}_n := \text{« } \mathcal{H}_n \text{ et } \mathcal{H}_{n+1} \text{ sont vraies »}$$

vérifie le principe de récurrence.

⇨ De même, le principe de récurrence forte est une conséquence du principe de récurrence. En effet, si $\mathcal{H}$ est un prédicat sur $\mathbb{N}$ tel que
- $\mathcal{H}_0$ est vraie,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad [\mathcal{H}_0 \quad \text{et} \quad \ldots \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_n] \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$,

alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit pour cela de remarquer que le prédicat $\mathcal{P}$ défini sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}_n := \text{« } \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n \text{ sont vraies »}.$$

vérifie le principe de récurrence.

Exercices 22

⇨ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 2$ est un multiple de 3.

⇨ Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 := 1, \quad u_1 := 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} := u_{n+1} + \frac{2}{n+2} u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant n^2$.

⇨ Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit comme produit de nombres premiers.

2.5.2 Définition par récurrence

Proposition 2.5.4

Soit E un ensemble, $f \in \mathcal{F}(E,E)$ et $x \in E$. Alors, il existe une unique suite (u_n) d'éléments de E telle que

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Remarque

- Il arrive qu'au lieu d'avoir une fonction $f \in \mathcal{F}(E,E)$, on ait une fonction $f \in \mathcal{F}(A,E)$ où A est une partie de E. Si $x \in A$, et que l'on souhaite prouver l'existence d'une unique suite (u_n) telle que

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

nous sommes face à un problème bien plus délicat. En effet, l'existence d'une telle suite n'est pas garantie. Par exemple, il n'existe pas de suite (u_n) telle que

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{u_n - 1}.$$

En effet, si tel était le cas, on aurait $u_1 = 1$ donc $u_2 = (3u_1 - 2)/(u_1 - 1)$ ne serait pas défini. On ne peut tout simplement pas appliquer la proposition précédente, car la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x-2}{x-1} \end{array}$$

n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Définition 2.5.5

Soit E un ensemble, A une partie de E et $f \in \mathcal{F}(A,E)$. On dit qu'une partie B de A est *stable* par f lorsque

$$\forall x \in B, \quad f(x) \in B.$$

Remarques

- Si B est stable par f, il est possible de considérer la restriction de f à B, corestreinte à B. On parle alors d'application *induite* à B.
- Si A est une partie de E, $f \in \mathcal{F}(A,E)$ et $x \in A$, pour prouver l'existence d'une unique suite (u_n) telle que

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

il suffit de trouver une partie B de A, stable par f et telle que $x \in B$.

Exercice 23

- Soit $x \in [2, +\infty[$. Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) telle que

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{u_n - 1}.$$

2.6 Qcm

Éléments de logique

Assertion, prédicat

Implication, équivalence

Ensemble

Ensemble, élément

1. Soit E l'ensemble $\{\{1,2\},3\}$. Alors

   ☐ **a.** 1 appartient à E ☐ **b.** $\{1\}$ est inclus dans E
   ☐ **c.** $\{1,2\}$ appartient à E ☐ **d.** $\{1,2\}$ est inclus dans E

2. Si E est un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble de ses parties, on a toujours

   ☐ **a.** $E \subset \mathcal{P}(E)$ ☐ **b.** $E \in \mathcal{P}(E)$
   ☐ **c.** $\{E\} \in \mathcal{P}(E)$ ☐ **d.** $E \cap \mathcal{P}(E)$ est non vide

Opérations élémentaires

1. Soit E, F, G trois ensembles. Alors $E \cap (F \cup G)$ vaut

   ☐ **a.** $(E \cup F) \cap (E \cup G)$ ☐ **b.** $(E \cap F) \cup (E \cap G)$ ☐ **c.** $(E \cap F) \cup G$ ☐ **d.** $(E \cap F) \cap (E \cap G)$

2. Soit E, F, G, H quatre ensembles tels que $E \subset G$ et $F \subset H$. Laquelle des inclusions suivantes n'est pas vérifiée ?

   ☐ **a.** $(E \cap F) \subset (G \cap H)$ ☐ **b.** $(E \cup F) \subset (G \cup H)$
   ☐ **c.** $(E \setminus F) \subset (G \setminus H)$ ☐ **d.** $(E \times F) \cap (G \times H)$

Application

Définition, exemples

1. Si f est une application de E dans F et si A est une partie de F, alors l'ensemble $f^{-1}(A)$ est

   ☐ **a.** $\{x \in E \mid f(x) \in A\}$ ☐ **b.** $\left\{f^{-1}(x) : x \in a\right\}$ ☐ **c.** $A \cap F$ ☐ **d.** $A \cap E$

2. Soit f une application de E dans F. Quelle condition est nécessaire pour que la fonction $f \circ f$ soit définie ?

   ☐ **a.** $E = F$ ☐ **b.** $f(E) \subset E$ ☐ **c.** $f(E) \subset F$ ☐ **d.** $f^{-1}(F) \subset E$

Application injective, surjective, bijective

1. Soit f une application de E dans E. Laquelle des conditions suivantes n'est pas suffisante pour affirmer que f est injective ?

   ☐ **a.** f est bijective ☐ **b.** $f \circ f$ est bijective ☐ **c.** $f \circ f$ est injective ☐ **d.** $f \circ f$ est surjective

2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et g la restriction de f à $[0,+\infty[$. On peut dire que

   ☐ **a.** si f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors g est surjective de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$
   ☐ **b.** si f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors g est surjective de $[0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$
   ☐ **c.** si f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors g est surjective de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$
   ☐ **d.** si f est injective, alors g est injective

3. Laquelle des fonctions suivantes établit une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$?

   ☐ **a.** $x \mapsto \mathrm{e}^x$ ☐ **b.** $x \mapsto x^2$ ☐ **c.** $x \mapsto x^3$ ☐ **d.** $x \mapsto |x|$

4. Si f et g sont deux bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, quelle est la bijection réciproque de $g \circ f$?

   ☐ **a.** $g^{-1} \circ f^{-1}$ ☐ **b.** $f^{-1} \circ g^{-1}$ ☐ **c.** $g^{-1} + f^{-1}$ ☐ **d.** $f^{-1} \times g^{-1}$

Familles

1. Que vaut la réunion suivante : $\cup_{n\geqslant 1}\left[1, 1+\frac{1}{n}\right[$?

☐ **a.** $\{1\}$ ☐ **b.** $[1,2[$ ☐ **c.** $]1,2[$ ☐ **d.** $[1,2]$

Relation binaire

1. Parmi les relations binaires suivantes, laquelle n'est pas réflexive ?

☐ **a.** le parallélisme, sur l'ensemble des droites du plan
☐ **b.** l'orthogonalité, sur l'ensemble des droites du plan
☐ **c.** la divisibilité, sur l'ensemble des entiers naturels non nuls
☐ **d.** l'égalité, dans $\mathbb{R}$

Relation d'ordre

1. Dans lequel des ensembles ordonnés suivants existe-t-il des parties non vides et non minorées ?

☐ **a.** $\mathbb{N}$ muni de l'ordre usuel ☐ **b.** $\mathbb{N}^*$ muni de la divisibilité
☐ **c.** $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ muni de l'inclusion ☐ **d.** $]0,+\infty[$ muni de l'ordre usuel

Relation d'équivalence

L'ensemble des entiers naturels

Récurrence

Définition par récurrence

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par son premier terme $u_1 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} \coloneqq u_n + 1/u_n$. Alors, on peut montrer par récurrence sur n que

☐ **a.** u_n est rationnel ☐ **b.** $u_n > 0$ ☐ **c.** $u_n \leqslant u_{n+1}$ ☐ **d.** $u_n \leqslant nu_1$

2.7 Exercices

Éléments de logique

Assertion, prédicat

Implication, équivalence

Exercice 1 : Phrases mathématiques

On considère les propositions

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad [(\forall y \in \mathbb{R}, \quad xy = 0) \Longrightarrow x = 0]$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad [xy = 0 \Longrightarrow x = 0]$.

Sont-elles vraies ou fausses ? Bien entendu, on justifiera.

Exercice 2 : Quantificateurs

Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes, où (u_n) désigne une suite réelle et f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. La suite u est majorée.
2. La suite u n'est pas majorée.
3. La fonction f est nulle.
4. La fonction f n'est pas nulle.
5. La fonction f n'est pas croissante.
6. La fonction f est périodique.
7. La fonction f n'est pas périodique.
8. La fonction f n'est pas paire.
9. La fonction f n'est pas bornée.

Exercice 3 : Autour des suites

Soit (u_n) une suite réelle. Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes

1. $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant A$.
2. $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad u_n > A$.

Que signifient ces énoncés ?

Ensemble

Ensemble, élément

Opérations élémentaires

Exercice 4 : Ensembles

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Montrer que
$$A \cap B = A \cup B \Longrightarrow A = B.$$
2. Montrer que
$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$$

Exercice 5 : Ensembles

Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que les 3 assertions suivantes sont deux à deux équivalentes.

— $A \setminus B \subset C$.
— $A \setminus C \subset B$.
— $A \subset B \cup C$.

Exercice 6 : Équation ensembliste

Soit A, B deux parties de E.

1. On souhaite résoudre l'équation $A \cup X = B$ pour $X \in \mathcal{P}(E)$.
   (a) Montrer que si l'équation admet au moins une solution, alors $A \subset B$.
   (b) Montrer que si $A \subset B$, l'ensemble des solutions de l'équation est
   $$\{(B \setminus A) \cup T : T \in \mathcal{P}(A)\}.$$
   (c) Conclure.
2. On souhaite résoudre l'équation $A \cap X = B$ pour $X \in \mathcal{P}(E)$.
   (a) Montrer que si l'équation admet au moins une solution, alors $B \subset A$.
   (b) Montrer que si $B \subset A$, l'ensemble des solutions de l'équation est
   $$\left\{B \cup T : T \in \mathcal{P}(\bar{A})\right\}.$$
   (c) Conclure.

Exercice 7 : Équation ensembliste

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. Discuter et résoudre l'équation

$$(A \cap X) \cup (B \cap X^c) = \varnothing.$$

Application

Définition, exemples

Exercice 8 : Différence symétrique

Soit E un ensemble. Quels que soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on définit la différence symétrique $A\Delta B$ entre A et B par

$$A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Déterminer $A\Delta B$ dans les deux exemples suivants.
   — $E := \{1, 2, 3, 4\}$, $A := \{1, 2\}$, $B := \{1, 3\}$.
   — $E := \mathbb{R}$, $A :=]-\infty, 2]$, $B := [1, +\infty[$.
2. Montrer que
   $$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A\Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right).$$
3. Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$
   $$\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.$$
4. En déduire que la loi Δ est associative sur $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire que
   $$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), \quad A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C.$$

Application injective, surjective, bijective

Exercice 9 : Fonction de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$

Soit f la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z - \dfrac{1}{z} \end{array}$$

1. Montrer que f est surjective mais non injective.
2. Déterminer $f^{-1}(\mathrm{i}\mathbb{R})$.
3. Déterminer $f(\mathbb{U})$.

Exercice 10 : Fonction de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$

Soit f la fonction

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & \left(u^2+v^2, uv\right) \end{array}$$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Déterminer les antécédents de $(3-2\mathrm{i}, 3+\mathrm{i})$ par f.

Exercice 11 : Injection, surjection

Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to E$.

1. Montrer que si $f \circ g \circ f = f$ et que f est injective, alors g est surjective.
2. Montrer que si $g \circ f \circ g = g$ et que g est surjective, alors f est injective.

Exercice 12 : Image directe, image réciproque

Soit $f : E \to F$, A une partie de E et B une partie de F. Montrer que

$$f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B.$$

Exercice 13 : Une bijection de $[0,1]$ dans $]0,1[$

Montrer que la fonction $f : [0,1] \to]0,1[$ définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{n+2} & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

est une bijection.

Exercice 14 : Application ensembliste

Soit A et B deux parties de E et

$$f: \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B)\,. \end{array}$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
3. On suppose que f est bijective. Calculer f^{-1}.

Exercice 15 : Application fonctionnelle

Soit f une application de E dans E et φ l'application

$$\varphi: \begin{array}{rcl} \mathcal{F}(E,E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E,E) \\ g & \longmapsto & g \circ f. \end{array}$$

Montrer que φ est bijective si et seulement si f l'est.

Exercice 16 : Haskell Curry

Soit A, B, C trois ensembles. Montrer que l'application

$$\varphi: \begin{array}{rcl} \mathcal{F}(A \times B, C) & \longrightarrow & \mathcal{F}(A, \mathcal{F}(B,C)) \\ f & \longmapsto & \varphi(f): \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \mathcal{F}(B,C) \\ a & \longmapsto & [\varphi(f)](a): \begin{array}{rcl} B & \longrightarrow & C \\ b & \longmapsto & f(a,b) \end{array} \end{array} \end{array}$$

est bijective.

Exercice 17 : Il n'y a pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$

Montrons que si E est un ensemble, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une surjection φ de E dans $\mathcal{P}(E)$. Conclure a une absurdité en considérant

$$A \coloneqq \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}.$$

Exercice 18 : Composition, injection et surjection

1. Soit A, B, C, D quatre ensembles, $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ trois applications telles que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.
2. Soit X, Y, Z trois ensembles et $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to X$ trois applications. On forme les applications composées $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$. On suppose que deux d'entre elles sont surjectives et la troisième injective. Montrer qu'alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 19 : Inversion à droite, à gauche d'une application

Soit f une application de A dans B.

1. (a) Montrer que f est surjective si et seulement si il existe une application g de B dans A telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_B$.
   (b) Dans le cas où f est surjective, montrer que g est unique si et seulement si f est bijective.
2. (a) Montrer que f est injective si et seulement si il existe une application g de B dans A telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$.
   (b) Dans le cas où f est injective, montrer que g est unique si et seulement si f est bijective.

Exercice 20 : Image directe et réciproque

Soit f une application de A dans B.

1. Montrer que f est surjective si et seulement si quelle que soit la partie Y de B, on a $f(f^{-1}(Y)) = Y$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si quelle que soit la partie X de A, on a $f^{-1}(f(X)) = X$.

Exercice 21 : Application

Soit E un ensemble et f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 22 : Application

Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F, et g une application de F dans E. On suppose que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Familles

Exercice 23 : Partition

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{1, 2, 3\}$. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose $A_i \coloneqq \{f \in E \mid f(0) = i\}$. Montrer que les A_i forment une partition de E.

Relation binaire

Relation d'ordre

Exercice 24 : Ordre sur $\mathbb{N}^*$

On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \quad n\mathcal{R}m \quad \Longleftrightarrow \quad [\exists q \in \mathbb{N}^*, \quad m = n^q].$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
2. Est-ce que $\mathcal{R}$ est totale ?

Exercice 25 : Plus grand, plus petit élément

Montrer que si E est un ensemble ordonné dont l'ordre est total, toute partie finie de E admet un plus petit et un plus grand élément. Que dire si l'ordre n'est pas total ?

Exercice 26 : Applications croissantes

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. Une application f de E dans E est dite croissante lorsque

$$\forall x, y \in E, \quad x \preceq y \Longrightarrow f(x) \preceq f(y).$$

1. Montrer que la composée de deux applications croissantes est croissante.
2. Montrer que si E est totalement ordonné, l'application réciproque d'une bijection croissante est croissante.

Relation d'équivalence

Exercice 27 : Relation sur $\mathbb{R}$

On note $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x = y^2 - 2y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer la classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 28 : Factorisation canonique

Soit f une application de A dans B et $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur A par

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1\mathcal{R}x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que les classes d'équivalence sont les images réciproques des $\{y\}$ pour $y \in f(A)$.

On appelle ensemble quotient $A/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$.

3. Soit s l'application de A dans $A/\mathcal{R}$ qui à x associe la classe de x. Montrer que s est une surjection appelée surjection canonique.
4. Soit i l'application de $f(A)$ dans B qui à y associe y. Montrer que i est une injection appelée injection canonique.
5. Montrer qu'il existe une et une seule application $\bar{f}$ de $A/\mathcal{R}$ dans $f(A)$ telle que $f = i \circ \bar{f} \circ s$. Montrer que $\bar{f}$ est une bijection.
6. Soit C un ensemble et g une application de A dans C. Montrer qu'il existe une application $\bar{g}$ de $A/\mathcal{R}$ dans C telle que $g = \bar{g} \circ s$ si seulement si

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1\mathcal{R}x_2 \Longrightarrow g(x_1) = g(x_2).$$

L'ensemble des entiers naturels

Récurrence

Exercice 29 : Inégalité

Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} \leqslant \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

Exercice 30 : Fibonacci

On considère la suite de Fibonacci définie par

$$F_0 \coloneqq 0, \quad F_1 \coloneqq 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} \coloneqq F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n \geqslant n - 1$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.
3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \quad \text{et} \quad F_{2n+2} = F_{n+2}^2 - F_n^2.$$

Exercice 31 : Inégalité sur Fibonacci

On considère la suite de Fibonacci définie par

$$F_0 \coloneqq 1, \quad F_1 \coloneqq 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} \coloneqq F_{n+1} + F_n.$$

Déterminer les $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n \leqslant \alpha r^n.$$

Exercice 32 : Inégalité

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}.$$

Exercice 33 : Injections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

Déterminer les injections f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) \leqslant n.$$

Exercice 34 : Équation fonctionnelle

Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) + (f \circ f)(n) = 2n.$$

1. Déterminer une fonction vérifiant (E).
2. Réciproquement, soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant (E).
   (a) Montrer que f est injective.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = n$. Conclure.

Exercice 35 : Équation fonctionnelle

Montrer qu'il existe une unique bijection $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(n) - n| = 1.$$

Que se passe-t-il si on remplace $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}$?

Exercice 36 : Les crayons de couleur

Nous allons démontrer que toute boite de crayons de couleur ne possède que des crayons de la même couleur. Pour cela, on procède par récurrence sur le nombre n de crayons. L'initialisation est évidente car une boite ne contenant qu'un crayon ne possède que des crayons de la même couleur. Pour l'hérédité, supposons que le résultat est vrai pour n crayons et considérons une boite de $n + 1$ crayons de couleur. On enlève le premier crayon. Par hypothèse de récurrence, tous les autres crayons ont la même couleur. On replace le premier crayon et on enlève le dernier crayon. De même, tous les autres crayons ont la même couleur. On en déduit que les $n+1$ crayons ont la même couleur.

Quelle est l'erreur de ce raisonnement ?

Exercice 37 : Les Moines

Dans un camp de bouddhistes, on apprend qu'il y a au moins un malade. Cette maladie n'est pas contagieuse ni évolutive (le nombre de malades n'évoluera plus). Afin de préserver une entière pureté et ne pas perturber les méditations, un bouddhiste qui se sait malade doit partir. Cette maladie se caractérise uniquement par une tâche rouge sur le front. Un symptôme qui leur permet de reconnaître sans hésitation si une personne est malade. Le problème est qu'il n'y a aucun moyen pour un bouddhiste de se voir. Il n'y a aucun miroir ou autre moyen permettant de voir son propre front. De plus, les moines bouddhistes ont fait le vœu de silence et ne communiquent d'aucune façon. Ils ne font que méditer, lire et ont un esprit très logique. Ils se réunissent tous une seule fois par jour au lever du soleil pour une méditation commune de 3 heures. Pendant ces trois heures, ils n'ont toujours pas le droit de communiquer entre eux ni de partir avant la fin de la séance commune. Au bout de 5 jours, tous les malades sont partis. Combien y avait-il de moines malades ?

Définition par récurrence

Exercice 38 : Suite définie par récurrence

Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) telle que

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \left[\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{1}{u_{n+1}} + u_n\right].$$

Chapitre 3

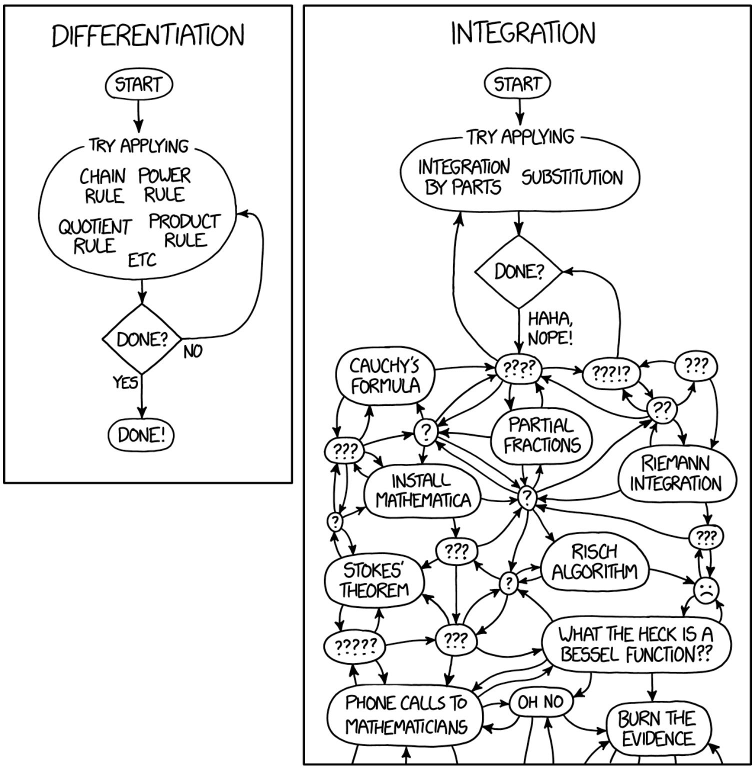
Compléments d'analyse

« Le calcul infinitésimal est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots : majorer, minorer, approcher. »

— Jean Dieudonné (1906–1992)

« Les hommes sont comme les chiffres, ils n'acquièrent de valeur que par leur position. »

— Napoléon Bonaparte (1769–1821)



3.1 Le corps ordonné $\mathbb{R}$

3.1.1 La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Proposition 3.1.1

La relation d'ordre $\leqslant$ définie sur $\mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes.

— Elle est totale.
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant b \quad \text{ou} \quad b \leqslant a.$$

— Elle est compatible avec l'addition.
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad a + c \leqslant b + c.$$

— Elle est compatible avec la multiplication.
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad [0 \leqslant a \quad \text{et} \quad 0 \leqslant b] \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant ab.$$

Remarques

⇨ La relation $\leqslant$ étant antisymétrique sur $\mathbb{R}$, 0 est le seul réel à la fois positif et négatif.

⇨ Si $a, b \in \mathbb{R}$, la négation de « $a \leqslant b$ » est « $a > b$ ».

⇨ Deux réels a et b sont de même signe si et seulement si $ab \geqslant 0$. On dit qu'ils sont de même signe au sens strict lorsque $ab > 0$.

⇨ Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $a^2 \geqslant 0$.

Exercices 1

⇨ Soit a, b deux réels positifs. Montrer que
$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Montrer que $a = b = c$.

Proposition 3.1.2

$$\begin{aligned}
\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad & [a \leqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant d] \quad \Longrightarrow \quad a + c \leqslant b + d \\
\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad & [a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c] \quad \Longrightarrow \quad ac \leqslant bc \\
\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad & [0 \leqslant a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c \leqslant d] \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant ac \leqslant bd \\
\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad & 0 \leqslant a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant a^n \leqslant b^n.
\end{aligned}$$

Remarque

⇨ On peut multiplier une inégalité de signe quelconque par un réel négatif. Dans ce cas, l'inégalité change de sens.

Exercice 2

⇨ L'assertion suivante est-elle vraie ?

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad [a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c \leqslant d] \Longrightarrow ac \leqslant bd$$

Proposition 3.1.3

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$0 < a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}.$$

Proposition 3.1.4

$$\begin{aligned}
\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}, &\quad [a \leqslant b \quad \text{et} \quad c < d] \quad \Longrightarrow \quad a + c < b + d \\
\forall a,b,c \in \mathbb{R}, &\quad [a < b \quad \text{et} \quad 0 < c] \quad \Longrightarrow \quad ac < bc \\
\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}, &\quad [0 \leqslant a < b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c < d] \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant ac < bd \\
\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, &\quad 0 \leqslant a < b \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant a^n < b^n.
\end{aligned}$$

Définition 3.1.5

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$. On définit

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}, &]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}, & [a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}, \\
[a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}, &]a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\
]-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}, &]-\infty,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.
\end{aligned}$$

3.1.2 Valeur absolue

Définition 3.1.6

Pour tout réel a, on définit sa *valeur absolue*, notée $|a|$ par

$$|a| := \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Remarques

⇨ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^2 = |a|^2$.

⇨ Si a et b sont deux réels, on définit la distance de a à b, notée $\mathrm{d}(a,b)$ par

$$\mathrm{d}(a,b) := |a - b|.$$

Exercice 3

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Exprimer $\min(a,b)$ et $\max(a,b)$ à l'aide de a, b et de la valeur absolue.

Proposition 3.1.7

$$\begin{aligned}
\forall a \in \mathbb{R}, &\quad |a| \geqslant 0 \\
\forall a \in \mathbb{R}, &\quad |a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \\
\forall a \in \mathbb{R}, &\quad |-a| = |a| \\
\forall a,b \in \mathbb{R}, &\quad |ab| = |a|\,|b|.
\end{aligned}$$

Remarques

⇨ Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $|a^n| = |a|^n$. Si de plus $a \neq 0$, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, $|a^n| = |a|^n$.

⇨ De cette proposition, on déduit les résultats suivants sur la distance entre deux réels.

$$\begin{aligned} &\forall a,b\in\mathbb{R}, \quad \mathrm{d}(a,b)\geqslant 0\\ &\forall a,b\in\mathbb{R}, \quad \mathrm{d}(a,b)=0 \iff a=b\\ &\forall a,b\in\mathbb{R}, \quad \mathrm{d}(b,a)=\mathrm{d}(a,b)\,. \end{aligned}$$

Exercice 4

⇨ Soit $a>0$ et $x,y\geqslant a$. Montrer que
$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}\,|x-y|\,.$$

Proposition 3.1.8

Soit a un réel. Alors
$$|a|=\max\{a,-a\}\,.$$

Remarques

⇨ En particulier, si M est un réel positif, pour montrer que $|a|\leqslant M$ il suffit de montrer que
$$a\leqslant M \quad \text{et} \quad -a\leqslant M.$$

⇨ Soit a un réel et M un réel positif. Alors
$$|a|\leqslant M \iff -M\leqslant a\leqslant M$$
$$|a|\geqslant M \iff [a\leqslant -M \quad \text{ou} \quad a\geqslant M]\,.$$

Exercice 5

⇨ Soit $x,y\in\mathbb{R}$. Montrer que $\cos(x)\sin(y)\geqslant -1$.

Proposition 3.1.9

Soit a et b deux réels. Alors
$$|a+b|\leqslant |a|+|b|\,.$$
De plus, l'égalité a lieu si et seulement si a et b sont de même signe.

Proposition 3.1.10

Soit a et b deux réels. Alors
$$\big||a|-|b|\big|\leqslant |a-b| \quad \text{et} \quad |a+b|\geqslant |a|-|b|\,.$$

Remarque

⇨ Soit a, b, $c\in\mathbb{R}$. Alors
$$|\mathrm{d}(a,b)-\mathrm{d}(b,c)|\leqslant \mathrm{d}(a,c)\leqslant \mathrm{d}(a,b)+\mathrm{d}(b,c)\,.$$

Exercice 6

⇨ Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

— $\forall a,b\in\mathbb{R}, \quad |a-b|\leqslant |a|-|b|$.
— $\forall a,b\in\mathbb{R}, \quad a^2\leqslant b^2 \iff |a|\leqslant |b|$.
— $\forall a,b\in\mathbb{R}, \quad |a-b|\leqslant |a|+|b|$.
— $\forall a,b\in\mathbb{R}, \quad a\leqslant b \implies |a|\leqslant |b|$.
— $\forall a,b\in\mathbb{R}, \quad |a-b|\geqslant |a|-|b|$.
— $\forall a,b\in\mathbb{R}, \quad |a|\leqslant |b|+|b-a|$.

Proposition 3.1.11

Soit $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$. Alors
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|\leqslant \sum_{k=1}^{n}|a_k|\,.$$

Exercice 7

⇨ Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(\theta_k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| .$$

3.1.3 Racine

Définition 3.1.12

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si n est pair et $a \geqslant 0$, il existe un unique réel positif x tel que $x^n = a$. On le note $\sqrt[n]{a}$.
- Si n est impair, il existe un unique réel x tel que $x^n = a$. On le note $\sqrt[n]{a}$.

Remarques

⇨ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si n est pair et $a \geqslant 0$, alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = a \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{a} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt[n]{a}$$
- Si n est pair et $a < 0$, l'équation $x^n = a$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$.
- Si n est impair, alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = a \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{a}$$

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si n est pair
$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R}_+, \quad & \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \\ \forall a \in \mathbb{R}, \quad & \sqrt[n]{a^n} = |a| . \end{aligned}$$
- Si n est impair
$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R}, \quad & \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \\ & \sqrt[n]{a^n} = a. \end{aligned}$$

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si n est pair
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x^n \leqslant y^n \quad \Longleftrightarrow \quad |x| \leqslant |y| .$$
- Si n est impair
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x^n \leqslant y^n \quad \Longleftrightarrow \quad x \leqslant y.$$

Proposition 3.1.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si n est pair
$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$
- Si n est impair
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

3.1.4 Partie entière, approximation

Proposition 3.1.14

$\mathbb{R}$ possède la propriété
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad n\varepsilon \geqslant x.$$
On dit que $\mathbb{R}$ est *archimédien*.

Remarque

⇨ En particulier, si on note x le volume d'eau de l'océan et ε le volume que peut contenir une petite cuillère, l'archimédisme de $\mathbb{R}$ nous permet de montrer qu'une personne (patiente) arrivera à vider l'océan à l'aide de cette petite cuillère.

Définition 3.1.15

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leqslant x < n+1.$$

Cet entier est appelé *partie entière* de x et est noté $\lfloor x \rfloor$.

Remarques

- Si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor a/b \rfloor$ est le quotient de la division euclidienne de a par b.
- Soit $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $na \leqslant x < (n+1)a$.
- On définit de même la partie entière supérieure de $x \in \mathbb{R}$, notée $\lceil x \rceil$, comme l'unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n-1 < x \leqslant n$. Si x est entier, alors $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$. Sinon, $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

Exercices 8

- Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Montrer que la partie entière est une fonction croissante.
- Soit $\alpha \in [0,1[$. Montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{n-1}{n} \leqslant \alpha < \frac{n}{n+1}.$$

Définition 3.1.16

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On appelle *valeur approchée* de a à la précision ε tout réel b tel que $|a-b| \leqslant \varepsilon$. Si $b \leqslant a$ (respectivement $b \geqslant a$), on dit que b est une valeur approchée de a par *défaut* (respectivement, par *excès*).

Remarques

- On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels. $\mathbb{Q}$ est stable par les opérations usuelles d'addition, de soustraction, de multiplication et de division.

Définition 3.1.17

On dit qu'un réel a est *décimal* lorsqu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$a = m \cdot 10^{-n}.$$

Remarques

- Un nombre décimal est rationnel. Cependant $1/3$ est rationnel, mais n'est pas décimal.
- L'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres décimaux est stable par les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, mais pas par division.

Proposition 3.1.18

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, $d = \lfloor 10^n a \rfloor \cdot 10^{-n} \in \mathcal{D}$ est une approximation par défaut de a à la précision 10^{-n}.

3.1.5 Intervalle

Définition 3.1.19

On appelle *droite numérique achevée* et on note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on adjoint deux éléments notés $-\infty$ et $+\infty$. On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'une relation d'ordre totale en prolongeant la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$ et en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Remarque

- On prolonge aussi de manière naturelle l'addition et la multiplication sans toutefois définir $(+\infty) - (+\infty)$ et $0 \times (\pm\infty)$.

Définition 3.1.20

On dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est un *intervalle* lorsqu'elle est de la forme

$$\varnothing, \qquad \mathbb{R}, \qquad [a,b]\,, \qquad]a,b[\,, \qquad [a,b[\,, \qquad]a,b]\,,$$

$$[a,+\infty[\,, \qquad]a,+\infty[\,, \qquad]-\infty,b]\,, \qquad]-\infty,b[$$

où $a,b \in \mathbb{R}$.

Remarques

⇨ En particulier, pour $a = b$, $[a,b] = \{a\}$ est un intervalle. On dit qu'un intervalle est *non trivial* lorsqu'il contient au moins 2 points.

⇨ Si I est un intervalle non vide, il existe un unique couple $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $I = [a,b]$, $I =]a,b]$, $I = [a,b[$ ou $I =]a,b[$. On dit que a et b sont les *extrémités* de I. L'intervalle I est dit *ouvert* lorsqu'il ne contient pas ses extrémités c'est-à-dire lorsqu'il est vide, ou qu'il est de la forme $]a,b[$ où $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$.

⇨ Dans ce cours, une partie de $\mathbb{R}$ notée I ou J sera implicitement un intervalle.

3.2 Fonction réelle d'une variable réelle

3.2.1 Définition

Définition 3.2.1

On appelle *fonction réelle* toute fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarques

⇨ Il sera essentiel de ne pas confondre une fonction avec son expression. Par exemple parler de la fonction $\sin x$ est une erreur grave. On parlera plutôt de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui au réel x associe le réel $\sin x$.

⇨ Par abus de langage, il est courant que les énoncés demandent à l'élève de donner le domaine de définition d'une fonction donnée par une expression (par exemple $\sqrt{x}$). Dans ce cas, il faut donner l'ensemble $\mathcal{D}$ des x pour lesquels cette expression à un sens (ici, $\mathbb{R}_+$). La fonction f sera alors la fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, qui à x associe cette expression en x.

Exercice 9

⇨ Déterminer le domaine de définition de la fonction d'expression

$$f(x) \coloneqq \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Définition 3.2.2

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$.

— Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $\lambda f + \mu g$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)(x) \coloneqq \lambda f(x) + \mu g(x).$$

— On définit la fonction fg par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (fg)(x) \coloneqq f(x)g(x).$$

— Si f ne s'annule en aucun point de $\mathcal{D}$, on définit $1/f$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{1}{f}\right)(x) \coloneqq \frac{1}{f(x)}.$$

3.2.2 Symétries

Définition 3.2.3

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ *symétrique par rapport à 0*, c'est-à-dire tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad -x \in \mathcal{D}.$$

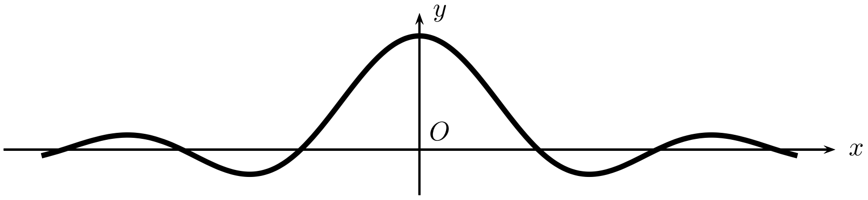
On dit que

— f est *paire* lorsque
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(-x) = f(x).$$

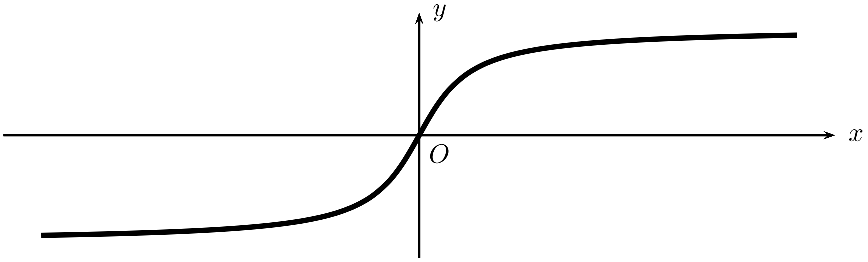
— f est *impaire* lorsque
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(-x) = -f(x).$$

Remarques

⇨ Si f est paire, la droite (Oy) est un axe de symétrie du graphe de f.



⇨ Si f est impaire, O est un centre de symétrie du graphe de f.



⇨ Si f est paire ou impaire, pour étudier f, il suffit d'étudier sa restriction à $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$.

Exercice 10

⇨ Montrer que la fonction d'expression
$$\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$
est impaire.

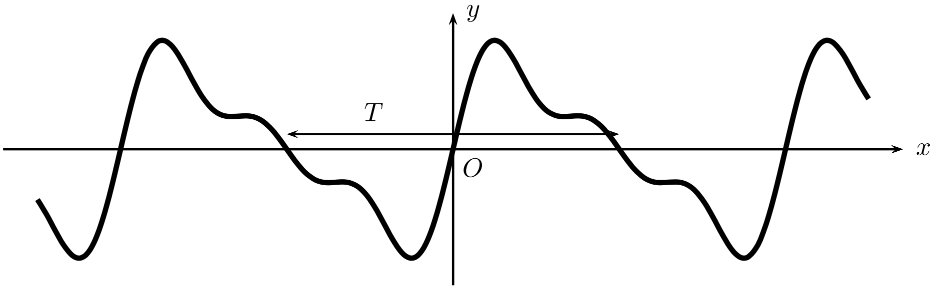
Définition 3.2.4

Soit $T \in \mathbb{R}$ et f une fonction dont le domaine de définition vérifie
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad x + T \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad x - T \in \mathcal{D}$$
On dit que f est T-*périodique*, ou que T est une *période* de f, lorsque
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f\left(x+T\right) = f(x).$$
Lorsque f admet une période non nulle, on dit que f est *périodique*.

Remarques

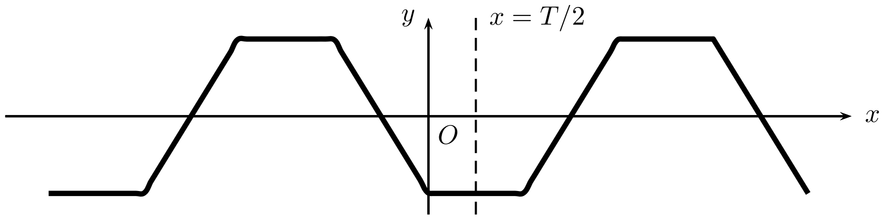
⇨ Si f est T-périodique, alors
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(x+kT) = f(x).$$

⇨ Si f est T-périodique, la translation de vecteur $T\overrightarrow{e_1}$ laisse stable le graphe de f.



Pour étudier f, il suffit d'étudier sa restriction à $\mathcal{D} \cap [a, a+T]$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$.

⇨ S'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $f(T-x) = f(x)$, la droite d'équation $x = T/2$ est un axe de symétrie du graphe de f.



Exercices 11

⇨ La fonction
$$f(x) \coloneqq \sin(2x) + \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$
est-elle périodique ?

⇨ Montrer que le graphe de la fonction
$$f(x) \coloneqq \ln\left(x^2 + x + 1\right)$$
admet un axe de symétrie.

⇨ Tracer le graphe d'une fonction quelconque f, puis celui des fonctions
$$x \mapsto f(x) + a, \qquad x \mapsto f(x+a), \qquad x \mapsto f(a-x), \qquad x \mapsto f(ax), \qquad x \mapsto af(x).$$

Proposition 3.2.5

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et f une bijection de A dans B. Alors le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la première bissectrice des axes $[Ox)$ et $[Oy)$.

3.2.3 Monotonie

Définition 3.2.6

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. On dit que

— f est *croissante* lorsque
$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

— f est *décroissante* lorsque
$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y).$$

— f est *strictement croissante* lorsque
$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$

— f est *strictement décroissante* lorsque
$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y).$$

Remarques

⇨ Les fonctions constantes sont les seules fonctions qui sont à la fois croissantes et décroissantes.

⇨ Une fonction peut n'être ni croissante, ni décroissante. C'est le cas de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

⇨ Si f est strictement monotone, elle est injective.

⇨ Attention, il est possible que f soit croissante sans que
$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant f(y) \Longrightarrow x \leqslant y.$$
C'est notamment le cas des fonctions constantes qui sont croissantes mais pour lesquelles $f(x) \leqslant f(y)$ quelle que soit la position de x par rapport à y. Cependant, si f est strictement croissante, par contraposée, on a bien
$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant f(y) \Longrightarrow x \leqslant y.$$

⇨ D'après la remarque précédente, si f est strictement croissante et $x_0 \in \mathcal{D}$ est un zéro de f, pour placer $x \in \mathcal{D}$ par rapport à x_0, il suffit de déterminer le signe de $f(x)$.

⇨ Les effets des opérations usuelles sur les propriétés de monotonie sont résumés dans les tableaux ci-dessous.

— *Combinaison linéaire positive*

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	×
décroissante	×	décroissante

— *Produit de fonctions positives*

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	×
décroissante	×	décroissante

— *Inverse d'une fonction strictement positive ou strictement négative*

f	croissante	décroissante
1/f	décroissante	croissante

— *Composition*

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	décroissante
décroissante	décroissante	croissante

Lorsque c'est possible, il est souvent bien plus judicieux de déterminer la monotonie d'une fonction à partir de ces règles plutôt qu'à partir de l'étude du signe de la dérivée. En effet, cette méthode est bien plus rapide et source de beaucoup moins d'erreurs.

Exercices 12

⇨ Montrer que la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

n'est ni croissante, ni décroissante.

⇨ Déterminer la monotonie des fonctions d'expressions

$$\frac{1}{e^x + \sqrt{1+x}}, \qquad \sqrt{x+1} - \sqrt{x}.$$

3.2.4 Fonction majorée, minorée, bornée

Définition 3.2.7

On dit qu'une fonction réelle f est

— *majorée* lorsque

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant M.$$

— *minorée* lorsque

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \geqslant m.$$

Exercice 13

⇨ Montrer que la fonction d'expression xe^{-x} est majorée sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.2.8

On dit qu'une fonction réelle ou complexe f est *bornée* lorsque

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Exercice 14

⇨ Montrer que la fonction d'expression $\frac{x}{1+x^2}$ est bornée par 1/2 sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.2.9

Une fonction réelle est bornée si et seulement si elle est minorée et majorée.

Définition 3.2.10

Soit f et g deux fonctions de domaine $\mathcal{D}$. On dit que f est inférieure à g et on note $f \leqslant g$ lorsque

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant g(x).$$

Remarques

⇨ La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$. Elle n'est pas totale.

⇨ La négation de $f \leqslant g$ s'écrit

$$\exists x \in \mathcal{D}, \quad f(x) > g(x).$$

3.3 Fonction continue, fonction dérivable

3.3.1 Limite

Dans ce chapitre, on ne définira pas précisément la notion de limite. On se basera sur la définition intuitive suivante.

Définition 3.3.1

Étant donné une fonction f et $a, l \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a, lorsque, quitte à rendre x proche de a, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on souhaite de l. Dans ce cas, on note

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$

Proposition 3.3.2

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions telles que $f(x)$ et $g(x)$ tendent respectivement vers l_f et $l_g \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a. Alors

— Si λ et μ sont deux réels
$$\lambda f(x) + \mu g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda l_f + \mu l_g.$$

— On a
$$f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_f l_g.$$

— Si $l_f \neq 0$
$$\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{l_f}.$$

— Plus généralement, si $l_g \neq 0$
$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{l_f}{l_g}.$$

Proposition 3.3.3

Soit f et g deux fonctions. On suppose que $f(x)$ tend vers $l_f \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et que $g(x)$ tend vers $l_g \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers l_f. Alors $g(f(x))$ tend vers l_g lorsque x tend vers a.

Remarque

⇨ De nombreuses autres règles existent mélangeant limites finies et infinies. Elles sont résumées dans les tableaux ci-dessous où la présence d'une croix représente une forme indéterminée.

— *Somme*
Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et $l_g \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f + g$

l_f \ l_g	$-\infty$	$l_g \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\times$
$l_f \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$l_f + l_g$	$+\infty$
$+\infty$	$\times$	$+\infty$	$+\infty$

— *Opposé*
Si f est une fonction admettant pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $-f$

l	$-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$
	$+\infty$	$-l$	$-\infty$

— *Multiplication par un scalaire*
Si f est une fonction admettant pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf

λ \ l	$-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\lambda < 0$	$+\infty$	λl	$-\infty$
$\lambda > 0$	$-\infty$	λl	$+\infty$

— *Produit*
Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et $l_g \in \overline{\mathbb{R}}$, alors fg

l_f \ l_g	$-\infty$	$l_g < 0$	0	$l_g > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\times$	$-\infty$	$-\infty$
$l_f < 0$	$+\infty$	$l_f l_g$	0	$l_f l_g$	$-\infty$
$l_f = 0$	$\times$	0	0	0	$\times$
$l_f > 0$	$-\infty$	$l_f l_g$	0	$l_f l_g$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\times$	$+\infty$	$+\infty$

— *Inverse*
Si f est une fonction admettant pour limite l, alors $1/f$

l	$-\infty$	$l < 0$	0^-	0	0^+	$l > 0$	$+\infty$
	0	$1/l$	$-\infty$	$\times$	$+\infty$	$1/l$	0

— *Exponentiation*
Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et l_g, alors f^g

l_f \ l_g	$-\infty$	$l_g < 0$	0	$l_g > 0$	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	$\times$	0	0
$0 < l_f < 1$	$+\infty$	$l_f^{l_g}$	1	$l_f^{l_g}$	0
1	$\times$	1	1	1	$\times$
$1 < l_f$	0	$l_f^{l_g}$	1	$l_f^{l_g}$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	$\times$	$+\infty$	$+\infty$

Exercice 15
⇨ Déterminer les limites en 0 de x^x et $x^{\frac{1}{\ln x}}$; en déduire que « 0^0 » est une forme indéterminée. De même, déterminer la limite en $+\infty$ de $(1+1/x)^x$; en déduire que « $1^{+\infty}$ » est une forme indéterminée.

3.3.2 Continuité

Définition 3.3.4

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est *continue* en $x_0 \in \mathcal{D}$ lorsque

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0).$$

On dit que f est continue lorsque, quel que soit $x_0 \in \mathcal{D}$, f est continue en x_0.

Proposition 3.3.5: Théorèmes usuels

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors
— Quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue.
— La fonction fg est continue.
— Si g ne s'annule pas, f/g est continue.

Proposition 3.3.6: Théorèmes usuels

La composée de deux fonctions continues est continue.

Théorème 3.3.7: Théorème de la bijection

— Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leqslant b$) une fonction continue, strictement croissante. Alors

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

De plus f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$. Autrement dit, pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe un unique $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.

— Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ (où $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$) une fonction continue, strictement croissante. On pose

$$l_a \coloneqq \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{et} \quad l_b \coloneqq \lim_{x \to b} f(x).$$

Alors

$$f\left(]a, b[\right) = \left]l_a, l_b\right[.$$

De plus f réalise une bijection de $]a, b[$ sur $]l_a, l_b[$. Autrement dit, pour tout $y \in]l_a, l_b[$, il existe un unique $x \in]a, b[$ tel que $y = f(x)$.

Remarques

⇨ Ce théorème reste valide dans de nombreuses autres situations, par exemple lorsque f est strictement décroissante et que son domaine de définition est un intervalle semi-ouvert. Par exemple, si $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue, strictement décroissante, en posant

$$l \coloneqq \lim_{x \to +\infty} f(x),$$

alors $f([a, +\infty[) =]l, f(a)]$ et f réalise une bijection de $[a, +\infty[$ sur $]l, f(a)]$.

⇨ Ce théorème permet de calculer $f(A)$ lorsque A est une réunion d'intervalles $A = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ sur lesquels f est continue et strictement monotone. Il suffit pour cela de remarquer que

$$f(A) = f(I_1) \cup \cdots \cup f(I_n).$$

Proposition 3.3.8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de I sur l'intervalle $J \coloneqq f(I)$. De plus

— f^{-1} est strictement monotone, de même sens de variation que f.

— f^{-1} est continue.

3.3.3 Dérivabilité

Définition 3.3.9

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$. On dit que f est *dérivable* en x_0 lorsque

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers x_0. Dans ce cas, on note $f'(x_0)$ cette limite que l'on appelle *nombre dérivé* de f en x_0. On dit que f est dérivable lorsqu'elle est dérivable en tout point de $\mathcal{D}$.

Remarques

⇨ Si f est dérivable en x_0, la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est tangente au graphe de f en x_0.

⇨ Lorsque

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} \pm\infty,$$

le graphe de f admet une tangente verticale en x_0. Une telle fonction n'est pas dérivable en x_0.

⇨ On dit qu'une fonction f est dérivable à gauche en x_0 lorsque l'expression

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 par la gauche. Si tel est le cas, cette limite est notée $f'_g(x_0)$. On définit de même la notion de dérivabilité à droite. Une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et que $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

- Si f et g sont des fonctions telles qu'en x_0, $f(x_0) = g(x_0)$, on ne peut rien en conclure sur $f'(x_0)$ et $g'(x_0)$. En particulier, il est absurde de dire que parce que $f(x_0) = 0$, on peut en déduire que $f'(x_0) = 0$. On dira qu'on peut dériver des identités, mais pas des égalités.

Proposition 3.3.10

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$. Si f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.

Remarque

- La réciproque de cette proposition est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 mais qui n'est pas dérivable en 0.

Exercice 16

- Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et $b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

soit dérivable en 0.

Définition 3.3.11

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction. On note $\mathcal{D}'$ l'ensemble des $x_0 \in \mathcal{D}$ en lesquels f est dérivable. On définit la *fonction dérivée* de f, notée f' par

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$$

Remarque

- Les fonctions usuelles sont dérivables en tout point de leur ensemble de définition, excepté la fonction $x \mapsto |x|$ qui n'est pas dérivable en 0 et les fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ qui ne sont pas dérivables en 0 pour $n \geqslant 2$.

$\mathcal{D}$	$f(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$
$\mathbb{R}^*$	$x^n \quad (n \in \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}_+^*$	$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}^*$	$\ln \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$	$\operatorname{cotan} x$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$	$-\left(1 + \operatorname{cotan}^2 x\right) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Proposition 3.3.12: Théorèmes usuels

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors

— Quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$$

— La fonction fg est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

— Si f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $1/f$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

— Plus généralement, si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, f/g est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Proposition 3.3.13: Théorèmes usuels

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. Si f et g sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

Remarque

⇨ En particulier, si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et $n \in \mathbb{N}$, la fonction g définie sur $\mathcal{D}$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad g(x) := f(x)^n$$

est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad g'(x) = nf'(x)f(x)^{n-1}.$$

⇨ Si $f(x) := a(x)/b(x)^\alpha$, il est bon d'écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a(x)b(x)^{-\alpha}$ avant de dériver f.

⇨ Attention, ce n'est pas parce que les théorèmes usuels ne peuvent pas s'appliquer en un point qu'on peut en conclure que la fonction n'y est pas dérivable.

Exercices 17

⇨ Montrer que la dérivée d'une fonction paire (resp. impaire, T-périodique) est impaire (resp. paire, T-périodique).

⇨ Étudier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions d'expression

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \left(x^3+2x+1\right)\mathrm{e}^{x^2}, \qquad \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

⇨ Étudier la dérivablité et calculer la dérivée de la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ par

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) := \sqrt{1-\cos x}.$$

Proposition 3.3.14

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I, dérivable et strictement monotone. Elle réalise donc une bijection de I sur l'intervalle $J := f(I)$. On pose

$$A := \{x \in I \mid f'(x) = 0\}.$$

Alors f^{-1} est dérivable en tout point de $J \setminus f(A)$ et

$$\forall y \in J \setminus f(A), \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

3.3.4 Dérivées successives

Définition 3.3.15

Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est une fonction, on définit par récurrence la *dérivée n-ième* de f de la manière suivante

— On pose $f^{(0)} := f$.

— Si $n \in \mathbb{N}$, on définit $f^{(n+1)}$ comme étant la dérivée de $f^{(n)}$.

Si $x_0 \in \mathcal{D}$, on dit que f est dérivable n fois en x_0 lorsque $f^{(n)}$ est définie en x_0. On dit que f est dérivable n fois lorsqu'elle est dérivable n fois en tout point de son domaine de définition.

Proposition 3.3.16

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables n fois.
- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable n fois et
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x).$$
- fg est dérivable n fois.
- Si g ne s'annule pas, alors f/g est dérivable n fois.

Proposition 3.3.17

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. Si f et g sont dérivables n fois, alors $g \circ f$ est dérivable n fois.

Définition 3.3.18

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ lorsqu'elle est dérivable et que sa dérivée est continue.

Proposition 3.3.19

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- fg est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Si g ne s'annule pas, alors f/g est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 3.3.20

La composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

3.3.5 Dérivation et monotonie

Proposition 3.3.21

Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Alors
- f est croissante si et seulement si
$$\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0.$$
- f est décroissante si et seulement si
$$\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0.$$

Remarque

⇨ Cette proposition est fausse lorsque le domaine de définition de f n'est pas un intervalle. Par exemple la fonction
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1/x \end{array}$$
n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ bien qu'elle soit dérivable et que sa dérivée soit négative. Cependant ses restrictions aux intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les deux décroissantes.

Exercice 18

⇨ Montrer que
$$\forall x \in [0,1], \quad x \leqslant \left(1 + \frac{x}{2}\right) \ln(1+x).$$

Proposition 3.3.22

Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante si et seulement si
$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 0.$$

Remarque

⇨ Cette proposition est fausse lorsque le domaine de f n'est pas un intervalle.

Proposition 3.3.23

Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Si
— $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$
— Le nombre de points de I où f' s'annule est fini.
alors f est strictement croissante.

Remarques

⇨ La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ bien qu'elle soit dérivable et que sa dérivée s'annule en 0.

⇨ Une fonction croissante qui n'est pas strictement croissante est constante sur un intervalle non trivial. Ces fonctions sont donc rares. Cependant, il est toujours plus délicat de montrer qu'une fonction est strictement croissante que croissante. Lorsqu'on a besoin de la stricte monotonie, il convient donc d'être particulièrement attentif. Inversement, il est inutile de prouver la stricte monotonie si seule la monotonie nous est utile.

Exercice 19

⇨ Combien de racines réelles possède le polynôme $P(x) \coloneqq x^3 - 3x - 1$?

3.3.6 Dérivation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 3.3.24

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$. On dit que f est dérivable en x_0 lorsque $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont. Si c'est le cas, on définit le nombre dérivé de f en x_0 par

$$f'(x_0) \coloneqq \operatorname{Re}(f)'(x_0) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(f)'(x_0).$$

On dit que f est dérivable lorsque f est dérivable en tout point de $\mathcal{D}$.

Proposition 3.3.25: Théorèmes usuels

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables. Alors
— Quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

— La fonction fg est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

— Si f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $1/f$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

— Plus généralement, si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, f/g est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Proposition 3.3.26

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Alors la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad g(x) \coloneqq \mathrm{e}^{f(x)}$$

est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}.$$

Proposition 3.3.27

Soit f une fonction complexe, dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 0.$$

Remarque

⇨ On dit que'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ lorsque ses parties réelles et imaginaires le sont. Comme pour les fonctions à valeurs réelles, on montre qu'une combinaison linéaire, un produit, un quotient ainsi que l'exponentielle de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

3.4 Intégration, primitive

Dans la suite de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.4.1 Primitive

Définition 3.4.1

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$. On appelle *primitive* de f toute fonction dérivable $F : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad F'(x) = f(x).$$

Proposition 3.4.2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Alors les primitives de f sont les fonctions $F_C : I \to \mathbb{K}$ définies sur I par

$$\forall x \in I, \quad F_C(x) \coloneqq F(x) + C$$

où $C \in \mathbb{K}$.

Remarque

⇨ Si la fonction d'expression $F(x)$ est une primitive de la fonction d'expression $f(x)$, on écrira

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x).$$

Il faudra rester vigilant avec cette notation. Par exemple

$$\int 1\,\mathrm{d}x = x \quad \text{et} \quad \int 1\,\mathrm{d}x = x + 1$$

mais $x \neq x + 1$. On ne l'utilisera donc que pour calculer des primitives et on s'abstiendra de toute lecture autre que de la gauche vers la droite. On s'abstiendra aussi de l'utiliser avec des inégalités.

3.4.2 Intégration et régularité

Proposition 3.4.3

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On définit sur I la fonction F par

$$\forall x \in I, \quad F(x) \coloneqq \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

En particulier, F est une primitive de f.

Proposition 3.4.4

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors f admet une primitive. Plus précisément, pour tout $x_0 \in I$, il existe une unique primitive F de f s'annulant en x_0. De plus

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 3.4.5: Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$. Alors, si F est une primitive de f

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

3.4.3 Intégration et inégalité

Proposition 3.4.6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues et $a, b \in I$. On suppose que

$$a \leqslant b \quad \text{et} \quad [\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leqslant g(x)].$$

Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3.4.4 Intégration par parties, changement de variable

Proposition 3.4.7: Intégration par parties

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. Soit G une primitive de g. Alors, si $a, b \in I$

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{dérive}} \overbrace{g(x)}^{\text{intègre}}\,\mathrm{d}x = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 20

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit I_n par

$$I_n := \int_0^1 t^n \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$$

Calculer I_0 et trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

Remarque

⇨ Si f est dérivable et que G est une primitive de g, alors

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{dérive}} \overbrace{g(x)}^{\text{intègre}}\,\mathrm{d}x = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 3.4.8: Changement de variables

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. Soit J un intervalle, $\bar{x} : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a_x, b_x \in I$ et $a_t, b_t \in J$ tels que

$$a_x = \bar{x}(a_t) \quad \text{et} \quad b_x = \bar{x}(b_t).$$

Alors
$$\int_{a_t}^{b_t} f(\bar{x}(t))\frac{d\bar{x}}{dt}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a_x}^{b_x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 21

⇨ Calculer
$$\int_0^\pi \ln\left(1+\cos^2 x\right)\sin(2x)\ \mathrm{d}x$$

3.4.5 Calcul de primitive

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle à partir d'une expression en les fonctions usuelles, on cherche une primitive F de f. Puisque f est une expression en les fonctions usuelles, elle est en particulier continue, donc admet une primitive. Le problème du calcul de primitive est d'expliciter une telle fonction.

Il est d'abord essentiel de connaitre par cœur les primitives des fonctions usuelles.

$\mathcal{D}$	$f(x)$	$F(x)$
$\mathbb{R}$	$x^n \quad (n\in\mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\mathbb{R}^*$	$x^n \quad (n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x$

Ensuite, il existe de nombreuses techniques à connaitre pour calculer certaines primitives.

— **Polynômes**
Le calcul d'une primitive d'une fonction polynôme se fait de manière immédiate
$$\int \left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\right)\,\mathrm{d}x = a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

— **Polynômes-exponentielle**
Le calcul d'une primitive d'une fonction polynôme-exponentielle, c'est-à-dire de
$$\int \left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\right)\mathrm{e}^{cx}\,\mathrm{d}x$$
se fait facilement par récurrence en effectuant une intégration par parties
$$\int \underbrace{\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\right)}_{\text{dérive}}\ \overbrace{\mathrm{e}^{cx}}^{\text{intègre}}\ \mathrm{d}x.$$
De cette manière, on abaisse le degré du polynôme. Il suffit de réitérer le procédé jusqu'à faire disparaitre le terme polynomial.

Exercice 22

⇨ Calculer
$$\int (2x+3)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

— **Polynômes-sinus/cosinus**
On calcule de même toute primitive du produit d'une fonction polynôme et d'une fonction sinus ou cosinus.

Exercice 23

⇨ Calculer
$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x.$$

— **Exponentielle-sinus/cosinus** Pour calculer des primitives de la forme
$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x,$$
on passe par l'exponentielle complexe. On fait de même si un polynôme est en facteur d'une telle expression.

Exercice 24

⇨ Calculer
$$\int e^{2x}\sin(3x)\,dx.$$

— **Polynôme-logarithme**
Le calcul d'une primitive d'une fonction polynôme-logarithme, c'est-à-dire de
$$\int \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right) \ln x \,dx$$
se fait facilement par intégration par parties
$$\int \overbrace{\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right)}^{\text{intègre}} \underbrace{\ln x}_{\text{dérive}} \,dx.$$

Exercice 25

⇨ Calculer
$$\int \ln x \,dx$$

— **Polynômes en** sin **et** cos
Pour le calcul de primitives de polynômes en sin et cos, c'est-à-dire de :
$$\int \sin^n x \cos^m x \,dx \quad \text{où } n, m \in \mathbb{N}$$
on peut, lorsque n ou m est impair effectuer un changement de variable pour se ramener à un calcul de primitive de polynôme.
— Si m est impair, soit $m' \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2m' + 1$. On effectue alors le changement de variable $t = \sin x$.
$$\begin{aligned}\int \sin^n x \cos^m x \,dx &= \int \sin^n x \cos^{2m'+1} x \,dx \\ &= \int \sin^n x \left(1 - \sin^2 x\right)^{m'} \cos x \,dx \\ &= \int t^n \left(1 - t^2\right)^{m'} \,dt.\end{aligned}$$
— Si n est impair, on effectue le changement de variable $t = \cos x$.
— Si n et m sont pairs, on effectue une linéarisation de l'expression.

Exercice 26

⇨ Calculer
$$\int \sin^2 x \cos^3 x \,dx, \qquad \int \cos^2 x \sin^5 x \,dx, \qquad \int \cos^2 x \sin^2 x \,dx.$$

3.5 Qcm

Le corps ordonné $\mathbb{R}$

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

1. Si x est un nombre réel, l'inégalité $x^2 < 1$ est équivalente à

☐ **a.** $x < 1$ ☐ **b.** $x \in \left]-1,1\right[$ ☐ **c.** $x \in \left]0,1\right[$ ☐ **d.** $x \in \left[0,1\right[$

2. Soit a, b, c, d des réels strictement positifs avec $a < b$ et $c < d$. Alors

☐ **a.** $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ☐ **b.** $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$ ☐ **c.** $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ ☐ **d.** $\frac{b}{c} < \frac{a}{d}$

3. Soit x un nombre réel tel que $x < a$ pour tout réel $a > 0$. Alors

☐ **a.** $x < 0$ ☐ **b.** $x = 0$ ☐ **c.** $x > 0$ ☐ **d.** $x \leqslant 0$

Valeur absolue

1. Si x est un réel tel que $|2 - x| \leqslant 1$, alors

☐ **a.** $|x| \leqslant 1$ ☐ **b.** $|x| \leqslant 3$ ☐ **c.** $|x| \geqslant -1$ ☐ **d.** $|x| \geqslant 3$

2. Si x, y sont deux réels tels que $|x - 5| \leqslant 1$ et $|y - 1| \leqslant 1$, on a

☐ **a.** $2 \leqslant |x - y| \leqslant 6$ ☐ **b.** $0 \leqslant |x - y| \leqslant 2$ ☐ **c.** $4 \leqslant |x - y| \leqslant 6$ ☐ **d.** $4 \leqslant |x - y| \leqslant 8$

Racine

Partie entière, approximation

1. La partie entière de $-\pi$ vaut

☐ **a.** $-0,1415...$ ☐ **b.** $0,8584...$ ☐ **c.** -3 ☐ **d.** -4

2. Si x est un réel de partie entière n, on a

☐ **a.** $x - 1 < n < x$ ☐ **b.** $x - 1 \leqslant n < x$ ☐ **c.** $x - 1 < n \leqslant x$ ☐ **d.** $x - 1 \leqslant n \leqslant x$

3. Pour x réel, $\lfloor \lfloor x \rfloor + x \rfloor$ est toujours égal à

☐ **a.** $\lfloor 2x \rfloor$ ☐ **b.** $2\lfloor x \rfloor$ ☐ **c.** $\lfloor x^2 \rfloor$ ☐ **d.** $x + \lfloor x \rfloor$

4. Soit n un entier positif. Combien y a-t-il d'entiers k positifs ou nuls tels que $\sqrt{k} \leqslant n$?

☐ **a.** $\sqrt{n}$ ☐ **b.** $2n^2 + 1$ ☐ **c.** $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ ☐ **d.** $n^2 + 1$

Intervalle

Fonction réelle d'une variable réelle

Définition

1. Si f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) \coloneqq x$ et $g(x) \coloneqq -x$, la fonction $\max(f, g)$

☐ **a.** est égale à f ☐ **b.** est égale à g
☐ **c.** est la fonction $x \mapsto |x|$ ☐ **d.** n'est pas définie sur $\mathbb{R}$

Symétries

1. La fonction $f : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ est

   ☐ **a.** paire
   ☐ **b.** impaire
   ☐ **c.** paire et impaire
   ☐ **d.** ni paire, ni impaire

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant une fonction quelconque, laquelle des fonctions suivantes n'est pas nécessairement paire ?

   ☐ **a.** $x \mapsto f(x^2)$ ☐ **b.** $x \mapsto f(x)^2$ ☐ **c.** $x \mapsto f(x)f(-x)$ ☐ **d.** $x \mapsto f(\cos x)$

3. La plus petite période positive de la fonction $f : x \mapsto \cos(\sin x)$ est

   ☐ **a.** 2π ☐ **b.** π ☐ **c.** $\cos(2\pi)$ ☐ **d.** f n'est pas périodique

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de plus petite période $T > 0$. Alors T^2 est une période de f

   ☐ **a.** si et seulement si $T = 1$ ☐ **b.** si et seulement si T est entier
   ☐ **c.** pour tout T ☐ **d.** pour aucune valeur de T

Monotonie

1. Au sujet des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, laquelle des propositions suivantes est fausse ?

   ☐ **a.** la somme de deux fonctions bornées est bornée
   ☐ **b.** la somme de deux fonctions continues est continue
   ☐ **c.** la somme de deux fonctions monotones est monotone
   ☐ **d.** la somme de deux fonctions paires est paire

2. Soit f une fonction décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle fonction n'est pas forcément croissante ?

   ☐ **a.** $x \mapsto f(f(x))$ ☐ **b.** $x \mapsto -f(x)$ ☐ **c.** $x \mapsto f(-x)$ ☐ **d.** $x \mapsto f(x^2)$

Fonction majorée, minorée, bornée

Fonction continue, fonction dérivable

Limite

1. Quelles sont les limites respectives en $-\infty$ et $+\infty$ de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}$?

   ☐ **a.** 1 et 0 ☐ **b.** 0 et 1 ☐ **c.** $+\infty$ et 0 ☐ **d.** 0 et $+\infty$

2. Lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction $x \mapsto x^{1/x}$ tend vers

   ☐ **a.** 0 ☐ **b.** 1 ☐ **c.** e ☐ **d.** $+\infty$

Continuité

1. Une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$

   ☐ **a.** est toujours majorée ☐ **b.** est toujours minorée
   ☐ **c.** tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ☐ **d.** est continue sur $\mathbb{R}_+$

Dérivabilité

1. Si f et g sont deux fonctions réelles dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(1) = g(1)$, alors

   ☐ **a.** $f'(1) = g'(1)$ ☐ **b.** $f'(1) \neq g'(1)$ ☐ **c.** $f'(1) < g'(1)$ ☐ **d.** on ne peut rien dire

2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable paire, alors f' est

   ☐ **a.** paire ☐ **b.** impaire
   ☐ **c.** ni paire, ni impaire ☐ **d.** nulle

3. Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable, la dérivée de $x \mapsto f(x^3)$ est

☐ **a.** $x \mapsto 3x^2 f'\left(3x^2\right)$ ☐ **b.** $x \mapsto 3f'\left(x^3\right)^2$ ☐ **c.** $x \mapsto 3x^2 f'\left(x^3\right)$ ☐ **d.** $x \mapsto f'\left(x^3\right)$

4. Si f, g, h sont trois fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la dérivée du produit fgh vaut

☐ **a.** $f'g'h'$ ☐ **b.** $f'gh + fgh'$ ☐ **c.** $f'gh + fg'h + fgh'$ ☐ **d.** $f'g'h + fgh'$

5. La dérivée en x de la fonction sinus est

☐ **a.** $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ☐ **b.** $\sin(x+\pi)$ ☐ **c.** $\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ ☐ **d.** $\sin(x+2\pi)$

6. La dérivée de la fonction $x \mapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est

☐ **a.** $x \mapsto x^{x-1}$ ☐ **b.** $x \mapsto xx^{x-1} = x$ ☐ **c.** $x \mapsto (1 + \ln x)\, x^x$ ☐ **d.** $x \mapsto (1 + \ln x)\, x^{x-1}$

7. L'équation de la tangente en $\frac{\pi}{4}$ au graphe de la fonction $x \mapsto \tan x$ est

☐ **a.** $y - \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4}$ ☐ **b.** $y = 1 + 2x$ ☐ **c.** $y = 2x - 1$ ☐ **d.** $y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

8. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\sin^2 x}$ est dérivable sur

☐ **a.** $\mathbb{R}$ ☐ **b.** $\mathbb{R}^*$ ☐ **c.** $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ☐ **d.** $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

9. La dérivée de $f : x \mapsto \ln|x|$ sur $\mathbb{R}^*$ est

☐ **a.** $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ ☐ **b.** $x \mapsto \left|\frac{1}{x}\right|$ ☐ **c.** $x \mapsto \frac{1}{\ln|x|}$ ☐ **d.** $x \mapsto \frac{1}{x}$

10. Quelle est la dérivée en 0 de la fonction $f : x \mapsto \tan\left(1 + \sin\left(\tan\left(x^2\right)\right)\right)$?

☐ **a.** 0 ☐ **b.** $\tan 1$ ☐ **c.** $\frac{\pi}{4}$ ☐ **d.** $1 + \tan^2 1$

11. La fonction $f : x \mapsto 2 + x^5$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque

☐ **a.** n'est pas dérivable en 0 ☐ **b.** n'est pas dérivable en 2
☐ **c.** n'est pas dérivable en $\sqrt[5]{-2}$ ☐ **d.** est dérivable en tout point

12. La fonction $f : x \mapsto x + \sin x$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est dérivable sur

☐ **a.** $\mathbb{R}$ ☐ **b.** $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ☐ **c.** $\mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ☐ **d.** $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Dérivées successives

1. Soit f, g deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle est la dérivée seconde de $f \circ g$?

☐ **a.** $g'' \times (f' \circ g) + (g')^2 \times (f'' \circ g)$ ☐ **b.** $g'' \times g' \times (f \circ g) + g' \times (f' \circ g)$
☐ **c.** $g' \circ f' \circ g \circ g'' \circ f \circ g$ ☐ **d.** $f'' \circ g''$

2. Pour $k \leqslant n$, la dérivée k-ième de $x \mapsto x^n$ est

☐ **a.** $x \mapsto \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ ☐ **b.** $x \mapsto \binom{n}{k} x^{n-k}$ ☐ **c.** $x \mapsto k! x^{n-k}$ ☐ **d.** $x \mapsto (n-k)! x^{n-k}$

3. La fonction $f : x \mapsto x + \ln x$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On note g sa bijection réciproque qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

☐ **a.** $g'(x) = \frac{g(x)}{g(x)+1}$ ☐ **b.** $g'(x) = \frac{g(x)+1}{g(x)}$ ☐ **c.** $g'(x) = \ln g(x)$ ☐ **d.** $g'(x) = 1 + \mathrm{e}^x$

Dérivation et monotonie

1. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f'(x) = g'(2x)$ pour tout x, quelle fonction est constante ?

   ☐ **a.** $x \mapsto f(x) - g(2x)$ ☐ **b.** $x \mapsto 2f(x) - g(2x)$ ☐ **c.** $x \mapsto f(x) - 2g(2x)$ ☐ **d.** $x \mapsto f(x) - 2g(x)$

2. Quel est le plus grand intervalle sur lequel la fonction $f(x) \coloneqq x + \sin x$ est croissante ?

   ☐ **a.** $\mathbb{R}$ ☐ **b.** $[-\pi, \pi]$ ☐ **c.** $]-\pi, \pi[$ ☐ **d.** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

3. Quel est le plus grand intervalle sur lequel la fonction $f(x) \coloneqq x + \sin x$ est strictement croissante ?

   ☐ **a.** $\mathbb{R}$ ☐ **b.** $[-\pi, \pi]$ ☐ **c.** $]-\pi, \pi[$ ☐ **d.** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Dérivation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Intégration, primitive

Primitive

Intégration et régularité

1. Soit f une fonction continue de $[0, 2]$ dans $\mathbb{R}$. Que vaut

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

   ☐ **a.** $-\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ ☐ **b.** $-\int_2^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ ☐ **c.** $-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ ☐ **d.** $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

2. En supposant les intégrales bien définies, que vaut

$$\sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   ☐ **a.** $\int_0^k f(t)\,\mathrm{d}t$ ☐ **b.** $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ ☐ **c.** $\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ ☐ **d.** $\int_{-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t$

3. Soit

$$F(x) \coloneqq \int_0^x f\left(\sin^2 t\right)\,\mathrm{d}t$$

   où f est une fonction continue. Alors $F'(x)$ est égal à

   ☐ **a.** $f(\sin^2 x)$ ☐ **b.** $2\cos(x)\sin(x)f(\sin^2 x)$

   ☐ **c.** $2\cos(x)\sin(x)f'(\sin^2 x)$ ☐ **d.** $\int_0^x 2\cos(t)\sin(t)f'\left(\sin^2 t\right)\,\mathrm{d}t$

Intégration et inégalité

Intégration par parties, changement de variable

1. Si on fait le changement de variable $u \coloneqq at$ $(a > 0)$ dans l'intégrale

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

   on obtient

   ☐ **a.** $\int_0^1 f\left(\frac{u}{a}\right)\,\mathrm{d}u$ ☐ **b.** $\int_0^a f\left(\frac{u}{a}\right)\,\mathrm{d}u$ ☐ **c.** $a\int_0^1 f\left(\frac{u}{a}\right)\,\mathrm{d}u$ ☐ **d.** $\frac{1}{a}\int_0^a f\left(\frac{u}{a}\right)\,\mathrm{d}u$

2. Si dans l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t$$

on effectue le changement de variable $t = \pi/2 - u$, on obtient

☐ **a.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \, \mathrm{d}u$ ☐ **b.** $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \, \mathrm{d}u$ ☐ **c.** $(-1)^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \, \mathrm{d}u$ ☐ **d.** $(-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \, \mathrm{d}u$

3. Le changement de variable $u \coloneqq \sin t$ dans l'intégrale

$$I \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin t) \, \mathrm{d}t$$

donne

☐ **a.** $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}} \, \mathrm{d}u$ ☐ **b.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(u) \, \mathrm{d}u$ ☐ **c.** $\int_0^{\frac{1}{2}} f(u) \, \mathrm{d}u$ ☐ **d.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}} \, \mathrm{d}u$

Calcul de primitive

1. En intégrant

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

par parties, on obtient

☐ **a.** 0 ☐ **b.** 1 ☐ **c.** e ☐ **d.** $2\mathrm{e} - 1$

2. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est

☐ **a.** $x \mapsto \sin(2x)$ ☐ **b.** $x \mapsto -2\sin(2x)$ ☐ **c.** $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{2}$ ☐ **d.** $x \mapsto -\frac{\sin(2x)}{2}$

3.6 Exercices

Le corps ordonné $\mathbb{R}$

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Exercice 1 : Inégalités

1. Montrer que pour $a, b, c \in \mathbb{R}_+$
$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \geqslant 8abc.$$
2. Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a \leqslant b$, on a
$$\frac{1}{8} \cdot \frac{(b-a)^2}{b} \leqslant \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{8} \cdot \frac{(b-a)^2}{a}.$$
3. Montrer que si $a, b, x, y \in \mathbb{R}_+^*$ sont tels que $a+b=1$, alors
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \geqslant \frac{1}{ax+by}.$$

Exercice 2 : Puissances

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. Montrer que
$$(x+y)^{\frac{1}{n}} \leqslant x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}.$$
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
3. Soit a et b deux nombres réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$n(b-a)a^{n-1} \leqslant b^n - a^n \leqslant n(b-a)b^{n-1}.$$
4. Soit $a, b, c \in [0,1]$. Montrer qu'au moins un des trois nombres réels
$$a(1-b), \quad b(1-c), \quad c(1-a)$$
est inférieur à $\frac{1}{4}$.

Exercice 3 : Système non linéaire

Soit $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels tels que
$$\sum_{i=1}^n x_i = n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = n.$$
Montrer que $x_i = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 4 : Système non linéaire

On suppose que $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^{*4}$ vérifie le système
$$\begin{cases} x+y+z = t \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{t} \end{cases}$$
Établir que $(x+y)(y+z)(z+x) = 0$, et en déduire la forme générale des solutions du système ci-dessus.

Valeur absolue

Racine

Partie entière, approximation

Exercice 5 : Rationnels et irrationnels

1. Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Peut-on affirmer que $a+b$ (respectivement $a \times b$) appartient à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? Et si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?
2. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sont irrationnels.

Exercice 6 : Intersection d'une famille infinie

Déterminer

$$\cap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right] \quad \text{et} \quad \cap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[.$$

Exercice 7 : Autour de la partie entière

Soit x et y deux nombres réels et $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que
$$\lfloor x+y\rfloor \geqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor.$$
Y a-t-il des cas d'égalité ? D'inégalité stricte ?
2. Montrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor$.

Exercice 8 : Calcul de somme

1. Montrer que
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in\mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon.}\end{cases}$$
2. En déduire que si $p,q\in\mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux
$$\sum_{k=1}^{q-1}\left\lfloor k\cdot\frac{p}{q}\right\rfloor = \frac{(p-1)\,(q-1)}{2}$$

Intervalle

Fonction réelle d'une variable réelle

Définition

Exercice 9 : Bijection

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x) \coloneqq \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1. Montrer que f est impaire puis qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
2. Déterminer f^{-1}, puis tracer les graphes de f et f^{-1}.

Symétries

Exercice 10 : Symétries de la bijection réciproque

Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ impaire et bijective. Montrer que f^{-1} est impaire.

Exercice 11 : Une fonction périodique étrange

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{si } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des périodes de f est $\mathbb{Q}$. On a donc trouvé une fonction périodique qui n'admet pas de plus petite période strictement positive.

Monotonie

Exercice 12 : Monotonie

Soit $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ une fonction telle que $f\circ f$ est croissante et $f\circ f\circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 13 : Monotonie et théorèmes usuels

Donner la monotonie (si possible sans dériver) des fonctions d'expressions

$$\textbf{a. } \mathrm{e}^{-1/x^2}, \qquad \textbf{b. } \mathrm{e}^{1/x^3}, \qquad \textbf{c. } x\ln(\cos x) \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

$$\textbf{d. } x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \text{sur }]1,+\infty[, \qquad \textbf{e. } \sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*,$$

$$\textbf{f. } \sin\big((\mathrm{e}^{-x}-1)\,\pi/2\big) \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

Fonction majorée, minorée, bornée

Fonction continue, fonction dérivable

Continuité

Exercice 14 : Domaine de continuité

On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}.$$

Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ en lesquels f est continue.

Dérivabilité

Exercice 15 : Fonction définie par morceaux

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) := \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que g soit continue sur $[0,1]$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que g soit dérivable sur $[0,1]$.

Exercice 16 : Bijection

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) := \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J à préciser.

Dans la suite, on note $g : J \to \mathbb{R}_+^*$ la bijection réciproque de la corestriction de f à J.

2. Discuter de la monotonie de g, de sa continuité et sa dérivabilité. Expliciter la dérivée de g sur J.
3. Expliciter $g(y)$ en résolvant directement l'équation $f(x) = y$ et retrouver les propriétés établies à la question précédente.

Exercice 17 : Bijection

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Donner les symétries et la monotonie de $g := f^{-1}$.
3. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x)^2 - f(x)^2 = 1.$$

En déduire que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4. Expliciter g^{-1} en résolvant directement l'équation $f(x) = y$.

Dérivation et monotonie

Exercice 18 : Études de variations

Étudier les variations des fonctions suivantes

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x} \quad \text{et} \quad x \mapsto \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

Dérivation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Intégration, primitive

Primitive

Exercice 19 : Bijection

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dans cet exercice, il est interdit d'utiliser la fonction Arcsin.

1. Montrer que f admet une unique primitive F s'annulant en 0.
2. Montrer que $F(x)$ admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers 1.
3. Montrer que F est impaire.

On définit la fonction φ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ par

$$\forall x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[, \quad \varphi(x) := F(\sin x).$$

4. En dérivant φ, montrer que
$$\forall x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[, \quad F(\sin x) = x.$$
5. En déduire la valeur de l.

Intégration et régularité

Intégration et inégalité

Exercice 20 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit g la fonction d'expression

$$g(x) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^t}{1 + x \sin t} \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g est définie sur $]-1, +\infty[$.
2. Montrer que g est décroissante.

Exercice 21 : Sommes de Riemann de fonctions monotones

Soit f une fonction continue et croissante sur $[0,1]$. On définit la suite (u_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a
$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right).$$
2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$
$$u_n - \frac{1}{n}\left(f(1) - f(0)\right) \leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_n.$$
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. En donner une interprétation géométrique.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n := \sum_{k=0}^{n} k^\alpha.$$

Montrer que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

c'est-à-dire que la suite de terme général

$$v_n \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$$

converge vers 1.

Intégration par parties, changement de variable

Exercice 22 : Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit I_n et J_n par

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t \qquad J_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$.
2. Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont positives et décroissantes. Calculer I_0 et I_1.
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$
4. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
$$I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$
5. En déduire que
$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$
c'est-à-dire que la suite de terme général $I_n\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ converge vers 1.

Exercice 23 : Intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n := \int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x.$$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}.$$

Calcul de primitive

Exercice 24 : Calcul de primitives

Donner le domaine de définition et calculer les primitives suivantes

a. $\displaystyle\int \left(x^2+x+1\right) \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x,$ **b.** $\displaystyle\int \left(x^2-1\right) \cos x \,\mathrm{d}x,$ **c.** $\displaystyle\int x^3 \ln x \,\mathrm{d}x,$

d. $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x,$ **e.** $\displaystyle\int \sin x \cos^2 x \,\mathrm{d}x,$ **f.** $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x,$

g. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1} \,\mathrm{d}x,$ **h.** $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x} \,\mathrm{d}x,$ **i.** $\displaystyle\int \ln^n x \,\mathrm{d}x$ (pour $n \in \mathbb{N}$).

Chapitre 4

Compléments d'algèbre

« The closer one looks, the more subtle and remarkable Gaussian elimination appears. »

— Nick Trefethen (1955–)

4.1 Somme et produit, fonction polynôme

4.1.1 Somme

Définition 4.1.1

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n$ et $u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{n-1}, u_n \in \mathbb{C}$. On définit

$$\sum_{k=m}^{n} u_k \coloneqq u_m + u_{m+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n.$$

Remarque

⇨ Lorsque $n = m - 1$, la convention est de poser $\sum_{k=m}^{n} u_k \coloneqq 0$. Cette convention permet d'écrire

$$\forall n \geqslant m, \quad \sum_{k=m}^{n} u_k = u_n + \sum_{k=m}^{n-1} u_k.$$

⇨ Si $m, n \in \mathbb{Z}$ sont tels que $n \geqslant m - 1$, alors $\operatorname{Card}(\llbracket m, n \rrbracket) = n - m + 1$. En particulier, quel que soit $a \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=m}^{n} a = (n - m + 1)\, a.$$

Exercice 1

⇨ Écrire avec le symbole $\sum$ les sommes suivantes, sachant que chacune d'elle est composée de $n+1$ termes.

$$-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 + \cdots, \qquad a_1 + a_4 + a_7 + \cdots$$

$$a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + \cdots, \qquad a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + \cdots.$$

Proposition 4.1.2

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} u_k + \mu \sum_{k=m}^{n} v_k.$$

Proposition 4.1.3

— Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m-p}^{n-p} u_{k+p}.$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}.$$

Remarques

⇨ En pratique, lorsque l'on souhaite faire la première transformation, on dit qu'on effectue le changement de variable $k \to k+p$.

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \text{«} \sum_{k=m}^{k=n} u_k = \sum_{k+p=m}^{k+p=n} u_{k+p} = \sum_{k=m-p}^{k=n-p} u_{k+p} \text{»} = \sum_{k=m-p}^{n-p} u_{k+p}.$$

Le seconde transformation se fait de manière similaire, en utilisant cette fois la convention que si les bornes ne sont pas « dans le bon sens », on les échange ; on dit dans ce cas qu'on fait le changement de variable $k \to n-k$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \text{«} \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{n-k=0}^{n-k=n} u_{n-k} = \sum_{k=n}^{k=0} u_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} u_{n-k} \text{»} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}.$$

⇨ Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite. Si $m, n \in \mathbb{Z}$ sont tels que $n \geqslant m-1$

$$\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m.$$

On dit qu'une telle somme est *télescopique*.

Exercices 2

⇨ 1. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire une expression simple de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en effectuant le changement de variable $k \to k+1$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k.$$

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant les racines $(2n+1)$-ièmes de l'unité, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Définition 4.1.4

Soit $r \in \mathbb{C}$. Une suite (u_n) est dite *en progression arithmétique de raison* r lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

Proposition 4.1.5

Soit (u_n) une suite en progression arithmétique et $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $n \geqslant m - 1$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} u_k &= \frac{u_m + u_n}{2} \cdot (n - m + 1) \\ &= \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \cdot (\text{nombre de termes}) . \end{aligned}$$

Proposition 4.1.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Définition 4.1.7

Soit $q \in \mathbb{C}$. Une suite (u_n) est dite *en progression géométrique de raison* q lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

Proposition 4.1.8

Soit (u_n) une suite en progression géométrique dont la raison $q \in \mathbb{C}$ est différente de 1 et $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} u_k &= \frac{u_m - u_{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{\text{premier terme} - \text{terme suivant}}{1 - q}. \end{aligned}$$

Exercices 3

⇨ Montrer que la suite de terme général

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

est convergente.

⇨ Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n} k x^k.$$

Proposition 4.1.9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} u_{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} u_{2k+1}$$

Exercice 4

⇨ Calculer la somme
$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k.$$

4.1.2 Produit

Définition 4.1.10

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n$ et $u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{n-1}, u_n \in \mathbb{C}$. On définit
$$\prod_{k=m}^{n} u_k := u_m \cdot u_{m+1} \cdots u_{n-1} \cdot u_n.$$

Remarques

⇨ Lorsque $n = m-1$, la convention est de poser $\prod_{k=m}^{n} u_k := 1$. Cette convention permet d'écrire
$$\forall n \geqslant m, \quad \prod_{k=m}^{n} u_k = u_n \prod_{k=m}^{n-1} u_k.$$

⇨ Si $m, n \in \mathbb{Z}$ sont tels que $n \geqslant m-1$. Alors, quel que soit $a \in \mathbb{C}$
$$\prod_{k=m}^{n} a = a^{n-m+1}.$$

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Exercice 5

⇨ Exprimer, à l'aide de factorielles, les produits
$$\prod_{k=1}^{n}(2k) \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n}(2k+1).$$

Proposition 4.1.11

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors
$$\prod_{k=m}^{n} u_k v_k = \left(\prod_{k=m}^{n} u_k\right)\left(\prod_{k=m}^{n} v_k\right).$$

4.1.3 Somme et produit doubles

On parle de somme double lorsqu'il y a deux indices. Pour sommer les éléments $u_{i,j}$ d'un tableau à n lignes et m colonnes, on peut procéder d'au moins deux manières : une sommation en lignes ou en colonnes. Évidemment, le résultat est le même.

Proposition 4.1.12

Soit $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ et $(u_{i,j})$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors
$$\sum_{i=m_1}^{n_1}\sum_{j=m_2}^{n_2} u_{i,j} = \sum_{j=m_2}^{n_2}\sum_{i=m_1}^{n_1} u_{i,j}.$$

Remarque

⇨ Cette somme est parfois notée
$$\sum_{\substack{m_1 \leqslant i \leqslant n_1 \\ m_2 \leqslant j \leqslant n_2}} u_{i,j} \quad \text{ou} \quad \sum_{(i,j)\in[\![m_1,n_1]\!]\times[\![m_2,n_2]\!]} u_{i,j}.$$

Exercices 6

⇨ Calculer

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} ij \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} (i+j).$$

⇨ Calculer

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} \binom{i}{j}.$$

⇨ Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k$$

en remarquant astucieusement que $k = \sum_{i=1}^{k} 1$.

Proposition 4.1.13

Soit $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors

$$\left(\sum_{i=m_1}^{n_1} u_i\right)\left(\sum_{j=m_2}^{n_2} v_j\right) = \sum_{i=m_1}^{n_1}\sum_{j=m_2}^{n_2} u_i v_j.$$

Exercices 7

⇨ Calculer

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |i-j|.$$

⇨ Calculer

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{n-k} \frac{k}{s+k}.$$

4.1.4 Fonction polynôme

Dans la suite de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 4.1.14

On appelle *fonction polynôme* à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute fonction $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad P(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n.$$

L'ensemble des fonctions polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{P}(\mathbb{K},\mathbb{K})$.

Remarque

⇨ On dit qu'une fonction polynôme $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ est de *degré* $n \in \mathbb{N}$ lorsqu'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $a_n \neq 0$ et

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad P(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n.$$

Exercice 8

⇨ 1. Montrer que pour tout $n \in [\![0, 3]\!]$, il existe une fonction polynôme P_n de degré n telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = P_n(\cos x).$$

2. Généraliser ce résultat pour $n \in \mathbb{N}$.

Définition 4.1.15

Si $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K},\mathbb{K})$, on appelle *racine* de P tout élément $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Remarques

⇨ Le calcul des racines des fonctions polynôme de degré 2 se fait en utilisant le discriminant.

⇨ Il n'y a pas de méthode systématique pour trouver les racines des fonctions polynôme de degré supérieur. En effet, on peut montrer qu'il n'existe pas de formule générale permettant de calculer les racines des fonctions polynôme de degré 3 ou plus avec des radicaux réels. Et même si on s'autorise les racines n-ièmes de nombres complexes, il n'existe pas de formule générale permettant de déterminer les racines de fonctions polynôme de degré 5 ou plus. Cependant, il existe différentes techniques qui sont efficaces pour certaines fonctions polynôme.

Proposition 4.1.16

Soit $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors α est une racine de P si et seulement si il existe $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad P(z) = (z - \alpha)Q(z).$$

Remarques

⇨ La factorisation effective se fait par division euclidienne. Par exemple, si $P(z) \coloneqq z^3 + 3z^2 + 3z + 2$, on remarque que $P(-2) = 0$ donc $P(z)$ se factorise par $z + 2$ et la division euclidienne s'effectue de la manière suivante.

$$\begin{array}{rrrr|l}
z^3 & +3z^2 & +3z & +2 & z+2 \\ \cline{5-5}
z^3 & +2z^2 & & & z^2+z+1 \\ \cline{1-4}
 & z^2 & +3z & +2 & \\
 & z^2 & +2z & & \\ \cline{2-4}
 & & z & +2 & \\
 & & z & +2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

donc $z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = (z + 2)(z^2 + z + 1)$. Puisque les racines de $Q(z) \coloneqq z^2 + z + 1$ sont j et j^2, on en déduit que les racines de P sont $-2, \mathrm{j}$ et j^2.

⇨ Si P est une fonction polynôme à coefficients entiers, il existe une technique efficace pour déterminer rapidement ses racines rationnelles. Soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ tels que $P(z) \coloneqq a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$. Si r est une racine rationnelle de P, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $r = p/q$. Puisque $P(r) = 0$, on en déduit que

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + \cdots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

En multipliant par q^n, on obtient

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

On en déduit que

$$a_n p^n = -q \left(a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right)$$

et donc que q divise $a_n p^n$. Or q et p sont premiers entre eux donc q et p^n sont premiers entre eux. D'après le lemme de Gauss, on en déduit que q divise a_n. De même, on montre que p divise a_0. Comme il existe un nombre fini de diviseurs d'un entier non nul, les racines rationnelles sont donc à chercher parmi un nombre fini d'éléments. Par exemple, si $P(z) \coloneqq 3z^3 + 5z^2 + 5z + 2$, et si p/q est une racine rationnelle mise sous forme irréductible de P, alors p divise 2 et q divise 3. Donc $p \in \{-2, -1, 1, 2\}$ et $q \in \{1, 3\}$. Les racines rationnelles éventuelles de P sont donc parmi $\{-2, -1, 1, 2, -2/3, -1/3, 1/3, 2/3\}$. Si on teste tous ces rationnels, on se rend compte que $-2/3$ est une racine de P. $P(z)$ se factorise donc par $3z + 2$ et une division euclidienne nous donne $P(z) = (3z + 2)(z^2 + z + 1)$. Les racines de P sont donc $-2/3, \mathrm{j}$ et j^2.

⇨ D'autres techniques permettent de trouver les racines d'une fonction polynôme de degré $n \geqslant 3$. Par exemple, pour certaines fonctions polynôme, ramener la recherche de leurs racines à la recherche des racines n-ièmes d'un nombre complexe.

Proposition 4.1.17

Une fonction polynôme $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus n racines.

Remarques

⇨ Soit $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ une fonction polynôme et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n.$$

Si P admet au moins $n + 1$ racines, alors $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

⇨ Soit $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ et R une partie de $\mathbb{K}$ telle que

$$\forall z \in R, \quad a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0.$$

Si R possède au moins $n+1$ éléments (en particulier si R est infini), alors $a_n = b_n, \dots, a_0 = b_0$.

⇨ Si P est une fonction polynôme non nulle, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ et une unique famille $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $a_n \neq 0$ et

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n.$$

On dit que n est le *degré* de P et que $a_0, \dots, a_n$ sont ses *coefficients*.

4.2 Trigonométrie

4.2.1 Égalité modulaire

Définition 4.2.1

Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que a est *congru à b modulo m* et on note

$$a \equiv b \; [m]$$

lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + km$.

Exercice 9

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Quel est le lien logique entre

$$« \, a \equiv b \; [2\pi] \, » \quad \text{et} \quad « \, a \equiv b \; [\pi] \, » \, ?$$

Proposition 4.2.2

— Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$a_1 \equiv b_1 \; [m] \quad \text{et} \quad a_2 \equiv b_2 \; [m].$$

Alors, quels que soient $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$,

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 \equiv k_1 b_1 + k_2 b_2 \; [m].$$

— Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$a \equiv b \; [m].$$

Alors, si $c \in \mathbb{R}_+^*$

$$ac \equiv bc \; [mc].$$

Remarques

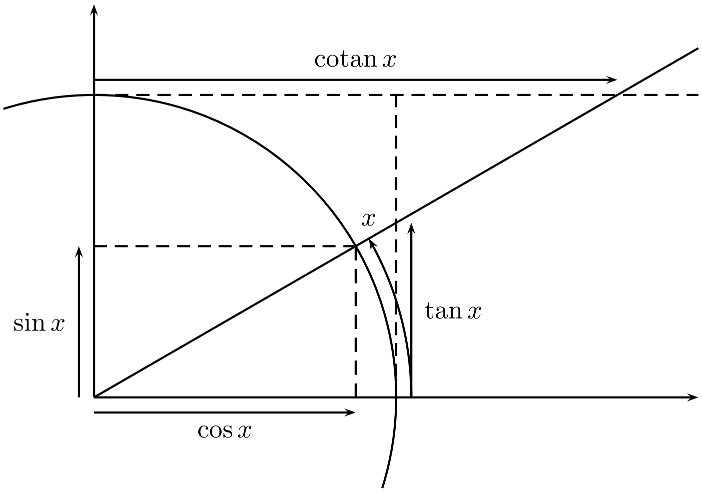
⇨ On en déduit qu'on peut raisonner avec les « $\equiv$ » de la même manière qu'avec « $=$ » pour résoudre les équations.
- On peut passer une expression d'un côté à l'autre du « $\equiv$ » en changeant son signe.
- On peut multiplier les deux côtés du signe « $\equiv$ » par un même coefficient $c \in \mathbb{R}_+^*$. Il suffit juste de multiplier le modulo par c.

Ces deux transformations permettent de raisonner par équivalence.

⇨ Si $a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}_+^*$, alors l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \equiv a \; [m]$ est noté

$$a + m\mathbb{Z} := \{a + km : k \in \mathbb{Z}\}.$$

4.2.2 Formules de trigonométrie



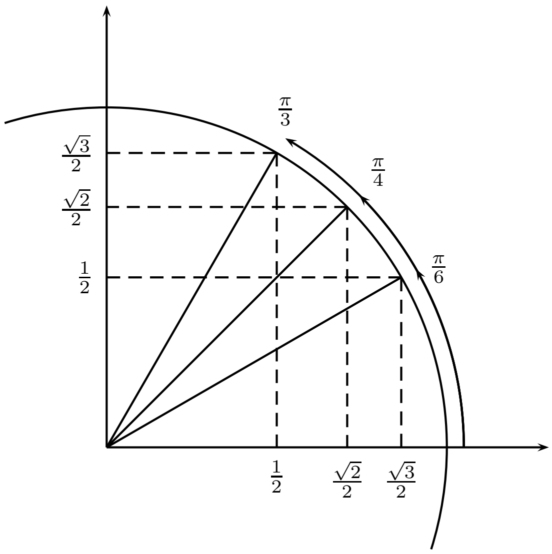
Définition 4.2.3

On définit le *sinus*, le *cosinus*, la *tangente* et la *cotangente* d'un angle x exprimé en radians sur le cercle trigonométrique de rayon 1 comme ci-dessus. En particulier $\tan x$ n'est défini que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, $\operatorname{cotan} x$ n'est défini que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Remarque

⇨ On rappelle les principales valeurs remarquables.



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	indéfini
$\operatorname{cotan} x$	indéfini	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

⇨ Si $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, alors

$$\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x}.$$

Proposition 4.2.4

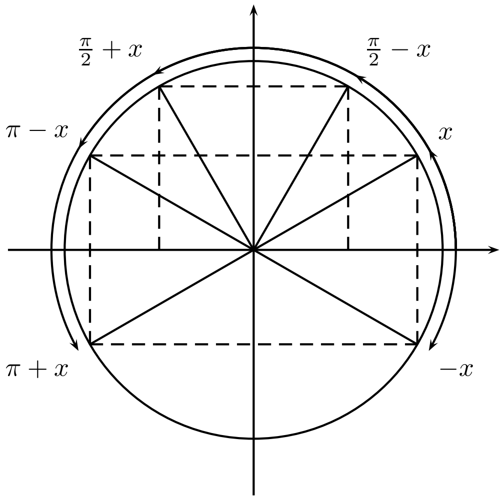
D'après Pythagore, on a

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$
$$1 + \text{cotan}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Proposition 4.2.5: Symétries

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x & \cos(\pi + x) &= -\cos x & \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x & \sin(\pi + x) &= -\sin x & \sin(\pi - x) &= \sin x \\ \tan(-x) &= -\tan x & \tan(\pi + x) &= \tan x & \tan(\pi - x) &= -\tan x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\text{cotan}\, x & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \text{cotan}\, x \end{aligned}$$



Remarques

⇨ Il est important de retrouver rapidement ces formules en dessinant le cercle trigonométrique et un « petit » angle x vérifiant $0 < x < \pi/4$.

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x \qquad \text{et} \qquad \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin x.$$

En particulier $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = 0$.

⇨ Quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos x = \cos y &\iff [x \equiv y \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -y \ [2\pi]] \\ \sin x = \sin y &\iff [x \equiv y \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi - y \ [2\pi]] \end{aligned}$$

⇨ Quels que soient $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$

$$\tan x = \tan y \iff x \equiv y \ [\pi].$$

Exercices 10

⇨ Calculer

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right), \qquad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right), \qquad \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right).$$

⇨ Résoudre l'équation $\sin x = \cos x$.

Proposition 4.2.6: Addition des arcs

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Remarque

⇨ Si $a, b \in \mathbb{R}$ ne sont pas tous les deux nuls, on pourra factoriser $a\cos x + b \sin x$ de la manière suivante.

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$

Puisque

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\theta_0 = a/\sqrt{a^2+b^2}$ et $\sin\theta_0 = b/\sqrt{a^2+b^2}$. On a alors

$$\begin{aligned} a\cos x + b\sin x &= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta_0 \cos x + \sin\theta_0 \sin x) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta_0). \end{aligned}$$

Exercice 11

⇨ Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$.

Proposition 4.2.7: Angle double

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2\cos x \sin x \\ \tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1+\cos(2x)}{2} \\ \sin^2 x &= \frac{1-\cos(2x)}{2} \end{aligned}$$

Exercices 12

⇨ Exprimer $\cos(\pi/8)$ à l'aide de radicaux.

⇨ Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_n := \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right).$$

Simplifier $p_n \sin(a/2^n)$ puis en déduire la limite de la suite (p_n).

Proposition 4.2.8: Linéarisation

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$
$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$$

Exercice 13

⇨ Linéariser $\cos^3 x$, $\cos x \sin^2 x$, puis $\sin^4 x$.

Proposition 4.2.9: Factorisation

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \qquad \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$
$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

Exercice 14

⇨ En multipliant par $\sin(x/2)$, calculer

$$A := \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad B := \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx).$$

Proposition 4.2.10

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \pi\ [2\pi]$. Alors, en posant $t := \tan(x/2)$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Si de plus, $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

4.3 Récurrence linéaire

4.3.1 Récurrence linéaire d'ordre 1

Définition 4.3.1

Si (a_n) et (b_n) sont deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, l'équation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + a_n u_n = b_n$$

dont l'inconnue est la suite (u_n) est appelée *récurrence linéaire d'ordre 1*.

Proposition 4.3.2

Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors, les solutions de la récurrence linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a u_n$$

sont les suites (u_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \lambda a^n$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 4.3.3

Soit (a_n) et (b_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si (v_n) est une solution « particulière » de la récurrence linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + a_n u_n = b_n$$

alors, les solutions de cette récurrence linéaire sont les suites $(v_n + u_n)$ où (u_n) parcourt l'ensemble des solutions de la récurrence linéaire homogène associée

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + a_n u_n = 0.$$

Exercices 15

⇨ Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer le n-ième terme de la suite (u_n) définie par

$$u_0 := a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} := \frac{3}{2}u_n + 5.$$

⇨ On considère la récurrence linéaire

$$(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - 2u_n = n^2.$$

1. Déterminer une solution polynomiale de (E).
2. En déduire toutes les solutions.

Remarques

⇨ *Méthode de la similitude* : Si l'on cherche les suites vérifiant la récurrence linéaire $u_{n+1} = au_n + b$, on introduit la fonction $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par $f(z) := az + b$.

— Si $a = 1$, une récurrence immédiate nous montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nb.$$

— Sinon, f admet un unique point fixe $\omega \in \mathbb{K}$ et, pour tout $z \in \mathbb{K}$, $f(z) = a(z - \omega) + \omega$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \omega = a(u_n - \omega)$$

et une récurrence immédiate donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(u_0 - \omega) + \omega.$$

⇨ *Méthode de la sommation télescopique* : Si l'on cherche les suites vérifiant la récurrence linéaire $u_{n+1} = au_n + b_n$ où $a \in \mathbb{K}^*$, on commence par remarquer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{k+1}}{a^{k+1}} - \frac{u_k}{a^k} = \frac{b_k}{a^{k+1}},$$

puis on somme cette relation pour k allant de 0 à $n-1$. On obtient une somme télescopique, puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n}{a^n} - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{a^{k+1}}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 a^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k a^{n-(k+1)}.$$

4.3.2 Récurrence linéaire d'ordre 2

Proposition 4.3.4

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On souhaite trouver les suites (u_n) vérifiant

$$(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $z^2 = az + b$.
- Si cette équation admet deux racines distinctes r_1 et $r_2 \in \mathbb{C}$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
- Si cette équation admet une racine double $r \in \mathbb{C}^*$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := (\lambda + \mu n)\, r^n$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Exercices 16

⇨ Calculer le n-ième terme de la suite de Fibonacci définie par

$$F_0 := 1, \qquad F_1 := 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} := F_{n+1} + F_n.$$

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer le n-ième terme de la suite (u_n) définie par

$$u_0 := a, \quad u_1 := b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} := \frac{1}{u_{n+1}^2 u_n}.$$

Remarques

⇨ La suite de Fibonacci est ainsi nommée en hommage à Leonardo Pisano (Leonard de Pise, 1170–1240) appelé aussi Leonardo Fibonacci, qui avait publié cette suite en 1202. Il avait lu le travail de Al-Khwarizmi (780–850), un mathématicien Persan. Le livre de Fibonacci contient le problème suivant. Combien de couples de lapins peuvent naître d'un couple de lapin en un an ? Pour résoudre ce problème, on sait que :
- Jusqu'au premier mois inclus, il n'y a qu'un couple de lapins.
- Chaque couple de lapin donne naissance à un couple tous les mois.
- Chaque jeune couple devient fertile à l'âge d'un mois.

Avant le travail de Fibonacci, la suite (F_n) a déjà été étudiée par les Indiens qui se demandaient combien de rythmes de n temps il était possible de faire avec des noires et des blanches.

⇨ Tout comme pour les récurrences linéaires d'ordre 1, afin de résoudre une récurrence linéaire de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c_n,$$

il suffit d'en trouver une solution particulière (v_n) et d'y ajouter les solutions de la récurrence linéaire homogène associée $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Proposition 4.3.5

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On souhaite trouver les suites (u_n) vérifiant

$$(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $z^2 = az + b$.
- Si cette équation admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Si cette équation admet une racine double $r \in \mathbb{R}^*$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := (\lambda + \mu n)\, r^n$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Si cette équation admet deux racines complexes conjuguées $r e^{i\omega}$ et $r e^{-i\omega}$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := [\lambda \cos(\omega n) + \mu \sin(\omega n)]\, r^n$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Remarque

⇨ Dans le cas où l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées, les solutions de (E) peuvent s'écrire sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \coloneqq \lambda \sin(\omega n - \varphi) r^n$$

où $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$. Lors de la recherche effective de tels coefficients, quitte à changer φ en $\varphi + \pi$, on impose souvent $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Exercices 17

⇨ Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 \coloneqq 1, \quad u_1 \coloneqq 0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} \coloneqq 2u_{n+1} - 4u_n.$$

Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $u_n = 0$.

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer le n-ième terme de la suite (u_n) définie par

$$u_0, u_1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} \coloneqq 2\cos(\alpha)\, u_{n+1} - u_n.$$

4.4 Système linéaire

4.4.1 Système linéaire à q équations et p inconnues

Définition 4.4.1

On appelle *système linéaire* à q équations et p inconnues tout système d'équations du type

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q \end{cases}$$

où $a_{1,1}, \ldots, a_{q,p}, y_1, \ldots, y_q \in \mathbb{K}$ et $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$ sont les inconnues. On dit que le système est *compatible* lorsqu'il admet au moins une solution. On dit qu'il est *incompatible* sinon.

Remarques

⇨ Pour des raisons de lisibilité, on veillera à toujours placer les inconnues les unes en dessous des autres.

⇨ L'ensemble des solutions est l'ensemble $\mathcal{S}$ des $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ solution du système.

Exercice 18

⇨ Résoudre le système suivant par substitution, puis en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x + y = 9. \end{cases}$$

Proposition 4.4.2

Les opérations suivantes, appelées opérations élémentaires, transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent.

— Changer l'ordre des équations.
— Changer l'ordre des inconnues.
— Multiplier une équation par $\mu \in \mathbb{K}^*$.
— Ajouter λ fois (avec $\lambda \in \mathbb{K}$) une équation à l'une des équations suivantes.

Remarque

⇨ En pratique, afin d'expliciter les opérations que l'on vient d'effectuer, on utilisera les notations suivantes.

— $L_i \leftrightarrow L_j$ signifie qu'on a échangé les lignes i et j.
— $L_i \leftarrow \mu L_i$ signifie qu'on a multiplié la ligne L_i par le coefficient μ non nul.
— $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ signifie qu'on a ajouté λ fois la ligne L_j à la ligne L_i.

Exercice 19

⇨ Les opérations élémentaires suivantes conservent-elles l'équivalence ?
- $L_1 \leftarrow L_2$.
- $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$.
- $L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$.
- $L_1 \leftarrow \alpha L_1 + \beta L_2$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
- $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_2 \leftarrow L_1 - L_2$.

Proposition 4.4.3

L'algorithme du pivot de Gauss permet de transformer, quitte à échanger les variables, un système linéaire à q équations et p inconnues en un système linéaire équivalent de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \quad \cdots \quad + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad\quad a_{2,2}x_2 + \quad \cdots \quad + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\quad = \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{r,r}x_r + \cdots + a_{r,p}x_p = y_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = y_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots = \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = y_q \end{cases}$$

où $a_{1,1}, \ldots, a_{r,r}$ sont tous non nuls. On dit d'un tel système qu'il est *échelonné à pivots diagonaux*.
- Le système est compatible si et seulement si $(y_{r+1}, \ldots, y_q) = (0, \ldots, 0)$.
- Le système admet une unique solution si et seulement si il est compatible et $r = p$.

Exercices 20

⇨ Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 11x + 2y = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 2y = 1. \end{cases}$$

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 2y + z = \alpha. \end{cases}$$

Remarques

⇨ Voici une présentation détaillée de l'algorithme du Pivot de Gauss.
- *On transforme le système en un système échelonné.*
  On commence par déterminer un coefficient $a_{i,j}$ non nul que l'on appelle *pivot*. Très souvent $a_{1,1}$ conviendra, mais il est encore plus pratique pour la suite des calculs si ce coefficient est ± 1. En effectuant un échange de lignes et d'inconnues, on « remonte » ensuite ce coefficient en haut à gauche du système. On se retrouve donc dans le cas où $a_{1,1} \neq 0$. On utilise alors $a_{1,1}$ comme pivot pour éliminer l'inconnue x_1 des $q-1$ dernières lignes du système :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q \end{cases} \iff \begin{cases} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + \cdots + a'_{1,p}x_p = y'_1 \\ \qquad\quad a'_{2,2}x_2 + \cdots + a'_{1,p}x_p = y'_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad\quad a'_{q,2}x_2 + \cdots + a'_{q,p}x_p = y'_q. \end{cases}$$

  Pour cela, il suffit d'effectuer les opérations suivantes :

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot L_1, \qquad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \cdot L_1, \qquad \ldots \qquad L_q \leftarrow L_q - \frac{a_{q,1}}{a_{1,1}} \cdot L_1.$$

  On recommence ensuite le même procédé sur les $q-1$ dernières équations du système, en ne touchant plus à la première ligne. On cherche d'abord un coefficient $a'_{i,j}$ non nul pour lequel $i \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$. Si un tel coefficient existe, un échange de lignes et d'inconnues permet de se ramener au cas où $a'_{2,2} \neq 0$ et de continuer l'algorithme. On réitère le procédé jusqu'à ce qu'on ne soit plus capable de trouver de pivot. Le système est alors échelonné. Au cours du calcul, s'il apparaît l'équation $0 = 0$, on l'élimine du système. Si au contraire il apparaît l'équation $0 = b$ avec $b \neq 0$, le système n'admet aucune solution et la résolution est terminée.
- *On introduit les paramètres t_k.*

Dans le cas où le système admet au moins une solution, on aboutit à un système de la forme

$$\begin{cases} a''_{1,1}x_1 + a''_{1,2}x_2 + \cdots + a''_{1,p}x_p = y''_1 \\ a''_{2,2}x_2 + \cdots + a''_{2,p}x_p = y''_2 \\ \ddots \quad = \vdots \\ a''_{r,r}x_r + \cdots + a''_{r,p}x_p = y''_r \end{cases}$$

où les $a''_{1,1}, a''_{2,2}, \dots, a''_{r,r}$ sont tous non nuls. Afin de paramétrer l'ensemble des solutions, on remarque que ce dernier système est équivalent au système triangulaire

$$\exists t_{r+1}, \dots, t_p \in \mathbb{K}, \quad \begin{cases} a''_{1,1}x_1 + a''_{1,2}x_2 + \cdots + a''_{1,p}x_p = y''_1 \\ a''_{2,2}x_2 + \cdots + a''_{2,p}x_p = y''_2 \\ \ddots \quad = \vdots \\ a''_{r,r}x_r + \cdots + a''_{r,p}x_p = y''_r \\ x_{r+1} = t_{r+1} \\ \ddots \quad = \vdots \\ x_p = t_p. \end{cases}$$

En effet, si $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de ce dernier système, on obtient le système précédent en ne gardant que les r premières lignes. Réciproquement, si $(x_1, \dots, x_p)$ est solution du système échelonné, on obtient ce dernier système en posant $t_{r+1} := x_{r+1}, \dots, t_p := x_p$.

— *On résout le système triangulaire.*
Ce dernier système se résout simplement en remontant les calculs de la dernière ligne à la première, par substitution. On obtient ainsi le système équivalent

$$\exists t_{r+1}, \dots, t_p \in \mathbb{K}, \quad \begin{cases} x_1 = c_1 + d_{1,r+1}t_{r+1} + \cdots + d_{1,p}t_p \\ \vdots = \vdots \qquad \vdots \\ x_r = c_r + d_{r,r+1}t_{r+1} + \cdots + d_{r,p}t_p \\ x_{r+1} = t_{r+1} \\ \vdots = \ddots \\ x_p = t_p \end{cases}$$

qui est un *paramétrage* de l'ensemble des solutions.
Remarquons que lorsque les calculs sont complexes, au lieu de résoudre directement le système triangulaire par substitution, on peut aussi effectuer un pivot de Gauss « à l'envers » en commençant par éliminer les x_p des $p-1$ premières équations avec la dernière ligne, puis en éliminant les x_{p-1} des $p-2$ premières équations avec l'avant-dernière ligne, etc.

⇨ Lorsqu'on applique l'algorithme du pivot de Gauss, on est libre de choisir le pivot que l'on souhaite. La seule contrainte est qu'il soit non nul. L'expérience montre cependant que certains choix sont plus judicieux que d'autres, car ils conduisent à des calculs plus simples.
Par exemple, un pivot égal à 1 est idéal car les opérations sur les lignes sont réduites à $L_i \leftarrow L_i - a_{i,1}L_1$. On évite ainsi les divisions, ce qui offre de nombreux avantages. Par exemple, lorsque les coefficients du système sont entiers, ils le restent après réduction du système. Dans le même ordre d'idées, avant de choisir le pivot, lorsque les coefficients d'une même ligne sont des multiples d'un entier $a \in \mathbb{Z}^*$, il est bon de simplifier cette ligne par a.
Enfin, lorsque les coefficients du système dépendent d'un paramètre α, il est toujours préférable d'utiliser un pivot ne dépendant pas de α. Cette stratégie permet d'éviter de discuter les cas où ce terme peut s'annuler, et limite la propagation de ce paramètre à tous les autres coefficients du système.

Exercice 21

⇨ Discuter et résoudre les systèmes suivants, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -3a + \alpha b = 0 \\ -3a - b + 2\alpha c = 0 \\ -2b + c + 3\alpha d = 0 \\ -c + 3d = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b + c + d = 3 \\ a + \alpha b + c - \alpha d = \alpha + 2 \\ \alpha a - b - \alpha c - \alpha d = -1. \end{cases}$$

Remarques

⇨ Il est parfois pratique dans les calculs d'omettre le nom des variables. On utilise alors ce qu'on appelle une *matrice* *augmentée.*

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+3y=4 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\iff} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x = -5 \\ y = 3. \end{cases}$$

Cette technique a l'avantage d'écrire le minimum nécessaire et de vous obliger à aligner les coefficients les uns au-dessus des autres. Son seul inconvénient est de rendre impossible le changement d'ordre des inconnues.

⇨ L'échange des inconnues étant impossible avec la méthode de la matrice augmentée, il arrive que cette méthode nous empêche de réduire le système à un système échelonné à pivots diagonaux. On se contente donc d'un *système échelonné*, c'est-à-dire un système où chaque ligne commence par un nombre de zéros strictement supérieur à celui de la ligne précédente, comme dans l'exemple suivant

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & a_{2,3} & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & a_{3,4} & \star \end{array}\right)$$

où $a_{1,1}, a_{2,3}$ et $a_{3,4}$ sont des coefficients non nuls qu'on appelle encore *pivots*. On réintroduit ensuite les inconnues, avant de les réordonner pour obtenir un système échelonné à pivots diagonaux et finir la résolution du système.

Définition 4.4.4

On considère un système linéaire à q équations et p inconnues.

$$(E) \qquad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q \end{cases}$$

— On dit qu'il est *homogène* lorsque $(y_1, \ldots, y_q) = (0, \ldots, 0)$.
— On appelle *système linéaire homogène* associé à (E), le système obtenu en remplaçant les y_i par 0.

Remarque

⇨ Le p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) = (0, \ldots, 0)$ est toujours solution d'un système homogène. On dit que c'est la *solution triviale*. Il est possible que ce soit la seule solution ou qu'il y en ait d'autres.

4.4.2 Interprétation géométrique lorsque $p = 2$ ou $p = 3$

Dans cette partie, nous allons donner une interprétation géométrique des résultats précédents aux cas $p = 2$ et $p = 3$. Commençons par le cas $p = 2$. On munit le plan d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On rappelle qu'un point M du plan est déterminé de manière unique par ses coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ définies par

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}.$$

Proposition 4.4.5

— Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors l'ensemble d'équation $ax + by = c$ est une droite $\mathcal{D}$ de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b).
— Réciproquement, soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b). Alors, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $ax + by = c$ est une équation de $\mathcal{D}$.

Résoudre un système linéaire à q équations et 2 inconnues x et y dont chaque ligne contient un coefficient non nul revient donc à déterminer l'intersection de q droites du plan. Le cas où $q = 2$ est important.

— Si les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles, alors elles se coupent en un unique point. Le système admet donc une unique solution.
— Si les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles, deux cas se présentent.
  — Si elles ne sont pas confondues, elles ne se coupent pas. Le système n'admet donc aucune solution.

— Si elles sont confondues, le système admet une infinité de solutions. Ce sont les coordonnées des points de cette droite.

Pour obtenir une interprétation géométrique du cas $p = 3$, on munit l'espace d'un repère orthonormé

$$\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}).$$

On rappelle qu'on point M de l'espace est déterminé de manière unique par ses coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ définies par

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2} + z\,\overrightarrow{e_3}.$$

Proposition 4.4.6

— Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Alors l'ensemble d'équation $ax + by + cz = d$ est un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b, c).

— Réciproquement, soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b, c). Alors, il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $ax + by + cz = d$ est une équation de $\mathcal{P}$.

Résoudre un système linéaire à q équations et 3 inconnues x, y et z dont chaque ligne contient un coefficient non nul revient donc à déterminer l'intersection de q plans dans l'espace. Le cas où $q = 3$ est important.

— Le plus souvent, les 3 plans s'intersectent en un unique point.

— Sinon, l'intersection des 3 plans est soit un plan, soit une droite, soit vide.

4.5 Qcm

Somme et produit

Somme

1. Parmi les suites suivantes, laquelle est une suite géométrique ?

   ☐ **a.** $a_n := \mathrm{e}^{3n}$ ☐ **b.** $b_n := (n+1)^n$ ☐ **c.** $c_n := 2^{n^2}$ ☐ **d.** $d_n := 3n$

2. Combien vaut $a + a^2 + \cdots + a^n$ lorsque a est un réel différent de 1 ?

   ☐ **a.** $\dfrac{1-a^n}{1-a}$ ☐ **b.** $\dfrac{a-a^n}{1-a}$ ☐ **c.** $\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}$ ☐ **d.** $\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

3. Soit $u_n := 2n+3$. Combien vaut $u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n}$?

   ☐ **a.** $3\,(n+1)^2$ ☐ **b.** $3n(n+1)$ ☐ **c.** $\dfrac{(n+1)(6n+9)}{2}$ ☐ **d.** $\dfrac{n(6n+9)}{2}$

4. Quel est le comportement de la suite définie par $u_0 := 1/2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} := u_n^3$?

   ☐ **a.** elle tend vers 1 en croissant ☐ **b.** elle tend vers 1 en décroissant
   ☐ **c.** elle tend vers 0 en décroissant ☐ **d.** elle diverge vers $+\infty$ en croissant

5. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle qui vérifie
   $$\frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{u_n}{n}$$
   pour tout $n \geqslant 1$. Alors

   ☐ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante ☐ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge
   ☐ **c.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$ ☐ **d.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmétique

Produit

Somme et produit doubles

Fonction polynôme

Trigonométrie

Égalité modulaire

Formules de trigonométrie

1. La valeur de $\tan(-\pi/4)$ est

   ☐ **a.** $-\sqrt{3}$ ☐ **b.** -1 ☐ **c.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ☐ **d.** 1

2. La valeur de $\tan(\pi/6)$ est

   ☐ **a.** $\sqrt{3}$ ☐ **b.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ **c.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ☐ **d.** $\dfrac{1}{3}$

3. La valeur de $\operatorname{cotan}(-7\pi/6)$ est

   ☐ **a.** $\sqrt{3}$ ☐ **b.** $-\sqrt{3}$ ☐ **c.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ☐ **d.** $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

4. La valeur de $\cos\left(\pi \sin \frac{\pi}{6}\right)$ est

   ☐ **a.** 0 ☐ **b.** $\dfrac{1}{2}$ ☐ **c.** 1 ☐ **d.** irrationnelle

5. Si $\sin x = 1/2$, alors

☐ **a.** $x \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [\pi]$ ☐ **b.** $x \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

☐ **c.** $x \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ☐ **d.** $x \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

6. Soit x un réel tel que $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2}$. Alors $\cos x$ vaut

☐ **a.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ☐ **b.** $-\dfrac{1}{3}$ ☐ **c.** $\dfrac{1}{3}$ ☐ **d.** on ne peut pas savoir

7. Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, le réel $\sin \frac{\pi}{12}$ vaut

☐ **a.** $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ☐ **b.** $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$ ☐ **c.** $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$ ☐ **d.** $\dfrac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}$

8. La linéarisation de $\cos^2 x$ est

☐ **a.** $\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ ☐ **b.** $\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ ☐ **c.** $2\cos(2x)-1$ ☐ **d.** $1-\sin^2 x$

9. Quelle est la valeur de $\cos^2 \frac{\pi}{8}$?

☐ **a.** $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ ☐ **b.** $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ ☐ **c.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ **d.** $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

Récurrence linéaire

Récurrence linéaire d'ordre 1

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle vérifiant la relation $u_{n+1} = 2u_n + 3$ pour tout n. Alors, la suite $t_n \coloneqq u_n - a$ est une suite géométrique lorsque

☐ **a.** $a = 3$ ☐ **b.** $a = -3$ ☐ **c.** $a = 2$ ☐ **d.** $a = 0$

Récurrence linéaire d'ordre 2

1. Quelle relation de récurrence est vérifiée par la suite $u_n \coloneqq 2^n + 3^n$?

☐ **a.** $u_{n+2} \coloneqq 3u_{n+1} + 2u_n$ ☐ **b.** $u_{n+2} \coloneqq 3u_{n+1} - 2u_n$

☐ **c.** $u_{n+2} \coloneqq 5u_{n+1} + 6u_n$ ☐ **d.** $u_{n+2} \coloneqq 5u_{n+1} - 6u_n$

Système linéaire

Système linéaire à q équations et p inconnues

Interprétation géométrique lorsque $p = 2$ ou $p = 3$

4.6 Exercices

Somme et produit

Somme

Exercice 1 : Sommes

Simplifier les sommes suivantes.

$$\textbf{a.}\ \sum_{k=0}^{n} k(k-1), \qquad \textbf{b.}\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1), \qquad \textbf{c.}\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^k$$

$$\textbf{d.}\ \sum_{k=0}^{n}(k+n), \qquad \textbf{e.}\ \sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{3^{2k-1}}, \qquad \textbf{f.}\ \sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

Exercice 2 : Décomposition en éléments simples

1. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{a}{3k+1} + \frac{b}{3k+4}.$$

2. En déduire

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}.$$

Exercice 3 : Sommes

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n\frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 4 : Récurrence

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$$

Exercice 5 : Somme lacunaire de coefficients binomiaux

En considérant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$ calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes

$$A_n \coloneqq \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad B_n \coloneqq \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ impair}}}\binom{n}{k}.$$

Exercice 6 : Coefficients binomiaux

Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant p$

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 7 : Coefficients binomiaux

Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Produit

Exercice 8 : Produits

Simplifier les produits suivants en les exprimant le plus possible à l'aide de puissances et de factorielles.

$$\textbf{a.}\ \prod_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)},\qquad \textbf{b.}\ \prod_{k=1}^{n}(-5)^{k^2-k},\qquad \textbf{c.}\ \prod_{k=1}^{n}\frac{4^k}{k^2}$$

$$\textbf{d.}\ \prod_{k=0}^{n}(2k+1),\qquad \textbf{e.}\ \prod_{k=1}^{n}(4k^2-1),\qquad \textbf{f.}\ \prod_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p}2^{p!k}.$$

Exercice 9 : Produit

Soit $z\in\mathbb{C}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$P_n \coloneqq \prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right).$$

Calculer $(1-z)P_n$ et en déduire une expression simple de P_n.

Exercice 10 : Majoration

1. (a) Montrer que

$$\forall k\geqslant 2,\quad 1+\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}.$$

   (b) En déduire que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\leqslant 4.$$

2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^3}\right)\leqslant 3-\frac{1}{n}.$$

Exercice 11 : Limite

1. Factoriser k^3-1 par $k-1$ et k^3+1 par $k+1$ pour tout $k\geqslant 2$.
2. En déduire, sans récurrence, que pour tout $n\geqslant 2$

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}.$$

3. En déduire la limite de la suite de terme général

$$u_n\coloneqq\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}.$$

Somme et produit doubles

Exercice 12 : Sommes

Simplifier les sommes suivantes.

$$\textbf{a.}\ \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i,\qquad \textbf{b.}\ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j,\qquad \textbf{c.}\ \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)$$

$$\textbf{d.}\ \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j},\qquad \textbf{e.}\ \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j+1},\qquad \textbf{f.}\ \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(j-i)$$

$$\textbf{g.}\ \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i^2}{j},\qquad \textbf{h.}\ \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)^2,\qquad \textbf{i.}\ \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j).$$

Exercice 13 : Avec des racines n-ièmes

Soit $n \geqslant 2$ et $z \in \mathbb{C}$. On pose $\omega := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$ et

$$S_n := \sum_{k=0}^{n-1} \left(z + \omega^k\right)^n.$$

Calculer S_n.

Exercice 14 : Somme double

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{i-j} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{(i,j) \in [\![0,n]\!]^2 \\ 0 \leqslant i+j \leqslant n}} \binom{n}{i+j}.$$

Exercice 15 : Somme de Gauss

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier impair. On pose

$$\omega := \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}} \quad \text{et} \quad S := \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}.$$

1. Écrire $|S|^2$ comme une somme double, puis montrer que
$$|S|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}.$$
2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   (a) Montrer que la fonction
$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & p & \longmapsto & \omega^{2pk+p^2} \end{array}$$
   est n-périodique.
   (b) En déduire pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ une écriture simplifiée de
$$\sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}.$$
3. Simplifier
$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2pk}$$
   pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
4. En déduire que $|S| = \sqrt{n}$.

Fonction polynôme

Exercice 16 : Polynôme à coefficients symétriques

1. Montrer que le changement de variable $u := z + 1/z$ simplifie l'équation
$$z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$$
   en une équation du second degré en u.
2. En déduire l'ensemble de ses solutions sur $\mathbb{C}$.
3. Sur le même modèle, résoudre l'équation
$$z^4 + z^3 - 10z^2 - z + 1 = 0.$$

Exercice 17 : Simplification de racine

On pose

$$a \coloneqq \sqrt[5]{\frac{5\sqrt{5}+11}{2}}, \quad b \coloneqq \sqrt[5]{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}} \quad \text{et} \quad x \coloneqq a-b.$$

On souhaite montrer que $x=1$.

1. Calculer ab.
2. En déduire que x est racine de $A(t) \coloneqq t^5+5t^3+5t-11$.
3. Montrer que 1 est la seule racine positive de A et conclure.

Exercice 18 : Inéquation

Résoudre l'inéquation

$$4x+2 \leqslant \sqrt{7x^3+15x^2+11x+3}.$$

On commencera bien entendu par donner son domaine de définition.

Exercice 19 : Coefficients binomiaux

Écrire la somme

$$\sum_{k=0}^{n}(1+z)^k$$

de deux manières différentes. En déduire

$$\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}.$$

Exercice 20 : Méthode de Cardan

Soit $a,b,c \in \mathbb{C}$ et $Q(z) \coloneqq z^3+az^2+bz+c$.

1. Pour quels $\alpha \in \mathbb{C}$ le polynôme $P(z) \coloneqq Q(z+\alpha)$ n'a-t-il pas de coefficient en z^2 ?

On choisit un tel α et on définit $p,q \in \mathbb{C}$ tels que $P(z)=z^3-3pz+2q$.

2. (a) Soit $u \in \mathbb{C}^*$. Montrer que
$$u+\frac{p}{u}$$
est racine de P si et seulement si $w \coloneqq u^3$ est racine d'un trinôme R que l'on déterminera.
   (b) On note w_1 et w_2 les racines complexes de R. Soit u_1 une racine cubique de w_1. Montrer qu'il existe une unique racine cubique u_2 de w_2 telle que $u_1u_2=p$.
   (c) Déterminer les racines de Q en fonction de α, u_1, u_2 et j.
3. Déterminer les racines des polynômes

$$z^3+3z^2+6z+2, \qquad z^3-3z-1.$$

C'est pour résoudre de telles équations, pour lesquelles P admet trois racines réelles, mais R n'en n'a pas, que Rafael Bombelli *(1526–1572) a introduit les nombres complexes.*

Exercice 21 : Méthode de Ferrari

Soit $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ et $P(z) \coloneqq z^4+az^3+bz^2+cz+d$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Q(z) \coloneqq P(z+\alpha)$ ne possède pas de terme en z^3.

Pour la suite, α désignera cette valeur. Il existe donc $p,q,r \in \mathbb{C}$ tels que $Q(z)=z^4+pz^2+qz+r$.

2. Soit $v \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad Q(z)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(z^2+\frac{v}{2}\right)^2=(v-p)\,z^2-qz+\left(\frac{v^2}{4}-r\right).$$

On pose alors $A(z) \coloneqq (v-p)\,z^2-qz+\left(v^2/4-r\right)$.

3. Montrer que A admet une racine double si et seulement si v est racine d'un polynôme B de degré 3 que l'on déterminera.

Pour la suite, on suppose que $P(z) := z^4 - 2z^3 + 3z^2 + 4zQ - 10$.

4. Montrer que B admet une racine évidente. En déduire les racines de P.

On a ainsi prouvé, dans les deux exercices précédents, que l'on pouvait calculer les racines des équations de degré 3 et 4 à l'aide de racines n-ièmes de nombres complexes. Ces résultats étaient connus dès le 16e siècle. NIELS ABEL *(1802–1829), puis* ÉVARISTE GALOIS *(1811–1832), ont démontré qu'il n'était pas possible de résoudre l'équation générale de degré 5 en utilisant des racines n-ièmes de nombres complexes.*

Exercice 22 : Principe du maximum pour les polynômes

Soit $P(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ une fonction polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n. On se donne un réel positif M tel que

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad |P(z)| \leqslant M.$$

1. On pose $\omega := \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n+1}\right)$. Calculer

$$\sum_{j=0}^{n} P\left(w^j\right).$$

2. En déduire que $|P(0)| \leqslant M$.

Trigonométrie

Égalité modulaire

Formules de trigonométrie

Exercice 23 : Inégalité

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$|\sin(nx)| \leqslant n|\sin(x)|.$$

Exercice 24 : Équations trigonométriques

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x.

a. $\cos(3x) = \sin(x)$, **b.** $\cos x + \sin x = 1 + \tan x$, **c.** $\sin x + \sin(2x) = 0$

d. $\tan(2x) = 3\tan x$, **e.** $2\sin x + \sin(3x) = 0$, **f.** $3\tan x = 2\cos x$

g. $\cos x = \sqrt{3}\sin x$, **h.** $2\cos(4x) + \sin x = \sqrt{3}\cos x$.

Exercice 25 : Équations trigonométriques

1. Résoudre les équations

$$\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x), \qquad \cos(5x) + 2\cos(3x) + 3\cos(x) = 0$$

2. Résoudre l'équation

$$\cos(x) + \sin(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

en posant (soigneusement) $t := \tan(x/2)$.

Exercice 26 : Calcul de somme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\theta}{3^{k+1}}\right).$$

Exercice 27 : Mon capitaine

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\cos(k\theta).$$

Récurrence linéaire

Récurrence linéaire d'ordre 1

Exercice 28 : Récurrences d'ordre 1

Déterminer une expression explicite des suites définies par

1. $u_0 \coloneqq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq 2u_n + 1$.
2. $u_0 \coloneqq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq 3 - \frac{u_n}{2}$.
3. $u_0 \coloneqq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq 2u_n^2$.

Récurrence linéaire d'ordre 2

Exercice 29 : Récurrences doubles

Déterminer les suites définies par

$$\textbf{a. } a_0 \coloneqq 0, \quad a_1 \coloneqq -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} \coloneqq 5a_{n+1} - 6a_n,$$
$$\textbf{b. } b_0 \coloneqq 1, \quad b_1 \coloneqq 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+2} \coloneqq -b_{n+1} - b_n,$$
$$\textbf{c. } c_0 \coloneqq 1, \quad c_1 \coloneqq -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+2} \coloneqq 4c_{n+1} - 4c_n + n.$$

Exercice 30 : Récurrence double

Déterminer une expression explicite de la suite (u_n) définie par

$$u_0 \coloneqq 1, \qquad u_1 \coloneqq 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} \coloneqq \frac{u_{n+1}^6}{u_n^5}.$$

Exercice 31 : Récurrence double avec second membre polynomial

On dira qu'une suite réelle (u_n) est solution de (E) lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n + 9n^2.$$

1. Montrer que (E) possède une solution de la forme $(an^2 + bn + c)$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression explicite de l'unique solution de (E) telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Exercice 32 : Équation fonctionnelle

Déterminer les fonctions $f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(f(x)) = 6x - f(x).$$

Système linéaire

Système linéaire à q équations et p inconnues

Exercice 33 : Résolution de systèmes linéaires

1. Résoudre les systèmes linéaires suivants

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y = 0 \\ 3x + 5y + z = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x + z = 1. \end{cases}$$

2. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x + y + z + t = a \\ x + 2y + 3z + 4t = b \\ x + 3y + 6z + 10t = c \\ x + 4y + 10z + 20t = d. \end{cases}$$

Exercice 34 : Équation fonctionnelle

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2.$$

Exercice 35 : Sytème de type Vandermonde

Soit a, b, c trois réels deux à deux distincts. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^4 \\ x + by + b^2 z = b^4 \\ x + cy + c^2 z = c^4. \end{cases}$$

Exercice 36 : Résolution de systèmes linéaires

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système
$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2. \end{cases}$$

2. Soit $m, a, b, c, \in \mathbb{R}$. Résoudre le système
$$\begin{cases} -mx + (m-1)\,y + mz = a \\ (2m-1)\,x + (m-1)\,y - mz = b \\ -2x - 4y + 2mz = c. \end{cases}$$

Exercice 37 : Système linéaire

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x + my + z - mt = m + 2 \\ mx - y - mz - t = -1. \end{cases}$$

Exercice 38 : Somme lacunaire de coefficients binomiaux

On définit A, B et C par

$$A \coloneqq \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0\,[3]}}^{n} \binom{n}{k}, \qquad B \coloneqq \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 1\,[3]}}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad C \coloneqq \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 2\,[3]}}^{n} \binom{n}{k}.$$

1. Calculer $A + B + C$, $A + \mathrm{j}B + \mathrm{j}^2 C$ et $A + \mathrm{j}^2 B + \mathrm{j}C$.
2. En déduire A.
3. Sur le même modèle, étant donnés $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in [\![0, b-1]\!]$, calculer
$$A = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv a\,[b]}}^{n} \binom{n}{k}.$$

Interprétation géométrique lorsque $p = 2$ ***ou*** $p = 3$

Chapitre 5

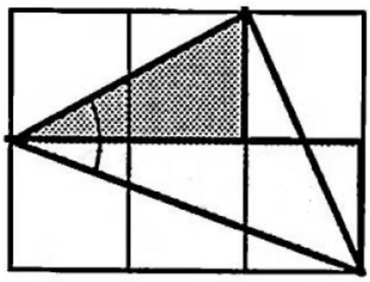
Fonctions usuelles

« En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue. »

— John Von Neumann (1903–1957)

« Le logarithme de John Napier, en réduisant leur travail, a doublé la vie des astronomes. »

— Pierre-Simon Laplace (1749–1827)



« $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$. »

— Leonhard Euler (1707–1783)

5.1 Logarithme, exponentielle, puissance

5.1.1 Logarithme népérien

Définition 5.1.1

On appelle *logarithme népérien* et on note ln l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1.

$$\begin{array}{rccl} \ln : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \end{array}$$

Remarque

⇨ Le nom ln est à la fois l'acronyme de logarithme naturel et de logarithme népérien (en hommage à John Napier, mathématicien Écossais, 1550–1617).

Proposition 5.1.2

- ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln' x = \frac{1}{x}.$$

Remarque

⇨ La fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln|x| \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 1/x$. Autrement dit, sur $\mathbb{R}^*$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|.$$

Proposition 5.1.3

$$\begin{array}{rl} & \ln 1 = 0, \\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, & \ln(xy) = \ln x + \ln y, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \ln(1/x) = -\ln x, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, & \ln x^n = n \ln x. \end{array}$$

Proposition 5.1.4

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \ln x.$$

Proposition 5.1.5

ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus

$$\ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty.$$

Exercice 1

⇨ Résoudre l'inéquation $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2$.

Proposition 5.1.6

ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 5.1.7

Il existe un unique réel, noté e et appelé *nombre de Néper*, tel que $\ln \mathrm{e} = 1$.

Proposition 5.1.8

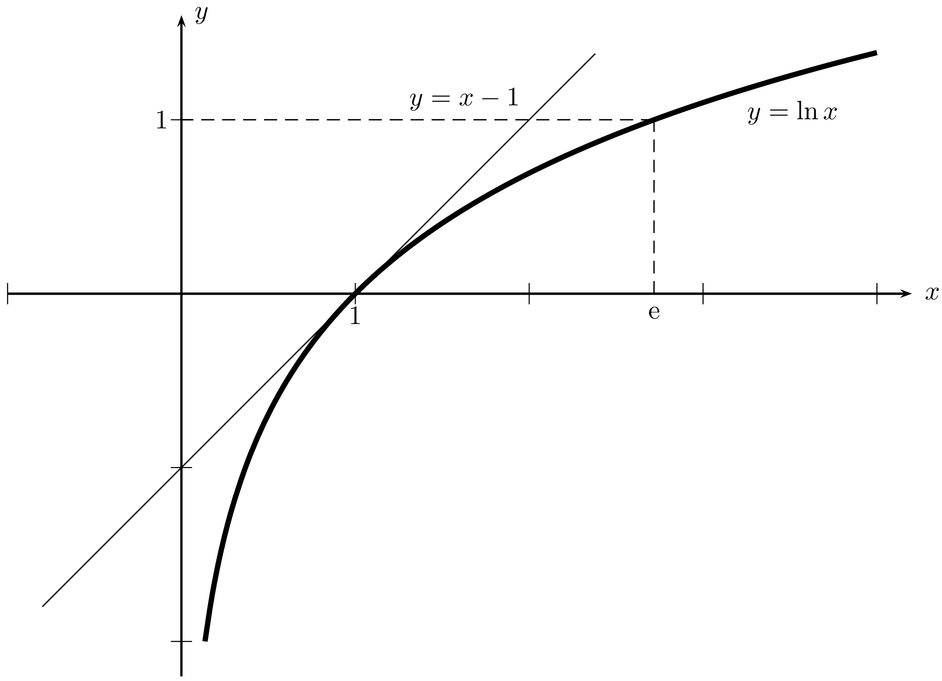
$$\forall x \in \left]-1, +\infty\right[, \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

Exercice 2

⇨ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$.

Proposition 5.1.9

$$\frac{x}{\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \qquad x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$
$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$



5.1.2 Exponentielle

Définition 5.1.10

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln x = y$; on le note $\exp y$. On définit ainsi la fonction

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ y & \longmapsto & \exp y. \end{array}$$

Remarques

⇨ Autrement dit, exp est la bijection réciproque de ln.

⇨ Par définition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp x > 0.$$

Proposition 5.1.11

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad & \ln(\exp x) = x,\\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad & \exp(\ln x) = x.\end{aligned}$$

Proposition 5.1.12

exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 5.1.13

$$\begin{aligned}\exp 0 = 1, \quad & \exp 1 = \mathrm{e},\\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad & \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y),\\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad & \exp(-x) = \frac{1}{\exp x},\\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad & \exp(nx) = (\exp x)^n .\end{aligned}$$

Proposition 5.1.14

exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\exp x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \exp x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Proposition 5.1.15

- exp est continue sur $\mathbb{R}$.
- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp' x = \exp x.$$

Proposition 5.1.16

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp x \geqslant 1 + x.$$

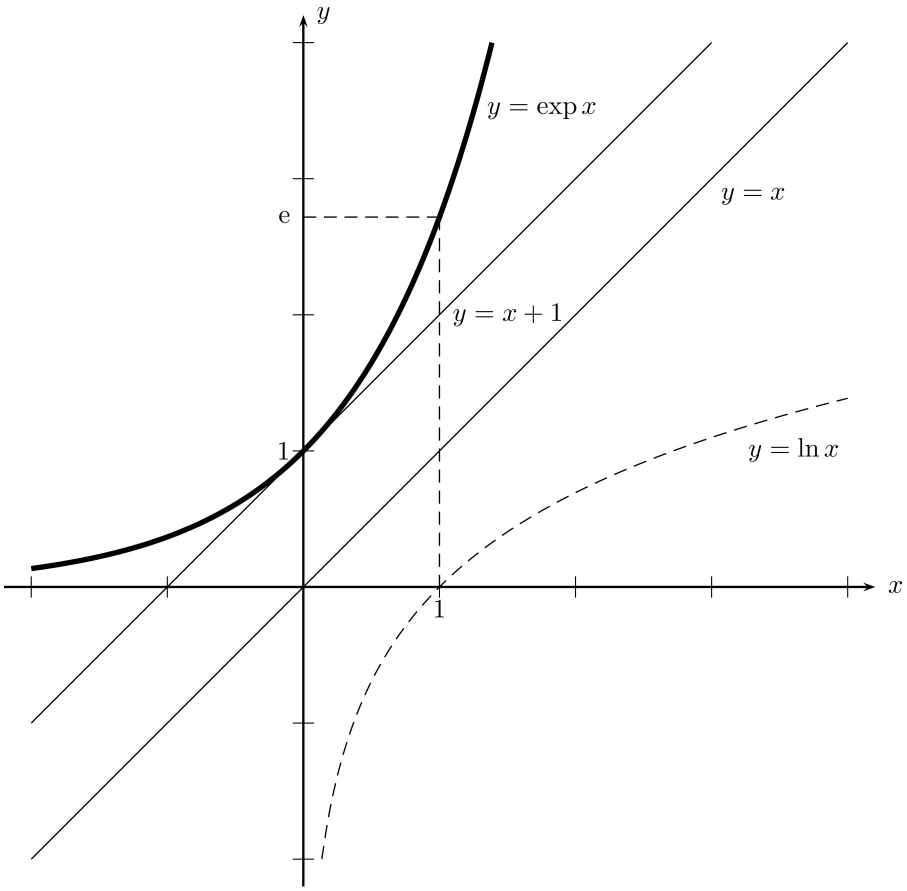
Exercices 3

⇨ Montrer que
$$\forall x < 1, \quad \exp x \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 < b\exp(-ax) - a\exp(-bx) < b - a.$$

Proposition 5.1.17

$$\frac{\exp x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \qquad x\exp x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0,$$
$$\frac{\exp(x)-1}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 1.$$



5.1.3 Logarithme et exponentielle en base a

Définition 5.1.18

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle *logarithme en base a* et on note $\log_a$ la fonction

$$\begin{array}{rccl} \log_a : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\ln x}{\ln a}. \end{array}$$

Remarque

⇨ Le logarithme népérien est le logarithme en base e. Si $a = 10$, on obtient le logarithme décimal qui est utilisé en physique (pour définir les décibels) et en chimie (pour définir le pH).

Exercice 4

⇨ Résoudre le système

$$\begin{cases} 2\log_x y + 2\log_y x = -5 \\ xy = \mathrm{e}. \end{cases}$$

Proposition 5.1.19

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Alors

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad & \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad & \log_a (1/x) = -\log_a x, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad & \log_a x^n = n \log_a x. \end{aligned}$$

Définition 5.1.20

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\log_a x = y$; on le note $\exp_a y$ et on a

$$\exp_a y = \exp(y \ln a).$$

On définit ainsi la fonction

$$\begin{array}{rccl} \exp_a : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & y & \longmapsto & \exp(y \ln a.) \end{array}$$

Remarque

⇨ Lorsque $a = \mathrm{e}$, on retrouve la fonction exponentielle.

5.1.4 Fonction puissance

Définition 5.1.21

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, on définit x^y par

$$x^y \coloneqq \exp(y \ln x).$$

Remarques

⇨ En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp x = \mathrm{e}^x$. Plus généralement, si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x.$$

On utilisera désormais cette notation pour désigner l'exponentielle ainsi que l'exponentielle en base a.

⇨ Afin de dériver une fonction de la forme $f(x) \coloneqq u(x)^{v(x)}$, il est recommandé de la mettre sous la forme

$$f(x) = \mathrm{e}^{v(x)\ln(u(x))}.$$

Exercices 5

⇨ Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x}$.

⇨ Calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^x)$.

Définition 5.1.22

Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{array}{rccl} \varphi_a : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^a. \end{array}$$

Proposition 5.1.23

$$\begin{array}{rrl} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & x^0 = 1, & \forall a \in \mathbb{R}, \quad 1^a = 1, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a, b \in \mathbb{R}, & x^{a+b} = x^a x^b, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a \in \mathbb{R}, & x^{-a} = 1/x^a, \\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a \in \mathbb{R}, & (xy)^a = x^a y^a, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a, b \in \mathbb{R}, & (x^a)^b = x^{ab}, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a \in \mathbb{R}, & \ln(x^a) = a \ln x. \end{array}$$

Proposition 5.1.24

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $\varphi_a : x \mapsto x^a$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est

- continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi_a'(x) = a x^{a-1}.$$

Proposition 5.1.25

Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$x^a \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x^a \xrightarrow[x\to 0]{} \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Remarque

⇨ Si $a > 0$, on définit 0^a en posant $0^a \coloneqq 0$. La fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^a \end{array}$$

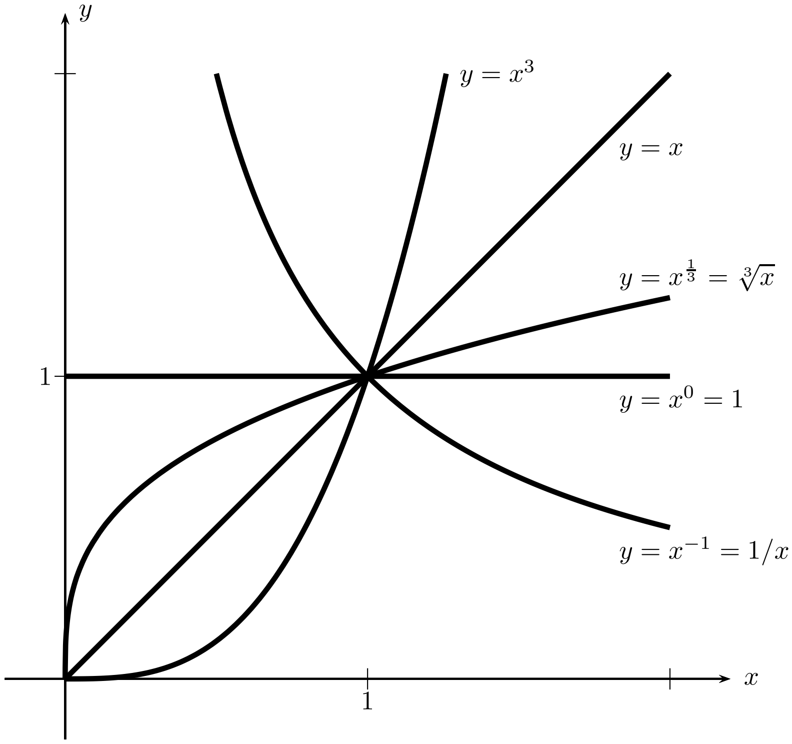
est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur

— $\mathbb{R}_+$ lorsque $a \geqslant 1$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi_a'(x) = a x^{a-1}.$$

— $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $a < 1$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi_a'(x) = a x^{a-1}.$$



Proposition 5.1.26

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \geqslant 0, \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

5.1.5 Calcul de limite

Proposition 5.1.27: Croissances comparées

Soit $\alpha, \beta > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \qquad \frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

$$x^\alpha (\ln x)^n \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Remarques

⇨ Mnémotechniquement, on dit qu'en 0 et en $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le logarithme.

⇨ La technique essentielle dans le calcul des limites est la *factorisation par le terme principal* : lorsqu'on fait face à une somme de termes qui tendent vers $\pm\infty$, il est nécessaire de factoriser par le terme qui tend « le plus vite vers l'infini ».

— Pour calculer la limite en $\pm\infty$ des polynômes, il convient de factoriser par le monôme de plus haut degré. Par exemple
$$2x^3 - x^2 + 1 = x^3\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

— Pour calculer la limite en $\pm\infty$ des fractions rationnelles, il convient de factoriser au numérateur et au dénominateur par le monôme de plus haut degré. Par exemple
$$\frac{x^2+2x-3}{2x^2-1} = \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{2-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

— Pour calculer la limite en $\pm\infty$ des fractions rationnelles en x et en e^x, il convient d'utiliser les croissances comparées en se rappelant que l'exponentielle l'emporte sur les puissances en $-\infty$ et en $+\infty$. Par exemple
$$e^x - x^5 = e^x\left(1 - \frac{x^5}{e^x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \qquad \frac{e^{2x}-2xe^x}{x^3+3e^{2x}} = \frac{1-2\frac{x}{e^x}}{3+\frac{x^3}{e^{2x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{3}.$$

— Pour calculer la limite en $+\infty$ ou en 0 des fractions rationnelles en $\ln x, x$ et e^x, il convient d'utiliser les croissances comparées en se rappelant que l'exponentielle l'emporte sur les puissances qui l'emportent sur le logarithme que ce soit en $+\infty$ ou en 0.

⇨ Une autre technique importante est la technique du *changement de variable.* Elle se base sur le théorème de composition des limites. Le principe en est le suivant. Étant donné une fonction f définie au voisinage de a, on cherche deux fonctions g et $\bar{u}$ telles que sur ce voisinage
$$f(x) = g(\bar{u}(x)).$$
Si on connait la limite l de $\bar{u}(x)$ lorsque x tend vers a et la limite l' de $g(u)$ lorsque u tend vers l, alors le théorème de composition des limites permet de conclure que $f(x)$ tend vers l' lorsque x tend vers a.

Exercices 6

⇨ Calculer la limite de
$$\frac{e^x \ln x - x^{1000} + e^{2x}}{e^{2x} + \ln x + x} \quad \text{en } +\infty.$$

⇨ Calculer les limites suivantes
$$\frac{(\ln x)^2}{e^x} \quad \text{en } +\infty, \qquad \frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{en } 0, \qquad \frac{e^{e^x}}{x^2} \quad \text{en } +\infty, \qquad |\ln x|^x \quad \text{en } 0\ .$$

5.2 Fonctions trigonométriques directes et réciproques

5.2.1 Fonctions trigonométriques directes

Proposition 5.2.1

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 1.$$

Proposition 5.2.2

Les fonctions sin, cos et tan sont dérivables une infinité de fois sur leur ensemble de définition et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin^{(n)} x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n)} x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \qquad \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Proposition 5.2.3

On a

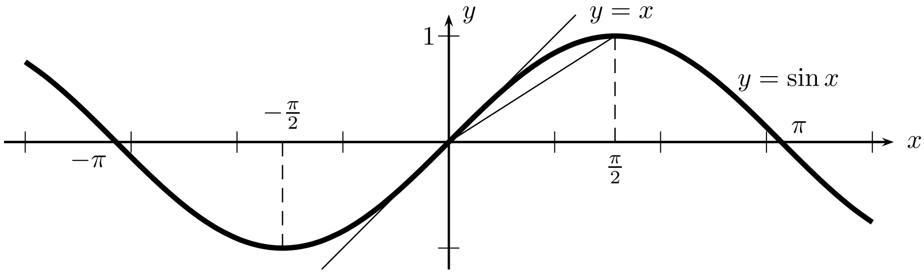
$$\forall x \geqslant 0, \qquad \sin x \leqslant x,$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\sin x| \leqslant |x|\,.$$

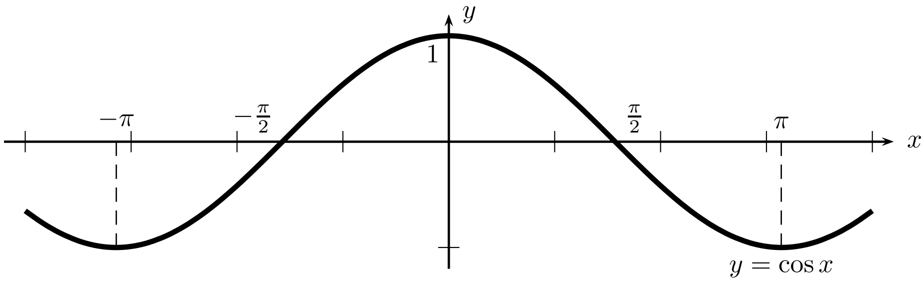
Exercices 7

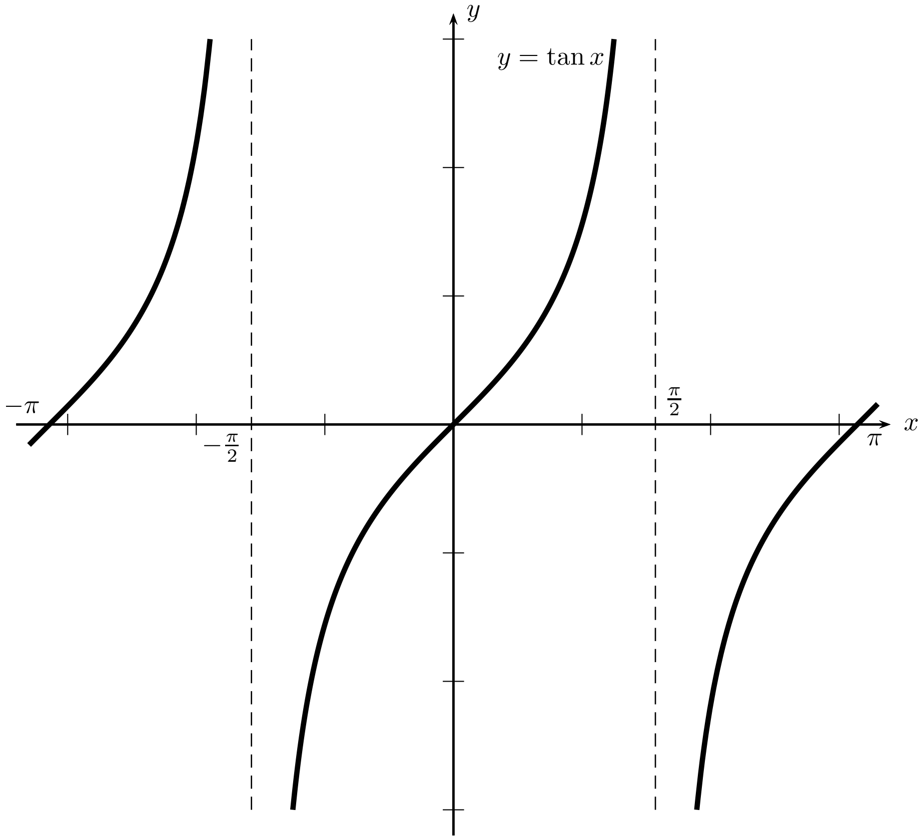
⇨ Montrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x.$$

⇨ Calculer la dérivée n-ième de la fonction d'expression $\sin^3 x$.







5.2.2 Fonction Arcsin

Définition 5.2.4

Pour tout $y \in [-1,1]$, il existe un unique $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin x = y$; on le note $\operatorname{Arcsin} y$. On définit ainsi la fonction

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{Arcsin}: & [-1,1] & \longrightarrow & [-\pi/2,\pi/2] \\ & y & \longmapsto & \operatorname{Arcsin} y. \end{array}$$

Remarque

⇨ Autrement dit, sin réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1,1]$ et Arcsin est sa bijection réciproque.

Proposition 5.2.5

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1,1], &\qquad \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x, \\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], &\qquad \operatorname{Arcsin}(\sin x) = x. \end{aligned}$$

Exercice 8

⇨ Calculer

$$\operatorname{Arcsin}(1), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{\pi}{7}\right), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{5\pi}{7}\right), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\cos\frac{\pi}{5}\right).$$

Proposition 5.2.6

Arcsin réalise une bijection de $[-1,1]$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$.

Proposition 5.2.7

- Arcsin est strictement croissante sur $[-1,1]$.
- Arcsin est impaire.

Exercice 9

⇨ On pose

$$x := \operatorname{Arcsin}\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Calculer $\cos(4x)$ puis en déduire x.

Proposition 5.2.8

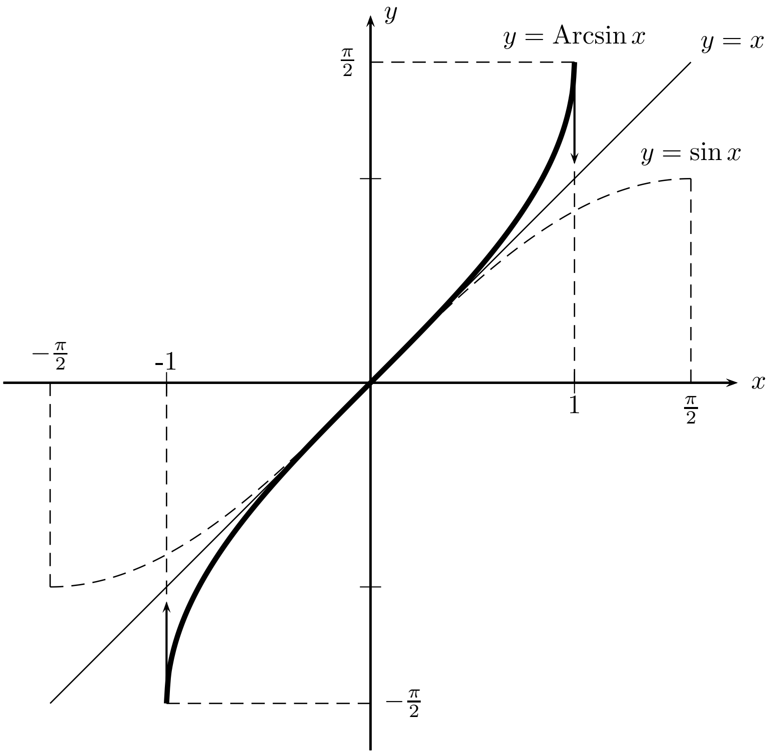
- Arcsin est continue sur $[-1,1]$.
- Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 10

⇨ Montrer que

$$\forall x \in [0,1[, \quad x \leqslant \operatorname{Arcsin} x \leqslant \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$



5.2.3 Fonction Arccos

Définition 5.2.9

Pour tout $y \in [-1,1]$, il existe un unique $x \in [0,\pi]$ tel que $\cos x = y$; on le note $\operatorname{Arccos} y$. On définit ainsi la fonction

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{Arccos} : & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & y & \longmapsto & \operatorname{Arccos} y. \end{array}$$

Remarque

⇨ Autrement dit, cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$ et Arccos est sa bijection réciproque.

Proposition 5.2.10

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1,1], &\qquad \cos(\operatorname{Arccos} x) = x, \\ \forall x \in [0,\pi], &\qquad \operatorname{Arccos}(\cos x) = x. \end{aligned}$$

Exercices 11

⇨ Calculer

$$\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right).$$

⇨ Simplifier $\operatorname{Arccos}(\cos x) - \frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\cos(2x))$ pour tout $x \in [0,2\pi]$.

⇨ Calculer $\cos(3\operatorname{Arccos} x)$.

Proposition 5.2.11

Arccos réalise une bijection de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$.

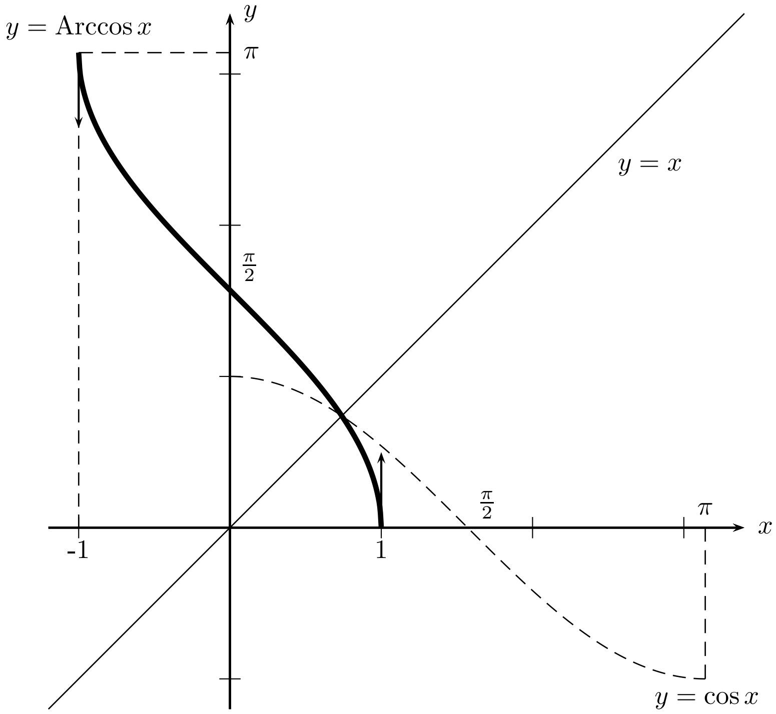
Proposition 5.2.12

Arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$.

Proposition 5.2.13

— Arccos est continue sur $[-1, 1]$.
— Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arccos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



5.2.4 Fonction Arctan

Définition 5.2.14

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $\tan x = y$; on le note $\operatorname{Arctan} y$. On définit ainsi la fonction

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{Arctan} : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\pi/2, \pi/2[\\ & y & \longmapsto & \operatorname{Arctan} y. \end{array}$$

Remarque

⇨ Autrement dit, tan réalise une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ et Arctan est sa bijection réciproque.

Proposition 5.2.15

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \tan(\operatorname{Arctan} x) = x, \\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad & \operatorname{Arctan}(\tan x) = x. \end{aligned}$$

Exercices 12

⇨ Calculer $\operatorname{Arctan}\left(\tan \frac{1789\pi}{45}\right)$.

⇨ Le langage de programmation Shadok dispose de la fonction Arctan mais pas de la fonction Arcsin. Exprimez cette dernière à partir de la fonction Arctan.

Proposition 5.2.16

Arctan réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

Proposition 5.2.17

- Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$$\operatorname{Arctan} x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctan} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

- Arctan est impaire.

Exercice 13

⇨ Résoudre l'équation $\operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$.

Remarque

⇨ On a

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

Cette formule est utile pour calculer des approximations de π. En effet, nous développerons des techniques pour calculer des valeurs approchées de $\operatorname{Arctan} x$, qui seront d'autant plus efficaces que x est proche de 0.

Proposition 5.2.18

- Arctan est continue sur $\mathbb{R}$.
- Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Exercice 14

⇨ Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\operatorname{Arctan} x \leqslant x$.

Remarque

⇨ Le calcul de primitive de la forme

$$\int \frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x$$

où $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x^2 + \alpha x + \beta$ n'a pas de racine réelle se fait de la manière suivante.

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x &= \frac{a}{2}\int \frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x + \left(b - \frac{a\alpha}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+\beta} \\ &= \frac{a}{2}\ln\left(x^2+\alpha x+\beta\right) + \frac{2b-a\alpha}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+\beta}\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de mettre le trinôme (qui rappelons-le n'a pas de racine réelle) sous forme canonique

$$x^2+\alpha x+\beta = \left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \underbrace{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}_{:=\gamma^2>0} = \gamma^2\left[\left(\frac{2x+\alpha}{2\gamma}\right)^2+1\right]$$

puis de poser $u := (2x+\alpha)/(2\gamma)$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+\beta} &= \frac{1}{\gamma^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{2x+\alpha}{2\gamma}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\gamma}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{\gamma}\operatorname{Arctan} u \\ &= \frac{1}{\gamma}\operatorname{Arctan}\frac{2x+\alpha}{2\gamma}.\end{aligned}$$

En conclusion

$$\int \frac{bx+c}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\ln\left(x^2+\alpha x+\beta\right) + \frac{2b-a\alpha}{2\gamma}\operatorname{Arctan}\frac{2x+\alpha}{2\gamma}.$$

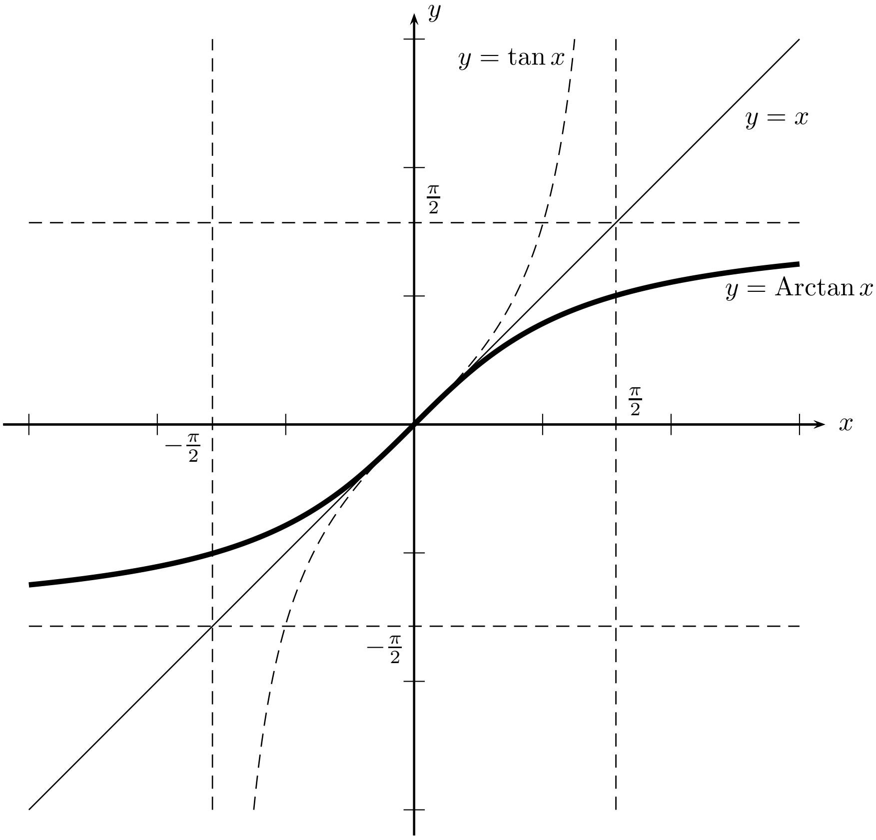
Exercice 15

⇨ Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}.$$

Utiliser ce résultat pour calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3 - 1}.$$



5.2.5 Formules de trigonométrie réciproque

Proposition 5.2.19

$$\forall x \in [-1, 1]\,, \qquad \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2},$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 16

⇨ Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \qquad \frac{x}{1 + x^2} \leqslant \operatorname{Arctan} x \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1 + x^2}.$$

5.3 Fonctions trigonométriques hyperboliques

Définition 5.3.1

On définit les fonctions sh et ch sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Exercice 17

⇨ Résoudre l'équation $7 \operatorname{ch} x + 2 \operatorname{sh} x = 9$.

Proposition 5.3.2

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, &\qquad \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^x, \\ \forall x \in \mathbb{R}, &\qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \end{aligned}$$

Proposition 5.3.3

ch est sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x.$$

Proposition 5.3.4

- ch est paire et sh est impaire.
- On a

$$\operatorname{ch} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty,$$
$$\operatorname{sh} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty.$$

Exercice 18

⇨ Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ de fonctions, respectivement paire et impaire, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a(x) + b(x).$$

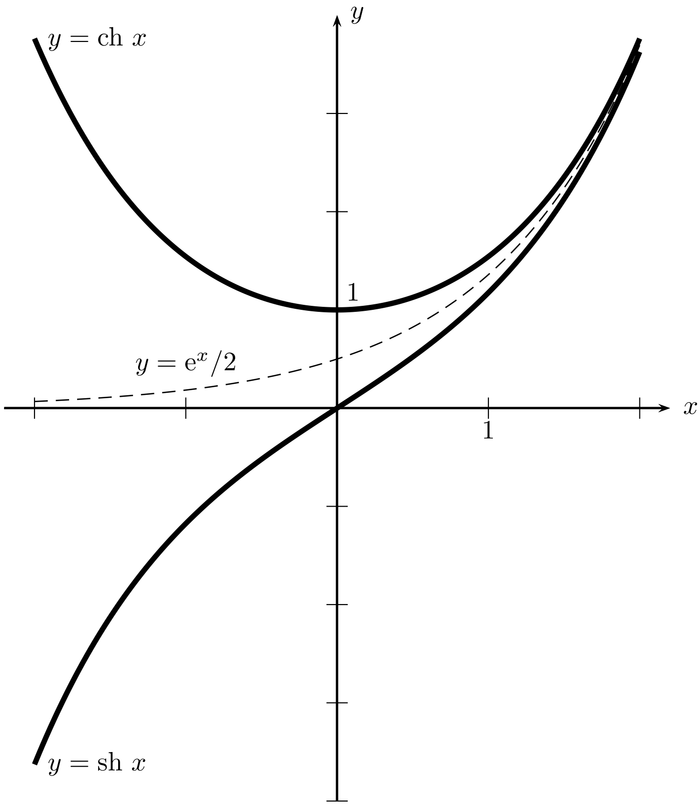
On dit que a est la *partie paire* de f et que b est sa *partie impaire*. En particulier, ch est la partie paire de l'exponentielle et sh est sa partie impaire.

Proposition 5.3.5

- ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x \geqslant 1$.
- sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\operatorname{sh} x = 0 \iff x = 0] \quad \text{et} \quad [\operatorname{sh} x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0]$.

Proposition 5.3.6

- sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.



Remarque

⇨ Le graphe de la fonction ch est obtenu en laissant pendre une chaine entre deux points. C'est pourquoi, le graphe de cette fonction est aussi appelé « chainette ».

Exercice 19

⇨ On appelle Argsh la bijection réciproque de sh. Donner une expression de $\operatorname{Argsh} x$ à l'aide des fonctions usuelles.

Définition 5.3.7

On définit la fonction th sur $\mathbb{R}$

$$\mathrm{th}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}. \end{array}$$

Proposition 5.3.8

th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}' x = 1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}.$$

En particulier th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

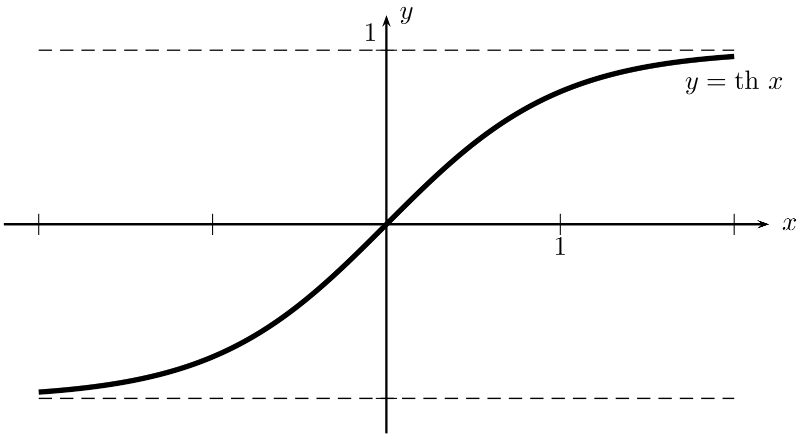
Proposition 5.3.9

- th est impaire.
- On a

$$\mathrm{th}\, x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{th}\, x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1.$$

Proposition 5.3.10

th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$.



Remarque

⇨ Les substitutions

$$\begin{array}{ccc} \cos x & \to & \operatorname{ch} x \\ \sin x & \to & \mathrm{i} \operatorname{sh} x \end{array}$$

et donc $\tan x \to \mathrm{i} \operatorname{th} x$ transforment toute formule de trigonométrie circulaire en une formule de trigonométrie hyperbolique.

Exercice 20

⇨ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$S_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(kx).$$

On pourra multiplier S_n par $\operatorname{sh}(x/2)$ et utiliser des formules de trigonométrie hyperbolique.

5.4 Qcm

Logarithme, exponentielle, puissance

Logarithme népérien

1. Quel est le domaine de définition de $f : x \mapsto \ln(1-\sqrt{x})$?

   ☐ **a.** $[0,+\infty[$ ☐ **b.** $]-\infty,1]$ ☐ **c.** $[0,1[$ ☐ **d.** $]0,1]$

2. Le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln(\ln|x|)$ est

   ☐ **a.** $\mathbb{R}^*$ ☐ **b.** $]0,+\infty[$ ☐ **c.** $]1,+\infty[$ ☐ **d.** $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

Exponentielle

1. Quelle fonction vérifie $f(x+y)=f(x)f(y)$ pour tous x et y dans son domaine de définition ?

   ☐ **a.** $f(x)=\ln(2x)$ ☐ **b.** $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln x$ ☐ **c.** $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$ ☐ **d.** $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$

Logarithme et exponentielle en base a

1. Soit a dans $]0,1[$. L'équation $a^x=b$ admet

   ☐ **a.** 0 ou 1 solution, selon b ☐ **b.** 1 solution pour tout b
   ☐ **c.** 1 ou 2 solutions, selon b ☐ **d.** 0, 1 ou 2 solutions, selon b

Fonction puissance

1. Si a et b sont des réels strictement positifs, $a^{\ln b}$ est égal à

   ☐ **a.** $\mathrm{e}^{\ln(ab)}$ ☐ **b.** $b^{\ln a}$ ☐ **c.** $\ln\left(a^b\right)$ ☐ **d.** $(\ln a)^b$

2. Soit a,b,c trois réels >0. Alors $a^{(b^c)}$

   ☐ **a.** vaut a^{bc} ☐ **b.** vaut c^{ab} ☐ **c.** vaut $a^{\left(c^b\right)}$ ☐ **d.** ne se simplifie pas

3. Si x est un nombre réel, $\sqrt[3]{x^2}$ est égal à

   ☐ **a.** $x^{\frac{3}{2}}$ ☐ **b.** $|x|^{\frac{3}{2}}$ ☐ **c.** $x^{\frac{2}{3}}$ ☐ **d.** $|x|^{\frac{2}{3}}$

4. Pour $x>1$, l'expression $x^{\ln(\ln x)/\ln x}$ se simplifie en

   ☐ **a.** $\ln x$ ☐ **b.** $\ln(\ln x)$ ☐ **c.** $x^{\ln x}$ ☐ **d.** x

5. Si a est strictement positif, $f : x \mapsto \frac{\ln(x^a)}{\ln x}$ tend, lorsque x tend vers $+\infty$, vers

   ☐ **a.** a ☐ **b.** $+\infty$ ☐ **c.** x^{a-1} ☐ **d.** $\ln a$

6. La fonction puissance $x \mapsto x^a$ est croissante sur $]0,+\infty[$ si et seulement si

   ☐ **a.** $a \geqslant 0$ ☐ **b.** $a>0$ ☐ **c.** $a \geqslant 1$ ☐ **d.** $a>1$

Calcul de limite

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^a}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ pour

   ☐ **a.** $a>0$ ☐ **b.** $a \geqslant 0$ ☐ **c.** $a>1$ ☐ **d.** tout réel a

Fonctions trigonométriques directes et réciproques

Fonctions trigonométriques directes

1. En 0, la fonction $x \mapsto \frac{x}{\sin x}$ tend vers

   ☐ **a.** 0 ☐ **b.** 1 ☐ **c.** $\dfrac{1}{\cos x}$ ☐ **d.** $+\infty$

2. Pour tout x dans l'intervalle $]0,\pi/2[$, on a

   ☐ **a.** $\sin x<\tan x<x$ ☐ **b.** $\sin x<x<\tan x$ ☐ **c.** $x<\sin x<\tan x$ ☐ **d.** $\tan x<\sin x<x$

Fonction Arcsin

1. Lorsque $x \in [0, \pi/2]$, $\operatorname{Arcsin}(\cos x)$ vaut

☐ **a.** $\sqrt{1-x^2}$ ☐ **b.** $x - \dfrac{\pi}{2}$ ☐ **c.** $\dfrac{\pi}{2} - x$ ☐ **d.** $\dfrac{\pi}{2} + x$

Fonction Arccos

1. Quels sont les réels x pour lesquels $\operatorname{Arccos}(\cos x) = x$?

☐ **a.** tous les réels ☐ **b.** les réels de $[-1, 1]$ ☐ **c.** les réels de $[0, \pi]$ ☐ **d.** les réels de $[-\pi/2, \pi/2]$

Fonction Arctan

1. Laquelle des fonctions suivantes n'est pas définie sur $\mathbb{R}$?

☐ **a.** $x \mapsto \sin(\operatorname{Arcsin} x)$ ☐ **b.** $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x)$ ☐ **c.** $x \mapsto \tan(\operatorname{Arctan} x)$ ☐ **d.** $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\cos x)$

2. Quelle droite est asymptote au graphe de la fonction Arctan

☐ **a.** $y = x$ ☐ **b.** $y = -x$ ☐ **c.** $y = \dfrac{\pi}{2}$ ☐ **d.** $y = \tan x$

Formules de trigonométrie réciproque

Fonctions trigonométriques hyperboliques

1. Pour tout réel x, $\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$ se simplifie en

☐ **a.** $\operatorname{sh} x$ ☐ **b.** $\operatorname{ch} x - 1$ ☐ **c.** $|\operatorname{sh} x|$ ☐ **d.** $|\operatorname{ch} x - 1|$

2. Laquelle des fonctions suivantes n'est pas croissante sur son intervalle de définition ?

☐ **a.** Arcsin ☐ **b.** Arccos ☐ **c.** Arctan ☐ **d.** sh

3. Laquelle des fonctions suivantes n'est pas croissante sur $]0, +\infty[$?

☐ **a.** $x \mapsto (\sqrt{2})^x$ ☐ **b.** $x \mapsto -2^{\frac{1}{x}}$ ☐ **c.** $x \mapsto \ln(\operatorname{sh} x)$ ☐ **d.** $x \mapsto \left(\tan\dfrac{\pi}{8}\right)^x$

4. L'équation $\operatorname{ch} x = a$ admet exactement deux solutions pour

☐ **a.** tout $a \in \mathbb{R}$ ☐ **b.** $a > 0$ ☐ **c.** $a \geqslant 1$ ☐ **d.** $a > 1$

5. La limite de la fonction th en $+\infty$ est

☐ **a.** -1 ☐ **b.** 0 ☐ **c.** 1 ☐ **d.** $+\infty$

6. La dérivée de la fonction th est

☐ **a.** $1 - \operatorname{th}^2$ ☐ **b.** $1 + \operatorname{th}^2$ ☐ **c.** th^2 ☐ **d.** $\operatorname{th}^2 - 1$

7. Laquelle des fonctions suivantes ne tend pas vers 0 en $+\infty$?

☐ **a.** $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x}$ ☐ **b.** $x \mapsto \dfrac{x^2}{\operatorname{sh} x}$ ☐ **c.** $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh} x}{\mathrm{e}^x}$ ☐ **d.** $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

5.5 Exercices

Logarithme, exponentielle, puissance

Logarithme népérien

Exercice 1 : Équations, inéquations, inégalités

Montrer que pour tout $x \in \left]-1,1\right[\setminus \{0\}$, on a

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant -\frac{\ln(1-|x|)}{|x|}.$$

Exercice 2 : Études de variations

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0, \quad f(x) := \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}.$$

Étudier la monotonie de f.

2. (a) Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

(b) En déduire la limite de la suite de terme général

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Exponentielle

Logarithme et exponentielle en base a

Exercice 3 : Équations, inéquations, inégalités

1. Résoudre, avec $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$$\log_a x > \log_{a^3}(3x-2).$$

2. Résoudre

$$\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{50}{7} \\ xy = 256. \end{cases}$$

Fonction puissance

Calcul de limite

Exercice 4 : Calcul de limite en $\pm\infty$

Déterminer les limites, si elles existent, en $+\infty$ des fonctions d'expressions

$$\textbf{a. } \sqrt{x+1} - \sqrt{x}, \qquad \textbf{b. } \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x}, \qquad \textbf{c. } \frac{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x},$$

$$\textbf{d. } \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}, \qquad \textbf{e. } \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}, \qquad \textbf{f. } \frac{e^{2x} \ln^3 x}{x^4},$$

$$\textbf{g. } \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}} \text{ où } 1 < a < b, \qquad \textbf{h. } \frac{a^{(a^x)}}{x^{(x^a)}} \text{ où } a > 1.$$

Déterminer la limite, si elle existe, en $-\infty$ de

$$\textbf{i. } x^2 e^x \ln^3(-x).$$

Exercice 5 : Calcul de limite en 0

Déterminer les limites, si elles existent, en 0 des fonctions d'expressions

$$\textbf{a. } \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, \qquad \textbf{b. } x^x, \qquad \textbf{c. } |\ln x|^x,$$

$$\textbf{d. } x^2 \ln^3(x^3), \qquad \textbf{e. } \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}.$$

Fonctions trigonométriques directes et réciproques

Fonctions trigonométriques directes

Exercice 6 : Calcul de limite en 0

Déterminer les limites, si elles existent, en 0 des fonctions d'expressions

$$\textbf{a.}\ \frac{\ln(1+\sin x)}{x}, \qquad \textbf{b.}\ (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}, \qquad \textbf{c.}\ \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}.$$

Fonction Arcsin

Exercice 7 : Identité

Soit f la fonction définie par

$$f(x) := -\frac{x}{2} + \operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Exprimer $f(x+2\pi)$ à l'aide de $f(x)$. Quelle conséquence peut-on en déduire sur le graphe de f ?
3. (a) Calculer la dérivée de f à l'aide des théorèmes usuels.
   (b) Montrer que f' est constante par morceaux, puis simplifier $f(x)$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
4. Retrouver ce résultat directement, sans dériver.
5. Tracer le graphe de f.

Fonction Arccos

Exercice 8 : Étude de fonction

On considère la fonction f définie par

$$f(x) := \operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} - \operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et de continuité de f.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ en fonction de $f(x)$. Sur quel intervalle I suffit-il de faire l'étude de f ?
3. Étudier la dérivabilité de f sur I et calculer f'.
4. Tracer le graphe de f sur $[-\pi, \pi]$.

Fonction Arctan

Exercice 9 : Simplification

Simplifier les expressions suivantes

$$\textbf{a.}\ \operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right), \qquad \textbf{b.}\ \operatorname{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

$$\textbf{c.}\ \operatorname{Arccos}(\cos 4\pi), \qquad \textbf{d.}\ \operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\textbf{e.}\ \tan(\operatorname{Arcsin} x), \qquad \textbf{f.}\ \sin(\operatorname{Arccos} x), \qquad \textbf{g.}\ \cos(\operatorname{Arctan} x).$$

Exercice 10 : Étude de fonction

Étudier la fonction définie par

$$f(x) := x^2 \operatorname{Arctan}\frac{1}{1+x^2}.$$

Formules de trigonométrie réciproque

Exercice 11 : Identités

A-t-on égalité entre les expressions suivantes ?

$$\textbf{a.}\ \operatorname{Arcsin}\sqrt{x} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1),$$

$$\textbf{b.}\ \operatorname{Arctan}\frac{x+y}{1-xy} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctan}x+\operatorname{Arctan}y,$$

$$\textbf{c.}\ \operatorname{Arcsin}x+\operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2},$$

$$\textbf{d.}\ 2\operatorname{Arcsin}x \quad \text{et} \quad \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

Exercice 12 : Équations

Résoudre les équations suivantes

$$\textbf{a.}\ \operatorname{Arctan}x=\operatorname{Arcsin}\frac{2x}{1+x^2}, \qquad \textbf{b.}\ \operatorname{Arctan}x+\operatorname{Arctan}(2x)=\frac{\pi}{4},$$

$$\textbf{c.}\ \operatorname{Arcsin}(2x)=\operatorname{Arcsin}x+\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{2}x\right).$$

Fonctions trigonométriques hyperboliques

Exercice 13 : Simplification

Simplifier les expressions suivantes

$$\textbf{a.}\ \frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x}, \qquad \textbf{b.}\ \operatorname{sh}^2 x\cos^2 y+\operatorname{ch}^2 x\sin^2 y,$$

$$\textbf{c.}\ \ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{th}x}{1-\operatorname{th}x}}.$$

Exercice 14 : Identité

Montrer que

$$\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x)-\operatorname{Arctan}\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)$$

est une constante à déterminer.

Exercice 15 : Calcul de somme

Soit a et b deux réels. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(a+kb).$$

Exercice 16 : Produit

1. Déterminer la limite, lorsque x tend vers 0, de
$$\frac{\operatorname{th}x}{x}.$$
2. Montrer que
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \operatorname{th}(2x)=\frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2 x}.$$
3. En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\operatorname{th}^2\frac{x}{2^k}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{x}{\operatorname{th}x}.$$

Exercice 17 : Équation hyperbolique

1. Calculer
$$\operatorname{sh}\left(\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}\left(\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$
2. En déduire les solutions de l'équation $\operatorname{ch} x - \sqrt{5}\operatorname{sh} x = 2\operatorname{sh}(3x)$.

Chapitre 6

Équations différentielles

« J'entends et j'oublie. Je vois et je me souviens. Je fais et je comprends. »

— Confucius (551–479 AV J.C.)

« Les calculs sont pas bons, Kevin ! »

— Inès Reg (2019)

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1 Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition 6.1.1

Soit $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I. On appelle solution sur I de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $ay' + by = c$, toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$, dérivable sur I, telle que

$$\forall t \in I, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t).$$

On dit que l'équation est *résolue* lorsque a ne s'annule pas et qu'elle est *homogène* lorsque la fonction c est nulle.

Remarque

⇨ Lorsque l'équation est résolue, on peut l'écrire sous la forme

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = F(y(t), t)$$

où F est une fonction de $\mathbb{K} \times I$ dans $\mathbb{K}$.

6.1.1 Équation différentielle homogène

Proposition 6.1.2

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. Si A est une primitive de a sur I, les solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

sont les fonctions

$$y_\lambda : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{-A(t)} \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarques

- Dans cette démonstration, le terme $e^{A(t)}$ par lequel on multiplie l'équation différentielle afin de faire apparaître la dérivée d'un produit est appelé *facteur intégrant*.
- Si y est une solution non nulle de l'équation différentielle homogène $y'(t) + a(t)y(t) = 0$, elle ne s'annule pas.

Exercices 1

- Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) + ay(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
- Résoudre l'équation différentielle $(1 + t^2)y'(t) + ty(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x)f(y).$$

6.1.2 Équation différentielle avec second membre

Proposition 6.1.3: Théorème de superposition

Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions définies sur un intervalle I. Si y_p est une solution « particulière » de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

alors, les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $y_p + y$ où y parcourt l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0.$$

Remarques

- Soit a et $b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues. On souhaite trouver une solution particulière à l'équation différentielle

$$(E) \qquad \forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

La section précédente nous a permis de trouver une solution y_0 non nulle à l'équation différentielle homogène associée $y'(t) + a(t)y(t) = 0$. De plus, nous avons vu qu'une telle fonction ne s'annule pas. On va chercher une solution de (E) sous la forme $y(t) := \lambda(t)y_0(t)$ où $\lambda : I \to \mathbb{K}$ est une fonction dérivable. On se donne donc une fonction dérivable $\lambda : I \to \mathbb{K}$ et on pose $y := \lambda y_0$. Alors y est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = \lambda'(t)y_0(t) + \lambda(t)y_0'(t).$$

En injectant cette expression dans (E), on en déduit que y est solution de (E) si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad \lambda'(t) = \frac{b(t)}{y_0(t)}.$$

En particulier, si λ est une primitive de b/y_0, y est une solution « particulière » de (E). Remarquons que, puisque y_0 ne s'annule pas, toute fonction dérivable $y : I \to \mathbb{K}$ s'écrit sous la forme $y = \lambda y_0$ où $\lambda : I \to \mathbb{K}$ est une fonction dérivable. Cette méthode permet donc de trouver toutes les solutions de (E).

- La méthode précédente, appelée « *méthode de la variation de la constante* », se généralise à toute équation différentielle *linéaire*. Si y_0 est une solution ne s'annulant pas de l'équation différentielle homogène associée, le changement de fonction $y = \lambda y_0$ permet de ramener la résolution de l'équation différentielle initiale à la résolution d'une équation différentielle linéaire en λ' d'ordre strictement inférieur.

⇨ Remarquons enfin que la technique consistant à multiplier l'équation différentielle par le facteur intégrant permet de résoudre les équations différentielles avec second membre de la même manière que les équations différentielles homogènes.

Exercices 2

⇨ Résoudre l'équation différentielle

$$\forall t > 0, \quad y'(t) - \frac{y(t)}{t} = te^t.$$

⇨ Résoudre l'équation différentielle $(t^2 \ln t)y'(t) - ty(t) = -(1 + \ln t)$ sur $]0, 1[$.

6.1.3 Problème de Cauchy

Définition 6.1.4: Problème de Cauchy

Soit $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. On appelle *problème de Cauchy* la recherche des solutions y de l'équation différentielle du premier ordre

$$\forall t \in I, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

telles que $y(t_0) = y_0$.

Remarque

⇨ La condition $y(t_0) = y_0$ est appelée *condition initiale*.

Théorème 6.1.5: Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur un intervalle I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors, il existe une et une seule solution à l'équation différentielle résolue du premier ordre

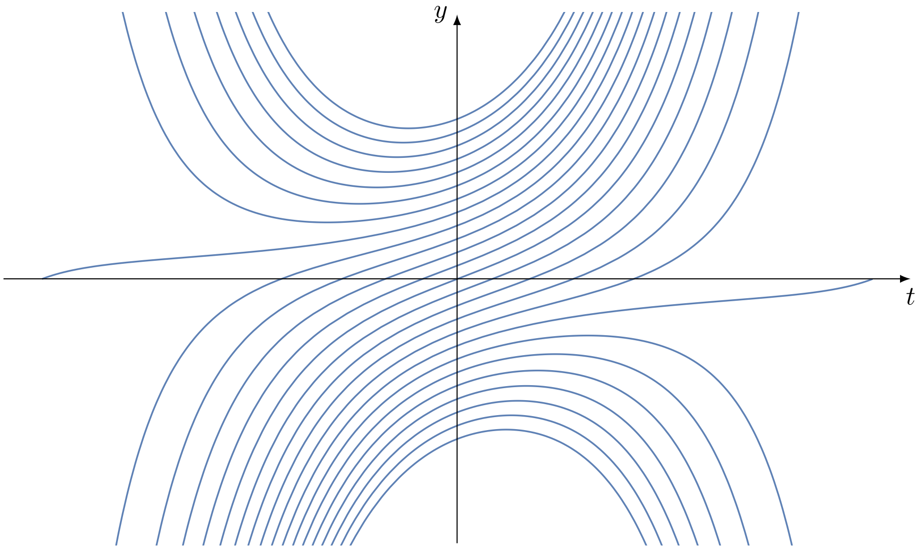
$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

telle que $y(t_0) = y_0$.

Remarques

⇨ Graphiquement, cette proposition signifie que par tout point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ passe un et un seul graphe (appelé courbe intégrale) de solution de l'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$. En particulier, les courbes intégrales ne se croisent pas. Par exemple, voici quelques solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = ty(t) + 1.$$



⇨ Le théorème de Cauchy-Lipschitz prouve que la connaissance à l'instant t_0 d'un système régi par une équation différentielle résolue du premier ordre permet de connaitre complètement son passé et son futur.

Exercices 3

⇨ Résoudre sur $]0, +\infty[$ le problème de Cauchy

$$y(1) = 1 \quad \text{et} \quad y'(t) + \frac{y(t)}{t} = t.$$

Tracer le graphe de la solution.

⇨ Montrer que les solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + t\,\mathrm{Arctan}(t^4 + 1)y(t) = \operatorname{sh} t$$

sont toutes paires.

6.1.4 Équation différentielle non résolue

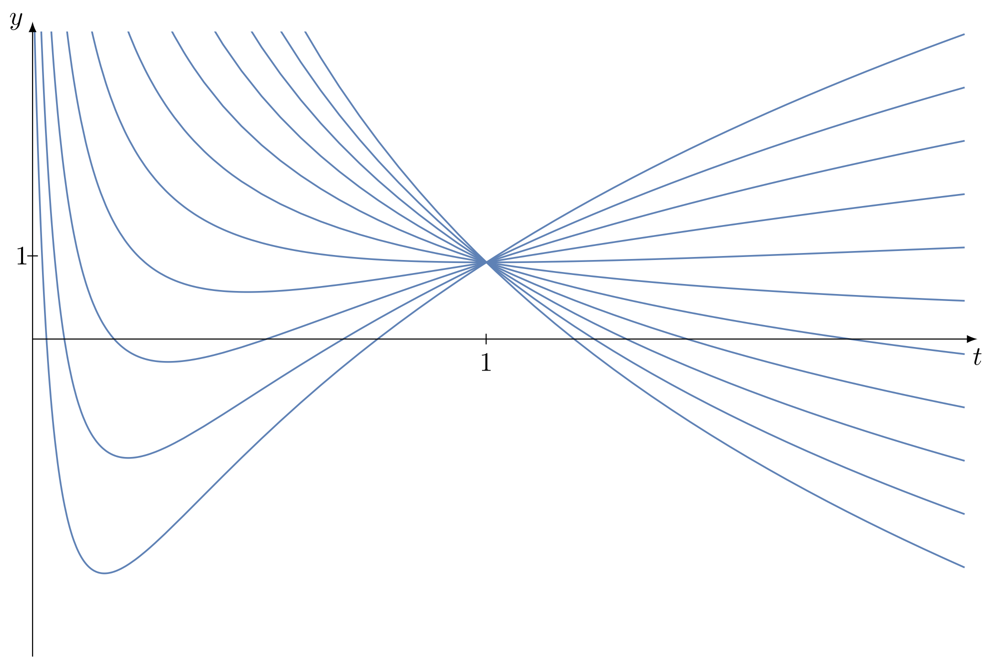
Exercice 4

⇨ Résoudre l'équation différentielle $(t^2 \ln t)y'(t) - ty(t) = -(1 + \ln t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque

⇨ Pour les équations différentielles non résolues du premier ordre, contrairement à ce qui se passe pour les équations résolues, il est possible qu'un problème de Cauchy admette plusieurs solutions ou aucune. Voici par exemple plusieurs solutions au problème de Cauchy

$$y(1) = 1, \quad \text{et} \quad \forall t > 0, \quad (t^2 \ln t)y'(t) - ty(t) = -(1 + \ln t).$$



On peut aussi remarquer que pour $y_0 \neq 1$, il n'existe aucune solution de cette équation différentielle vérifiant $y(1) = y_0$.

6.2 Équation différentielle linéaire du second ordre

Définition 6.2.1

Soit $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I. On appelle solution sur I de l'équation différentielle linéaire du second ordre $ay'' + by' + cy = d$, toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$, dérivable deux fois sur I, telle que

$$\forall t \in I, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t).$$

On dit que l'équation est *résolue* lorsque a ne s'annule pas et qu'elle est *homogène* lorsque la fonction d est nulle.

6.2.1 Équation différentielle homogène

Proposition 6.2.2

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$.

— Si cette équation possède deux racines distinctes r_1 et r_2 ($\Delta \neq 0$), alors les solutions complexes de (E) sont les fonctions

$$\begin{array}{rccl} y_{\lambda,\mu} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

— Si cette équation admet une racine double r ($\Delta = 0$), alors les solutions complexes de (E) sont les fonctions

$$\begin{array}{rccl} y_{\lambda,\mu} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & (\lambda t + \mu)\, e^{rt} \end{array}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Exercice 5

⇨ Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Proposition 6.2.3

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$.

— Si cette équation possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 ($\Delta > 0$), alors les solutions réelles de (E) sont les fonctions

$$\begin{array}{rccl} y_{\lambda,\mu} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

— Si cette équation admet une racine double r ($\Delta = 0$), alors les solutions réelles de (E) sont les fonctions

$$\begin{array}{rccl} y_{\lambda,\mu} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & (\lambda t + \mu)\, e^{rt} \end{array}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

— Si cette équation admet deux racines complexes conjuguées $r + i\omega$ et $r - i\omega$ ($\Delta < 0$), alors les solutions réelles de (E) sont les fonctions

$$\begin{array}{rccl} y_{\lambda,\mu} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & [\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)]\, e^{rt} \end{array}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Remarque

⇨ Dans le cas où l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées, les solutions de (E) peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{array}{rccl} y_{\lambda,\varphi} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \lambda \sin(\omega t - \varphi)\, e^{rt} \end{array}$$

où $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$. Lors de la recherche effective de tels coefficients, quitte à changer φ en $\varphi + \pi$, on impose souvent $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Exercices 6

⇨ Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$.

⇨ Soit $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega_0^2 y = 0$.

⇨ En effectuant le changement de fonction inconnue $z(t) = t^2 y(t)$, résoudre l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad t^2 y''(t) + 4ty'(t) + (2 - t^2)y(t) = 0.$$

⇨ En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{u}$, résoudre l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad ty''(t) - y'(t) + 4t^3 y(t) = 0.$$

6.2.2 Équation différentielle avec second membre

Proposition 6.2.4: Théorème de superposition

Soit $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I. Si y_p est une solution « particulière » de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t)$$

alors les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $y_p + y$ où y parcourt l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0.$$

Proposition 6.2.5: Théorème de superposition

— Soit $a, b, c, d_1, d_2 : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $y_{p_1}, y_{p_2} : I \to \mathbb{K}$ des solutions « particulières » des équations différentielles respectives $ay'' + by' + cy = d_1$ et $ay'' + by' + cy = d_2$. Alors $\lambda y_{p_1} + \mu y_{p_2}$ est une solution « particulière » de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t).$$

— Soit $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{C}$ des fonctions définies sur un intervalle I et $y_p : I \to \mathbb{C}$ une solution « particulière » de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d$. Alors $\mathrm{Re}(y_p)$ est une solution « particulière » de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = \mathrm{Re}(d(t)).$$

Remarque

⇨ Bien entendu, une proposition similaire existe pour la partie imaginaire.

Proposition 6.2.6

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Si P est un polynôme de degré n et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$$

admet comme solution une (unique) fonction du type $t \mapsto t^m Q(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$ où Q est un polynôme de degré n et m est l'ordre de α comme racine de l'équation caractéristique (avec par convention $m = 0$ si α n'est pas racine de cette équation).

Exercices 7

⇨ Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y''(t) + y'(t) + y(t) = t^2$.

⇨ Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y''(t) + y(t) = t \cos t$.

6.2.3 Problème de Cauchy

Définition 6.2.7: Problème de Cauchy

Soit $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I, $t_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$. On appelle *problème de Cauchy* la recherche des solutions y de l'équation différentielle du second ordre

$$\forall t \in I, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t)$$

telles que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$.

Théorème 6.2.8: Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues sur un intervalle I, $t_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$. Alors il existe une et une seule solution à l'équation différentielle résolue du second ordre

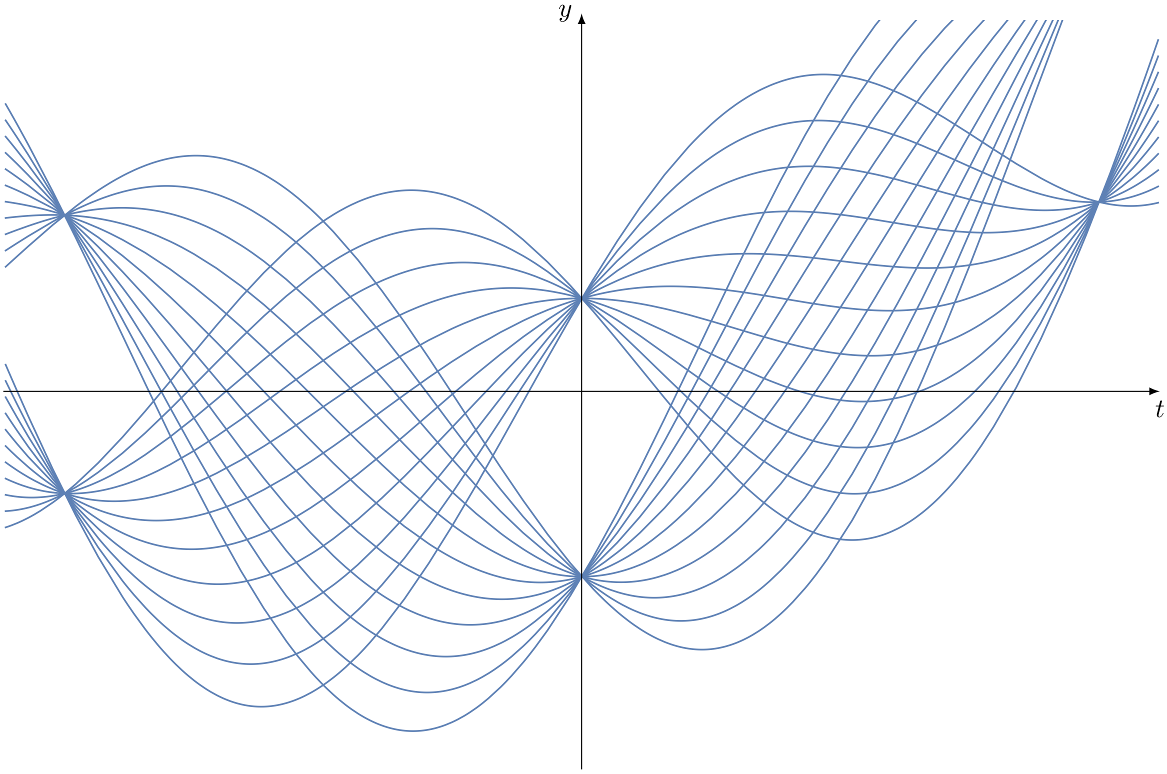
$$\forall t \in I, \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$.

Remarques

⇨ Graphiquement, cette proposition signifie que par tout point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ passe un et un seul graphe de pente $y_1 \in \mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$. Les courbes intégrales peuvent se croiser, mais doivent avoir des pentes différentes lorsqu'elles se croisent. Par exemple, voici quelques solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + y(t) = \frac{1}{2}t^2 + t.$$



⇨ Le théorème de Cauchy-Lipschitz prouve que la connaissance de la valeur de y et de sa dérivée à l'instant t_0 d'un système régi par une équation différentielle résolue du second ordre permet de connaitre complètement son passé et son futur.

Exercice 8

⇨ Résoudre le problème de Cauchy

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + y(t) = \frac{1}{2}t^2 + t.$$

6.3 Qcm

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Équation différentielle homogène

1. Quelle est la solution générale de l'équation différentielle $y' + \sin(2x)y = 0$?

   ☐ **a.** $x \mapsto C\cos(2x)$ ☐ **b.** $x \mapsto C\exp(-\cos(2x)/2)$
   ☐ **c.** $x \mapsto C\exp(-x\sin(2x))$ ☐ **d.** $x \mapsto C\exp(\cos(2x)/2)$

2. Pour quelles valeurs de $q \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation $y' + qy = 0$ tendent-elles toutes vers 0 en $+\infty$?

   ☐ **a.** pour $q < 0$ ☐ **b.** pour $q \leqslant 0$ ☐ **c.** pour $q > 0$ ☐ **d.** pour aucune valeur de q

3. Les fonctions $x \mapsto \frac{c}{1+x^2}$, pour c réel, sont les solutions de l'équation différentielle

   ☐ **a.** $(1+x^2)y' + 2xy = 0$ ☐ **b.** $(1+x^2)y' - 2xy = 0$ ☐ **c.** $y' + \mathrm{Arctan}(x)y = 0$ ☐ **d.** $y' + 2xy = 0$

Équation différentielle avec second membre

1. En appliquant la méthode de variation de la constante, sur $]0, +\infty[$, pour l'équation $xy' + y = x\sin x$, on cherche y sous la forme

   ☐ **a.** $c(x)\mathrm{e}^{-2x}$ ☐ **b.** $c(x)x$ ☐ **c.** $\dfrac{c(x)}{x}$ ☐ **d.** $c(x)\sin x$

2. En appliquant à l'équation $y' = y + g(x)$ la méthode de la variation de la constante, on cherche y sous la forme

   ☐ **a.** $\mathrm{e}^{c(x)}$ ☐ **b.** $c(x)\mathrm{e}^{x}$ ☐ **c.** $c(x)g(x)$ ☐ **d.** $c(x)\exp(G(x))$ où G est une primitive de g

3. Pour trouver une solution particulière de l'équation $y' + 2xy = x$ par la méthode de la variation de la constante, on est ramené à déterminer une primitive de

   ☐ **a.** $\dfrac{1}{2}$ ☐ **b.** $2x^2$ ☐ **c.** $x\mathrm{e}^{-x^2}$ ☐ **d.** $x\mathrm{e}^{x^2}$

Problème de Cauchy

1. Quelle est la solution de l'équation $y' + 2y = 0$ qui s'annule en 1 ?

   ☐ **a.** $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ ☐ **b.** $x \mapsto \mathrm{e}^{-2(x-1)}$ ☐ **c.** $x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^{-2x}$ ☐ **d.** $x \mapsto 0$

2. Combien y a-t-il de solutions de l'équation $y' + 2\,\mathrm{ch}(x)y = \mathrm{e}^x$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$?

   ☐ **a.** 0 ☐ **b.** 1 ☐ **c.** 2 ☐ **d.** une infinité

3. Soit $x \mapsto a(x)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Une solution non nulle de l'équation $y' = a(x)y$ ne peut pas

   ☐ **a.** être paire ☐ **b.** tendre vers 0 en $+\infty$ ☐ **c.** s'annuler ☐ **d.** être bornée

Équation différentielle non résolue

Équation différentielle linéaire du second ordre

Équation différentielle homogène

1. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$?

   ☐ **a.** $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x}$ ☐ **b.** $x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x}$
   ☐ **c.** $x \mapsto (Ax+B)\mathrm{e}^{-2x}$ ☐ **d.** $x \mapsto A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{2x}$

2. De quelle équation différentielle la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x}$ est-elle solution ?

   ☐ **a.** $y'' - 2y' - 3y = 0$ ☐ **b.** $y'' - 5y' + 6y = 0$ ☐ **c.** $y'' + 2y' + 3y = 0$ ☐ **d.** $y'' + 2y' - y = 0$

3. Quelle fonction n'est pas solution de l'équation $y'' - y = 0$?

☐ **a.** $x \mapsto \operatorname{ch} x$ ☐ **b.** $x \mapsto \operatorname{sh} x$ ☐ **c.** $x \mapsto \mathrm{e}^x$ ☐ **d.** $x \mapsto \sin x$

4. Les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x}$, pour C réel, sont les solutions de l'équation différentielle

☐ **a.** $y' = 2y$ ☐ **b.** $y' = 2Cy$ ☐ **c.** $y'' - 3y' + 2y = 0$ ☐ **d.** $y' = -2y$

5. Les solutions de l'équation $y'' + ay = 0$ sont toutes bornées si et seulement si

☐ **a.** $a > 0$ ☐ **b.** $a \geqslant 0$ ☐ **c.** $a \leqslant 0$ ☐ **d.** $a < 0$

Équation différentielle avec second membre

1. Pour trouver une solution particulière de l'équation $y' + 2y = 5\sin x$

☐ **a.** vous la cherchez sous la forme $A\sin x$
☐ **b.** vous la cherchez sous la forme $A\cos x$
☐ **c.** vous la cherchez sous la forme $A\sin x + B\cos x$
☐ **d.** vous utilisez la méthode de variation de la constante

2. Laquelle des équations suivantes admet une solution particulière polynomiale ?

☐ **a.** $y'' + x^2 y = x$ ☐ **b.** $y'' + y' + y = \mathrm{e}^x$ ☐ **c.** $y'' + y = x^2$ ☐ **d.** $y'' + 2y' + y = x\sin x$

Problème de Cauchy

1. Combien y a-t-il de solutions de l'équation $y'' + 2y' + y = \operatorname{ch} x$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$?

☐ **a.** 0 ☐ **b.** 1 ☐ **c.** 2 ☐ **d.** une infinité

2. Quelle équation différentielle n'admet pas de solution y vérifiant $y(0) = 0$ et $y(2\pi) = 1$?

☐ **a.** $y'' - y = 0$ ☐ **b.** $y'' + y = 0$ ☐ **c.** $y'' - 2\pi y = 0$

☐ **d.** aucune, car toutes les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants admettent une solution vérifiant ces conditions initiales

3. Laquelle des conditions suivantes est suffisante pour affirmer que la solution f de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est identiquement nulle ?

☐ **a.** f admet une infinité de zéros ☐ **b.** f et f' ont un zéro commun
☐ **c.** $ff' = 0$ ☐ **d.** f' admet une infinité de zéros

6.4 Exercices

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Équation différentielle avec second membre

Exercice 1 : Calcul

Résoudre les équations différentielles suivantes sur un intervalle à préciser

a. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$, **b.** $(1+x)\,y' + y = 1 + \ln(1+x)$,

c. $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

Exercice 2 : Avec un second membre

Déterminer les fonctions dérivables $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = \int_0^1 y(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3 : Équations fonctionnelles

1. Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + f(x)\mathrm{e}^y.$$
2. Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(0) \neq 0$ et
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f'(y) + f'(x)f(y).$$

Problème de Cauchy

Équation différentielle non résolue

Exercice 4 : Une équation différentielle avec peu de solutions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (E) l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad |t|\,y'(t) + (t-1)\,y(t) = 0.$$

1. Résoudre cette équation pour $I = \mathbb{R}_+^*$ puis $I = \mathbb{R}_-^*$.
2. En déduire les solutions de cette équation différentielle lorsque $I = \mathbb{R}$.
3. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ a-t-il toujours au moins une solution ? Si oui, est-elle unique ?

Exercice 5 : Une équation différentielle avec beaucoup de solutions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (E) l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad ty'(t) - (t+2)\,y(t) = 0.$$

1. Résoudre cette équation pour $I = \mathbb{R}_+^*$ puis $I = \mathbb{R}_-^*$.
2. En déduire les solutions de cette équation différentielle lorsque $I = \mathbb{R}$.
3. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ a-t-il toujours au moins une solution ? Si oui, est-elle unique ?

Exercice 6 : Discontinuité des coefficients de l'équation

Soit H la fonction de Heaviside définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad H(t) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + H(t)y(t) = 0.$$

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Les problèmes de Cauchy associés à cette équation ont-ils toujours une unique solution ?

Équation différentielle linéaire du second ordre

Équation différentielle homogène

Exercice 7 : Équation d'Euler

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad t^2y'' - ty' + y = 0.$$

1. Dans cette question, on souhaite résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) On se donne une fonction $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dérivable deux fois et on définit la fonction $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
   $$\forall u \in \mathbb{R}, \quad z(u) := y(\mathrm{e}^u).$$
   Montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants que l'on précisera.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Enfin, déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Plus généralement, on appelle équation d'Euler toute équation différentielle de la forme

$$at^2y''(t) + bty'(t) + cy(t) = 0.$$

Leur résolution se ramène à la résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants après le même changement de variable que ci-dessus.

Exercice 8 : Changement de variable

1. En posant $x := \tan t$, résoudre l'équation différentielle
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)^2y''(x) + 2x(1+x^2)y'(x) + 4y(x) = 0.$$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. En posant $x := \operatorname{sh} t$, résoudre l'équation différentielle
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)y''(x) + xy'(x) - \alpha^2y(x) = 0.$$

Exercice 9 : Équations fonctionnelles

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(\lambda - x).$$
2. Trouver toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que
   $$\forall x > 0, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$
   On utilisera les résultats sur l'équation d'Euler

Exercice 10 : Utilisation du plan de phase

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

où ω dépend de la masse, de la charge de la particule et du champ magnétique. En considérant $u = x' + \mathrm{i}y'$, résoudre ce système différentiel.

Équation différentielle avec second membre

Exercice 11 : Calcul

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$

$$\textbf{a. } y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2, \qquad \textbf{b. } y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x},$$

$$\textbf{c. } y'' - 4y' + 4y = x\cosh(2x), \qquad \textbf{d. } y'' + y = \sin^3 x.$$

Exercice 12 : Recollement

Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = \mathrm{e}^{-|x|}.$$

Problème de Cauchy

Exercice 13 : Calcul

Déterminer l'unique solution y sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = 3x^2$$

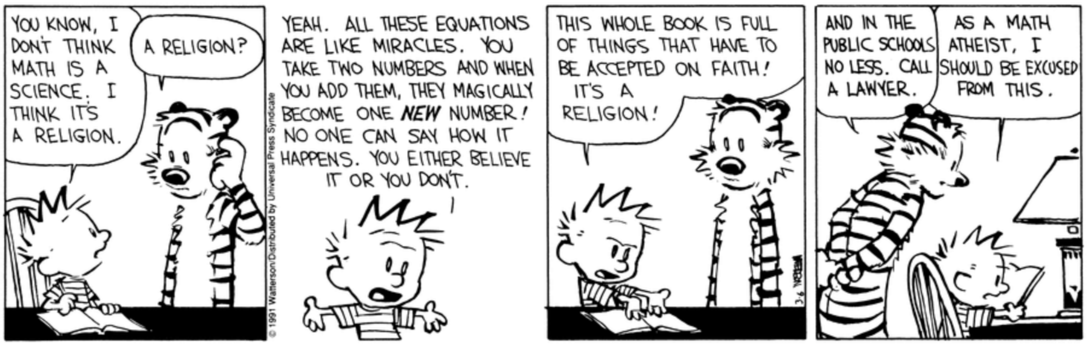
telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Chapitre 7

Espaces vectoriels

« Vector is a useless survival, or offshoot from quaternions, and has never been of the slightest use to any creature. »

— Lord Kelvin (1824–1907)



7.1 Espace vectoriel, application linéaire

7.1.1 Définition, propriétés élémentaires

Définition 7.1.1

Soit E un ensemble. On dit qu'une *loi* notée additivement

$$+ : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

fait de $(E,+)$ un groupe commutatif lorsque :

— Elle est *associative*

$$\forall x, y, z \in E, \quad (x + y) + z = x + (y + z).$$

— Elle est *commutative*

$$\forall x, y \in E, \quad x + y = y + x.$$

— Elle admet un *élément neutre*

$$\exists e \in E, \quad \forall x \in E, \quad x + e = e + x = x.$$

Un tel élément est unique ; on le note 0_E.

— Tout élément $x \in E$ admet un *opposé*

$$\exists y \in E, \quad x + y = y + x = 0_E.$$

Un tel élément est unique ; on le note $-x$.

Remarques

⇨ Si $x_1, x_2, x_3 \in E$, l'associativité de la loi $+$ affirme que $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$; on note $x_1 + x_2 + x_3$ cette valeur commune. Plus généralement, si $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$, la valeur de $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ne dépend pas de l'ordre dans lesquelles sont effectuées les additions. Cela justifie l'usage de cette notation n'utilisant pas de parenthèses.

⇨ Si $(E, +)$ est un groupe commutatif et $x, y \in E$, l'élément $x + (-y)$ est aussi noté $x - y$. De plus

$$\forall x, y, z \in E, \quad x + y = z \quad \Longleftrightarrow \quad x = z - y.$$

⇨ Les éléments de E sont *réguliers*. Autrement dit

$$\forall x, y, z \in E, \quad x + y = x + z \quad \Longrightarrow \quad y = z.$$

En première lecture, on pourra considérer que dans la suite de ce cours, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Cependant, excepté quelques résultats sur les symétries qui ne sont pas valables dans un corps de caractéristique 2, ce cours reste valide si $\mathbb{K}$ est un corps quelconque, notion dont nous donnerons la définition plus tard dans l'année.

Définition 7.1.2

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $(E, +)$ un groupe commutatif d'élément neutre 0_E et $\cdot$ une loi de composition externe.

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* lorsque

$$\begin{array}{rl} \forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, & \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \\ \forall x \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, & (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \\ \forall x \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, & \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x \\ \forall x \in E, & 1 \cdot x = x. \end{array}$$

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*, ceux de E, *vecteurs*.

Proposition 7.1.3

$$\begin{array}{rl} \forall x \in E, & 0 \cdot x = 0_E \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, & \lambda \cdot 0_E = 0_E \\ \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, & (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x) \end{array}$$

Remarque

⇨ En particulier, si $x \in E$, $(-1) \cdot x = -x$.

Proposition 7.1.4

$$\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot x = 0_E \quad \Longrightarrow \quad [\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0_E] \,.$$

Définition 7.1.5

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $E := \mathbb{K}^n$
- la loi de composition interne $+$ par

$$\forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n,$$

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \,.$$

- la loi de composition externe $\cdot$ par

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \,.$$

Alors $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'élément neutre $(0, \ldots, 0)$.

Remarques

⇨ En particulier, $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

⇨ $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 7.1.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X un ensemble. On définit sur $\mathcal{F}(X, E)$
- la loi de composition interne $+$ par

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(X, E), \quad \forall x \in X, \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x).$$

- la loi de composition externe $\cdot$ par

$$\forall f \in \mathcal{F}(X, E), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x).$$

Alors $(\mathcal{F}(X, E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont l'élément neutre est l'application de X dans E qui à tout $x \in X$ associe 0_E. En particulier, $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque

⇨ En particulier, si X est un ensemble, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont le « zéro » est la fonction nulle. Ainsi, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont le « zéro » est la fonction nulle. De même, l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont le « zéro » est la suite nulle.

Définition 7.1.7

Soit $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit sur $E \times F$
- la loi de composition interne $+$ par

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times F, \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \,.$$

- la loi de composition externe $\cdot$ par

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (x, y) := (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) \,.$$

Alors $(E \times F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'élément neutre $(0_E, 0_F)$.

Dans la suite du cours, l'élément 0_E sera désormais noté 0. Cependant, il sera toujours important de se demander si un 0 est le zéro de $\mathbb{K}$ ou celui de E. Dans le second cas, on se demandera quelle est la nature de ce zéro : est-ce un un scalaire, un n-uplet, une suite, une fonction ?

7.1.2 Sous-espace vectoriel

Définition 7.1.8

On dit qu'une partie F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un *sous-espace vectoriel* de E lorsque
- $0 \in F$
- F est stable par *combinaisons linéaires*

$$\forall x, y \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + \mu y \in F.$$

Si tel est le cas, $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarques

⇨ Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors

$$\begin{aligned} \forall x \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad & \lambda x \in F, \\ \forall x, y \in F, \qquad & x + y \in F. \end{aligned}$$

⇨ Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\{0\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé sous-espace vectoriel *trivial*. De même, E est un sous-espace vectoriel de E.

⇨ Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Alors

$$F \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Par exemple, l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x + 2y - z = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1

⇨ Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + \mathrm{e}^{-t^2} y(t) = 0$$

est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 7.1.9

Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Remarques

⇨ Contrairement à l'intersection, l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

⇨ Soit $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant q, 1 \leqslant j \leqslant p}$ une famille de scalaires. Alors

$$F = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p \mid \forall i \in [\![1, q]\!], \quad a_{i,1} x_1 + \cdots + a_{i,p} x_p = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. Par exemple, l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} x + y \ \ + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Définition 7.1.10

Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, au sens de l'inclusion, il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A. On l'appelle *sous-espace vectoriel engendré* par A et on le note $\mathrm{Vect}(A)$.

Remarques

⇨ Si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $A \subset F$, alors $\mathrm{Vect}(A) \subset F$.

⇨ Si $A \coloneqq \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors $\mathrm{Vect}(A)$ est aussi noté $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

Proposition 7.1.11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, \ldots, x_n \in E$. Alors

$$\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

Les éléments de $\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ sont appelés *combinaisons linéaires* de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$.

Remarque

⇨ Soit $x \in E$. Alors

$$\text{Vect}(x) = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Cet ensemble est aussi noté $\mathbb{K}x$.

Exercice 2

⇨ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$A := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 0\}.$$

Montrer que $\text{Vect}(A) = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Définition 7.1.12

On dit que deux éléments $x, y \in E$ sont *colinéaires* lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$.

Remarques

⇨ Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

⇨ Il est possible que x et $y \in E$ soient colinéaires sans qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$. Cependant, si x et y sont colinéaires et $x \neq 0$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$.

Définition 7.1.13

On dit qu'un espace vectoriel E est une *droite vectorielle* lorsqu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = \mathbb{K}x$.

Remarque

⇨ Si E est une droite vectorielle, quel que soit $x \in E \setminus \{0\}$, $E = \mathbb{K}x$.

7.1.3 Application linéaire

Définition 7.1.14

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit qu'une application f de E dans F est une *application linéaire* lorsque

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Plus précisément, on dit que f est un
- *endomorphisme* lorsque $E = F$.
- *isomorphisme* lorsque f est bijective.
- *automorphisme* lorsque f est un endomorphisme et un isomorphisme.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Remarques

⇨ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \qquad & f(x+y) = f(x) + f(y), \\ \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad & f(\lambda x) = \lambda f(x). \end{aligned}$$

De plus $f(0_E) = 0_F$.

⇨ Soit f un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E. Lorsque F est stable par f, c'est-à-dire lorsque $f(F) \subset F$, la restriction de f à F, corestreinte à F, est un endomorphisme de F appelé endomorphisme *induit* à F.

Définition 7.1.15

On dit qu'une application f de E dans E est une *homothétie* lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \lambda x.$$

Les homothéties de E sont des endomorphismes.

Remarque

⇨ En particulier, Id_E est un endomorphisme de E.

Exercice 3

⇨ Soit E une droite vectorielle. Montrer que les homothéties sont les seuls endomorphismes de E.

Définition 7.1.16

On appelle *forme linéaire* sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est noté $E^\star$ et appelé *dual* de E.

Remarque

⇨ Si $E = \mathbb{K}^n$, alors $\varphi \in E^\star$ si et seulement si il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

Proposition 7.1.17

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
- L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.
- L'image directe par f d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.

Remarque

⇨ Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x_1, \dots, x_n \in E$, alors

$$u(\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)) = \mathrm{Vect}(u(x_1), \dots, u(x_n)).$$

Définition 7.1.18

On appelle *noyau* de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et on note $\mathrm{Ker}\, f$ l'ensemble

$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in E \mid f(x) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque

⇨ Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\mathrm{Ker}\,(\lambda f) = \mathrm{Ker}\, f$.

Proposition 7.1.19

Une application linéaire f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

Définition 7.1.20

On appelle image de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et on note $\mathrm{Im}\, f$ l'ensemble

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(x) : x \in E\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de F.

Remarques

⇨ f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = F$.

⇨ Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\mathrm{Im}\,(\lambda f) = \mathrm{Im}\, f$. En particulier $\mathrm{Im}(-f) = \mathrm{Im}\, f$.

Proposition 7.1.21

— La composée de deux applications linéaires est linéaire.
— La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Remarques

⇨ Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f et g *commutent* lorsque $f \circ g = g \circ f$. En général, deux endomorphismes ne commutent pas, comme le montre l'exemple des endomorphismes

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,0) \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,x) \end{array}$$

⇨ Il est possible que $f \circ g = 0$ sans que $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercices 4

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}.$$

⇨ Soit f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

7.2 L'algèbre $\mathcal{L}(E)$

7.2.1 $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition 7.2.1

$(\mathcal{L}(E,F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 7.2.2

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors

$$\begin{array}{llll} \forall f \in \mathcal{L}(F,G), & \forall g, h \in \mathcal{L}(E,F), & \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, & f \circ (\lambda g + \mu h) = \lambda f \circ g + \mu f \circ h \\ \forall f, g \in \mathcal{L}(F,G), & \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, & \forall h \in \mathcal{L}(E,F), & (\lambda f + \mu g) \circ h = \lambda f \circ h + \mu g \circ h. \end{array}$$

Définition 7.2.3

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.
— $f^0 := \operatorname{Id}_E$
— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{n+1} := f^n \circ f$.

Remarque

⇨ Attention, si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, $f^2(x) = f(f(x))$ et non $f(x)^2$, expression qui n'a d'ailleurs aucun sens.

Proposition 7.2.4

— Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{array}{l} f^{m+n} = f^m \circ f^n \\ (f^m)^n = f^{mn}. \end{array}$$

— Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, f^n et g^m commutent. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (f \circ g)^n = f^n \circ g^n.$$

Exercice 5

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $K_n := \operatorname{Ker} f^n$ et $I_n := \operatorname{Im} f^n$. Montrer que les suites (K_n) et (I_n) sont respectivement croissantes et décroissantes au sens de l'inclusion.

Proposition 7.2.5

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g^k \qquad \text{et} \qquad f^n - g^n = (f-g) \circ \left[\sum_{k=0}^{n-1} f^{(n-1)-k} \circ g^k\right].$$

Exercice 6

⇨ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit $\Delta, T \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) \coloneqq f(x+1) \quad \text{et} \quad \Delta(f)(x) \coloneqq f(x+1) - f(x).$$

Calculer T^k et Δ^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

7.2.2 Le groupe linéaire

Définition 7.2.6

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme si et seulement si il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$u \circ v = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad v \circ u = \mathrm{Id}_E\,.$$

Si tel est le cas, $v = u^{-1}$. On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Proposition 7.2.7

$\mathrm{GL}(E)$ possède les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned} & \mathrm{Id} \in \mathrm{GL}(E) \\ \forall f, g \in \mathrm{GL}(E), \quad & g \circ f \in \mathrm{GL}(E) \\ \forall f \in \mathrm{GL}(E), \quad & f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)\,. \end{aligned}$$

Nous dirons que $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe, que l'on appelle *groupe linéaire*.

7.3 Somme, somme directe, projecteur, hyperplan

7.3.1 Somme, somme directe

Définition 7.3.1

On appelle *somme* de deux sous-espaces vectoriels A et B de E, et on note $A+B$, le plus petit sous-espace vectoriel contenant A et B. On a

$$A + B = \{a + b : a \in A \quad b \in B\}\,.$$

Remarque

⇨ Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F qui coïncident sur deux sous-espaces vectoriels A et B tels que $A + B = E$, alors $f = g$.

Exercices 7

⇨ Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, montrer que $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

⇨ Soit A, B, C et D des sous-espaces vectoriels de E tels que $A \subset C$, $B \subset D$ et $A + B = C + B$. Montrer que $A + D = C + D$.

Définition 7.3.2

On dit que deux sous-espaces vectoriels A et B de E sont en somme directe lorsque

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad a + b = 0 \quad \Longrightarrow \quad [a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0]\,.$$

Si tel est le cas, la somme $A + B$ est notée $A \oplus B$.

Remarque

- Deux sous-espaces vectoriels A et B de E sont en somme directe si et seulement si, quel que soit $x \in A+B$, l'écriture $x = a + b$ (avec $a \in A$ et $b \in B$) est unique.

Proposition 7.3.3

Deux sous-espaces vectoriels A et B de E sont en somme directe si et seulement si

$$A \cap B = \{0\}.$$

Définition 7.3.4

On dit que deux sous-espaces vectoriels A et B de E sont *supplémentaires* lorsque A et B sont en somme directe et $A + B = E$, c'est-à-dire lorsque

$$A \oplus B = E.$$

Remarques

- Autrement dit, A et B sont supplémentaires lorsque pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(a, b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$.
- Il est important de ne pas confondre « le complémentaire » et « un supplémentaire » d'un sous-espace vectoriel. En particulier, contrairement à un supplémentaire, le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est pas un sous-espace vectoriel car il ne contient pas 0.
- En général un sous-espace vectoriel admet plusieurs supplémentaires.
- On peut démontrer que tout sous-espace vectoriel admet (au moins) un supplémentaire. Nous démontrerons ce point dans un autre chapitre, dans le cas où E est de dimension finie.

Exercice 8

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f^2 + f$. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Proposition 7.3.5: Version géométrique du théorème du rang

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et A un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. Alors

$$\varphi : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

7.3.2 Projecteur

Définition 7.3.6

Soit A et B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, il existe un unique endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad p(a+b) = a.$$

On l'appelle *projecteur* sur A parallèlement à B

Définition 7.3.7

Si p est le projecteur sur A parallèlement à B, le projecteur q sur B parallèlement à A est appelé projecteur associé à p. On a

$$p + q = \operatorname{Id} \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$

De plus, pour tout $x \in E$

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in A} + \underbrace{q(x)}_{\in B}$$

est la décomposition de x dans $E = A \oplus B$.

Proposition 7.3.8

Soit p le projecteur sur A parallèlement à B. Alors

$$\operatorname{Ker} p = B, \qquad \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}) = A, \qquad \operatorname{Im} p = A.$$

De plus $p \circ p = p$.

Remarque

⇨ En particulier, si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}) \quad \text{et} \quad E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p.$$

Proposition 7.3.9

$p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

Exercices 9

⇨ Soit Re l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $\operatorname{Re}(z)$. Montrer que Re est un projecteur de $\mathbb{C}$ lorsqu'il est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

⇨ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application φ de E dans E par

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad [\varphi(f)](x) \coloneqq f(0) + f'(0)x.$$

Montrer que φ est un projecteur. En déduire un supplémentaire du sous-espace vectoriel de E des fonctions affines.

Proposition 7.3.10

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et A, B deux sous-espaces supplémentaires de E. Étant donnés $f_A \in \mathcal{L}(A, F)$ et $f_B \in \mathcal{L}(B, F)$, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad f(a + b) = f_A(a) + f_B(b).$$

7.3.3 Symétrie

Définition 7.3.11

Soit A et B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, il existe un unique endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad s(a + b) = a - b.$$

On l'appelle *symétrie* par rapport à A parallèlement à B.

Proposition 7.3.12

Soit s la symétrie par rapport à A parallèlement à B. Alors

$$\operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}) = A, \qquad \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}) = B.$$

De plus $s \circ s = \mathrm{Id}$. En particulier s est un automorphisme et $s^{-1} = s$.

Remarque

⇨ En particulier, si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie

$$E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}).$$

Proposition 7.3.13

$s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{Id}$.

Exercice 10

⇨ Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et φ l'application de E dans E qui à f associe la fonction $\varphi(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\varphi(f)]\,(x) \coloneqq f(-x).$$

Montrer que φ est une symétrie et en déduire que $E = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$ où $\mathcal{I}$ désigne l'espace vectoriel des fonctions impaires et $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions paires.

7.3.4 Hyperplan

Définition 7.3.14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *hyperplan* de E tout noyau d'une forme linéaire non nulle.

Remarques

⇨ Un hyperplan est un sous-espace vectoriel strict de E.

⇨ Si $E = \mathbb{K}^n$, les hyperplans sont les parties H de E telles qu'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}.$$

En particulier, les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites passant par $(0,0)$ et les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans passant par $(0,0,0)$.

Proposition 7.3.15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E.

— Si H est un hyperplan, quel que soit $x_0 \in E \setminus H$, $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$.

— Si H admet une droite vectorielle pour supplémentaire, alors c'est un hyperplan.

Remarque

⇨ On en déduit qu'un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si c'est un supplémentaire d'une droite vectorielle.

Proposition 7.3.16

Soit H un hyperplan de E et φ_0 une forme linéaire telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi_0$. Alors l'ensemble des formes linéaires de E dont le noyau est H est

$$\mathbb{K}^* \varphi_0 = \{\lambda \varphi_0 : \lambda \in \mathbb{K}^*\}.$$

7.4 Qcm

Espace vectoriel, application linéaire

Définition, propriétés élémentaires

Sous-espace vectoriel

1. Laquelle des parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel ?

   ☐ **a.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$ ☐ **b.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + x = 1\}$
   ☐ **c.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid yx = 1\}$ ☐ **d.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid yx = 0\}$

2. Laquelle des parties suivantes n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

   ☐ **a.** l'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 0$ ☐ **b.** l'ensemble des fonctions paires
   ☐ **c.** l'ensemble des fonctions croissantes ☐ **d.** l'ensemble des fonctions polynomiales

3. Dans l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, laquelle des fonctions suivantes est combinaison linéaire des fonctions $f_1 : x \mapsto \sin x$, $f_2 : x \mapsto \sin(2x)$ et $f_3 : x \mapsto \sin(3x)$?

   ☐ **a.** $x \mapsto \cos x$ ☐ **b.** $x \mapsto x\cos x$ ☐ **c.** $x \mapsto \sin x \cos x$ ☐ **d.** $x \mapsto \tan x$

Application linéaire

1. Laquelle des applications suivantes est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?

   ☐ **a.** $f_1 : (x,y) \mapsto x$ ☐ **b.** $f_2 : (x,y) \mapsto xy$
   ☐ **c.** $f_3 : (x,y) \mapsto x + y + 1$ ☐ **d.** $f_4 : (x,y) \mapsto (x+y)(x-y)$

2. Soit E et F deux espaces vectoriels réels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. On a $u(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_p))$

   ☐ **a.** pour toute application linéaire u ☐ **b.** lorsque u est injective
   ☐ **c.** lorsque u est surjective ☐ **d.** lorsque $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E, u un endomorphisme de E, et v la restriction de u à F. Alors

   ☐ **a.** $v \in \mathcal{L}(F)$ ☐ **b.** $v \in \mathcal{L}(F,E)$ ☐ **c.** $v \in \mathcal{L}(E,F)$ ☐ **d.** v n'est pas forcément linéaire

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E. À quelle condition la restriction de u à F est-elle injective ?

   ☐ **a.** si $\mathrm{Ker}\, u = F$ ☐ **b.** si F n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}\, u$
   ☐ **c.** si $F \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$ ☐ **d.** si $F \cap \mathrm{Ker}\, u = \varnothing$

L'algèbre $\mathcal{L}(E)$

$\mathcal{L}(E,F)$

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $u^2 = -\mathrm{Id}$, que vaut $\left(u^2 + u\right)^2$?

   ☐ **a.** $-2\,\mathrm{Id}$ ☐ **b.** $-2u$ ☐ **c.** $2\,\mathrm{Id} - 2u$ ☐ **d.** 0

2. Si u est un endomorphisme de E, on a toujours

   ☐ **a.** $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u^2$ ☐ **b.** $\mathrm{Ker}\, u^2 \subset \mathrm{Ker}\, u$ ☐ **c.** $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$ ☐ **d.** $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u^2 = \{0\}$

3. Soit u un endomorphisme de E et x un vecteur de E tel que $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $u^n(x)$ vaut

   ☐ **a.** λx^n ☐ **b.** $\lambda^n x$ ☐ **c.** λx ☐ **d.** $\lambda^n x^n$

4. Soit g non nulle dans $\mathcal{L}(E)$. Laquelle des applications suivantes de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ n'est pas linéaire ?

   ☐ **a.** $f \mapsto g \circ f$ ☐ **b.** $f \mapsto f \circ g$ ☐ **c.** $f \mapsto g + f$ ☐ **d.** $f \mapsto g \circ f \circ g$

5. Si u et v sont deux endomorphismes de E tels que $v = u \circ v$, alors

   ☐ **a.** $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, v$ ☐ **b.** $u = \mathrm{Id}$ ☐ **c.** $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u$ ☐ **d.** la restriction de u à $\mathrm{Im}\, v$ est l'identité

Le groupe linéaire

Somme, somme directe, projecteur, hyperplan

Somme, somme directe

1. Soit u un endomorphisme de E. Quelle propriété est toujours vérifiée ?

   ☐ **a.** $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} u^2$ ☐ **b.** $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$ ☐ **c.** $\operatorname{Im} u^2 \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$ ☐ **d.** $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} u^2$

2. Lequel des ensembles suivants est un supplémentaire dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ de la droite $D = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$?

   ☐ **a.** $\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ ☐ **b.** $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\right\}$ ☐ **c.** $\{(x, 1) : x \in \mathbb{R}\}$ ☐ **d.** $\{(0, 1)\}$

Projecteur

1. Laquelle des applications suivantes est un projecteur de $\mathbb{R}^2$?

   ☐ **a.** $p_1 : (x, y) \mapsto (y, x)$ ☐ **b.** $p_2 : (x, y) \mapsto (1, 0)$ ☐ **c.** $p_3 : (x, y) \mapsto (0, x)$ ☐ **d.** $p_4 : (x, y) \mapsto (0, y)$

2. Lequel des ensembles suivants est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$?

   ☐ **a.** l'ensemble des projecteurs ☐ **b.** l'ensemble des symétries
   ☐ **c.** l'ensemble des homothéties ☐ **d.** l'ensemble des automorphismes de E

Symétrie

1. Lequel des sous-ensembles suivants de $\mathcal{L}(E)$ n'est pas stable par l'application $f \mapsto f \circ f$?

   ☐ **a.** l'ensemble des projecteurs ☐ **b.** l'ensemble des symétries
   ☐ **c.** l'ensemble des endomorphismes non nuls ☐ **d.** l'ensemble des homothéties

2. Soit s une symétrie de l'espace vectoriel E. Laquelle des applications suivantes est un projecteur ?

   ☐ **a.** $s + \operatorname{Id}$ ☐ **b.** $\dfrac{1}{2}(\operatorname{Id} - s)$ ☐ **c.** $s^2 - s$ ☐ **d.** $s^2 + s$

Hyperplan

7.5 Exercices

Espace vectoriel, application linéaire

Définition, propriétés élémentaires

Sous-espace vectoriel

Exercice 1 : Exemples d'espaces vectoriels

1. Les ensembles E suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des suites réelles ? Si oui, le prouver.
   (a) L'ensemble des suites réelles ayant une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) L'ensemble des suites réelles bornées, c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles (u_n) telles qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$$
2. Les ensembles E suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Si oui, le prouver.
   (a) L'ensemble des fonctions 1-périodiques.
   (b) L'ensemble des fonctions croissantes.
   (c) L'ensemble des fonctions qui sont la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.
   (d) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + \mathrm{e}^{t\sin(t)} y(t) = 0.$$

Exercice 2 : Combinaison linéaire

1. Dans $\mathbb{R}^3$, donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que le vecteur $e_1 := (1, -a, 1)$ soit combinaison linéaire de $e_2 := (1, 1, 1)$ et $e_3 := (a, 0, 2)$.
2. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f : x \mapsto \cos^2(x)$ est-elle combinaison linéaire de $g_0 : x \mapsto 1$ et $g_2 : x \mapsto \cos(2x)$?
3. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f : x \mapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire de $g : x \mapsto \cos(x)$ et $h : x \mapsto \sin(x)$?

Exercice 3 : Fonctions trigonométriques

On pose $E := \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions f_n et g_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \cos(nx) \qquad \text{et} \qquad g_n(x) := \cos^n(x).$$

1. Montrer que $\mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2) = \mathrm{Vect}(g_0, g_1, g_2)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in \mathrm{Vect}\,(f_0, \ldots, f_n)$ et $f_n \in \mathrm{Vect}\,(g_0, \ldots, g_n)$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}\,(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \mathrm{Vect}\,(g_0, g_1, \ldots, g_n)$.

Exercice 4 : Espace vectoriel engendré

Soit u, v et w trois vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u, w)$ si et seulement si

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}, \quad \alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \quad \text{et} \quad \beta\gamma \neq 0.$$

Exercice 5 : Union de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E pour laquelle
   $$\forall i, j \in I, \quad \exists k \in I, \quad F_i \cup F_j \subset F_k.$$
   Montrer que $\cup_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Application linéaire

Exercice 6 : Caractérisation des homothéties

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le but de cet exercice est de montrer que f est une homothétie si et seulement si, quel que soit $x \in E$, x et $f(x)$ sont colinéaires.

1. Montrer que si f est une homothétie, quel que soit $x \in E$, x et $f(x)$ sont colinéaires.
2. Réciproquement, on suppose que quel que soit $x \in E$, x et $f(x)$ sont colinéaires.
   (a) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
   (b) Montrer que si x et $y \in E \setminus \{0\}$ sont colinéaires, alors $\lambda_x = \lambda_y$.
   (c) Montrer que si x et $y \in E \setminus \{0\}$ ne sont pas colinéaires, alors $\lambda_x = \lambda_y$.
   (d) Conclure.

Exercice 7 : Automorphisme

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \times F & \longrightarrow & E \times F \\ & (x, y) & \longmapsto & (x, y - u(x)) \end{array}$$

est un automorphisme de $E \times F$.

L'algèbre $\mathcal{L}(E)$

$\mathcal{L}(E, F)$

Exercice 8 : Calcul dans $\mathcal{L}(E)$

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f^2 + f + \mathrm{Id}$. Montrer que f est un automorphisme.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On suppose que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$f^n = 0.$$
   Montrer que $\mathrm{Id}_E + f$ est un automorphisme et calculer son inverse.

Le groupe linéaire

Exercice 9 : Automorphisme de $\mathbb{R}^3$

Soit

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x + z, -2x + y, x + 3z) \end{array}$$

Montrer que $f \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^3\right)$.

Somme, somme directe, projecteur, hyperplan

Somme, somme directe

Exercice 10 : Exercice

Soit v et w deux vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $F + \mathbb{K}v = F + \mathbb{K}w$ si et seulement si

$$\exists u \in F, \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad u = \alpha v + \beta w \quad \text{et} \quad \alpha\beta \neq 0.$$

Exercice 11 : Exercice

Soit E un espace vectoriel et F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$. Vérifiez sur un dessin qu'il est possible que cette inclusion soit stricte.
2. Établir que l'on a $(F \cap G) + (F \cap H) = F \cap [G + (F \cap H)]$.

Exercice 12 : Exercice

E, F et G sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que

$$\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g \iff \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F.$$

Exercice 13 : Pseudo inverse

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

1. Montrer que $E = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u$.
2. Montrer que $u(\operatorname{Im} v) = \operatorname{Im} u$.

Exercice 14 : Rendre directe une somme

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $F+G = E$. On note F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que

$$E = F' \oplus G.$$

Exercice 15 : Supplémentaire

On se place dans $E := \mathbb{R}^3$. On se donne $a \in \mathbb{R}$ et on pose

$$e_1 := (a, a, 1), \quad e_2 := (1, a, 1), \quad e_3 := (2, 1, 1).$$

On pose enfin $A := \operatorname{Vect}(e_1)$ et $B := \operatorname{Vect}(e_2, e_3)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $e_1 = \alpha e_2 + \beta e_3$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que quel que soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y, z) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que A et B soient supplémentaires.

Projecteur

Exercice 16 : Somme de deux projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. On suppose que $p + q$ est un projecteur. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(p + q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q.$$

Exercice 17 : Réduction d'une application linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f^2 - 5f + 6 \operatorname{Id} = 0.$$

1. Montrer que $(f - 2 \operatorname{Id}) \circ (f - 3 \operatorname{Id}) = 0$.
2. En déduire que $E = \operatorname{Ker}(f - 2 \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - 3 \operatorname{Id})$.

Exercice 18 : Projecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et g un projecteur de E. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker} g \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g).$$

2. Soit f un projecteur de E et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g).$$

3. Soit f et g deux projecteurs de E. Montrer que $f \circ g$ est un projecteur si et seulement si

$$\operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} g \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g).$$

Symétrie

Exercice 19 : Centre de $\mathcal{L}(E)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le but de cet exercice est de montrer que les endomorphismes qui commutent avec tous les autres sont les homothéties.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie, alors elle commute avec tous les endomorphismes de E.
2. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme commutant avec tous les endomorphismes de E.
   (a) Soit s une symétrie de E. Montrer que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$ sont stables par f.
   (b) En admettant le fait que toute droite vectorielle admet un supplémentaire, montrer que quel que soit $x \in E$, x et $f(x)$ sont colinéaires.
   (c) Conclure.

Hyperplan

Exercice 20 : Hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H_1, H_2 deux hyperplans de E tels que $H_1 \subset H_2$. Montrer que $H_1 = H_2$.

Chapitre 8

Suites

« Les mathématiciens sont comme les français : quoique vous leur dites, ils le traduisent dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent. »

– Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832)

« M. Cauchy annonce que, pour se conformer au voeu du Conseil, il ne s'attachera plus à donner, comme il a fait jusqu'à présent, des démonstrations parfaitement rigoureuses. »

— Conseil d'instruction de l'École Polytechnique (1825)

8.1 Suite réelle et complexe

8.1.1 Définition

Définition 8.1.1

On appelle *suite numérique* toute famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels, ou de complexes, indexée par $\mathbb{N}$.

Remarque

⇨ Dans la suite de ce chapitre, ainsi que dans tous les chapitres d'analyse, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 8.1.2

- On dit qu'une suite (u_n) vérifie la propriété $\mathcal{P}$ *à partir d'un certain rang* lorsqu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
- On dit qu'une propriété $\mathcal{P}$ est *asymptotique* lorsque, quelles que soient les suites (u_n) et (v_n) égales à partir d'un certain rang, $\mathcal{P}((u_n))$ est vrai si et seulement si $\mathcal{P}((v_n))$ est vrai.

Remarque

⇨ Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}$ est asymptotique, il suffit de se donner deux suites (u_n) et (v_n) égales à partir d'un certain rang telles que $\mathcal{P}(u)$ est vrai et de montrer que $\mathcal{P}(v)$ est vrai.

Exercice 1

⇨ La propriété « est nulle » est-elle asymptotique ? Montrer que la propriété « s'annule une infinité de fois » l'est.

8.1.2 Suite et relation d'ordre

Définition 8.1.3

On dit qu'une suite réelle (u_n) est
- *croissante* lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}.$$
- *décroissante* lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n.$$
- *monotone* lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
- *strictement croissante* lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}.$$
- *strictement décroissante* lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n.$$
- *strictement monotone* lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarques

⇨ Pour étudier la monotonie de la suite (u_n), il est souvent utile de simplifier $u_{n+1} - u_n$ afin de déterminer son signe. Si la suite (u_n) est à valeurs strictement positives, on peut comparer u_{n+1}/u_n à 1. Par exemple, si $a > 0$, la suite de terme général a^n est croissante si $a \geqslant 1$ et décroissante si $a \leqslant 1$.

⇨ Pour étudier la monotonie d'une suite donnée par son terme général, on peut aussi l'écrire $u_n = f(n)$ et étudier la fonction f.

⇨ Les suites constantes sont à la fois croissantes et décroissantes ; ce sont d'ailleurs les seules. Certaines suites ne sont ni croissantes ni décroissantes.

Exercice 2

⇨ Étudier la monotonie des suites de terme général
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}, \qquad \binom{2n}{n}, \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Définition 8.1.4

On dit qu'une suite réelle (u_n) est
- *majorée* lorsque
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M.$$
- *minorée* lorsque
$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m.$$

Les propriétés « est majorée » et « est minorée » sont asymptotiques.

Définition 8.1.5

On dit qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *bornée* lorsque

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M$$

La propriété « est bornée » est asymptotique.

Remarque

⇨ Une combinaison linéaire de suites bornées est bornée. De même, le produit de deux suites bornées est bornée.

Proposition 8.1.6

Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

8.2 Notion de limite

8.2.1 Limite finie

Définition 8.2.1

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite et $l \in \mathbb{K}$. On dit que (u_n) *converge* vers l et on note $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - l| \leqslant \varepsilon.$$

La propriété « converge vers l » est asymptotique.

Remarques

⇨ Si $l \in \mathbb{K}$, la suite constante égale à l converge vers l.

⇨ Si (u_n) est une suite et $l \in \mathbb{K}$, alors (u_n) converge vers l si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - l| < \varepsilon.$$

Cependant, conformément aux bonnes manières de l'analyse, nous éviterons le plus possible d'utiliser cette définition, car elle fait intervenir une inégalité stricte là où une inégalité large suffit.

Définition 8.2.2

— On dit qu'une suite (u_n) est *convergente* lorsqu'il existe $l \in \mathbb{K}$ tel que

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l.$$

Si tel est le cas, l est unique ; on l'appelle limite de la suite (u_n).

— Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est *divergente*.

Exercice 3

⇨ Soit (u_n) une suite convergente d'entiers. Montrer qu'elle est constante à partir d'un certain rang. En déduire que la suite de terme général $(-1)^n$ diverge.

Proposition 8.2.3

Toute suite convergente est bornée.

Proposition 8.2.4

Soit (u_n) une suite convergeant vers $l \in \mathbb{K}$. Alors

$$\overline{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \overline{l} \quad \text{et} \quad |u_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |l|.$$

Proposition 8.2.5

Soit (u_n) et (v_n) des suites convergeant respectivement vers l_1 et $l_2 \in \mathbb{K}$.
— Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors
$$\lambda u_n + \mu v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda l_1 + \mu l_2.$$
— De plus
$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 l_2.$$
— Enfin, si $l_1 \neq 0$, la suite (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang et
$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{l_1}.$$

Exercices 4

⇨ Montrer que l'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

⇨ Soit (u_n) une suite réelle positive telle que la suite de terme général $u_n/(1+u_n)$ converge vers 0. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

Proposition 8.2.6

Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{C}$. Alors
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \quad \iff \quad \left[\operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Re} l \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Im} l\right].$$

8.2.2 Limite infinie

Définition 8.2.7

Soit (u_n) une suite réelle.
— On dit que u_n *tend vers* $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ lorsque
$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant m.$$
Si tel est le cas, on note
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$
— On dit que u_n *tend vers* $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ lorsque
$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant M.$$
Si tel est le cas, on note
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$
Ces propriétés sont asymptotiques. De plus u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si $-u_n$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $n + \alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Proposition 8.2.8

Si u_n admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors cette limite est unique ; on l'appelle limite de la suite (u_n) et on la note
$$\lim_{n\to\infty} u_n.$$

Remarque

⇨ Une suite qui tend vers $+\infty$ est divergente. On dit aussi qu'elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 6

⇨ Une suite non majorée diverge-t-elle toujours vers $+\infty$? Une suite divergeant vers $+\infty$ est-elle toujours croissante à partir d'un certain rang ?

Proposition 8.2.9

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

— Si u_n tend vers $+\infty$ et (v_n) est minorée, alors

$$u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

— Si u_n tend vers $+\infty$ et (v_n) est minorée par $m > 0$, alors

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Proposition 8.2.10

Soit (u_n) une suite réelle.

— Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors il existe un rang à partir duquel $u_n > 0$ et

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

— Si (u_n) converge vers 0 et est strictement positive, alors

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

8.2.3 Limite et relation d'ordre

Proposition 8.2.11

Soit (u_n) une suite réelle admettant $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite.

— Si (u_n) est majorée par $M \in \mathbb{R}$, alors $l \leqslant M$.

— Si (u_n) est minorée par $m \in \mathbb{R}$, alors $l \geqslant m$.

Remarques

⇨ Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergeant respectivement vers l_u et $l_v \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$$

alors $l_u \leqslant l_v$. On dit que les inégalités larges passent à la limite.

⇨ Cependant, les inégalités strictes ne passent pas à la limite.

Proposition 8.2.12

Soit (u_n) une suite réelle admettant $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite.

— Si M est un réel tel que $l < M$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant M.$$

— Si m est un réel tel que $l > m$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant m.$$

Théorème 8.2.13: Théorème des gendarmes

Soit (a_n), (b_n) et (u_n) des suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant u_n \leqslant b_n.$$

On suppose que a_n et b_n admettent la même limite finie $l \in \mathbb{R}$. Alors

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

Exercices 7

⇨ Donner la limite éventuelle de la suite de terme général $\dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}$.

⇨ Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$. Que dire des suites (u_n) et (v_n) ?

Proposition 8.2.14

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.$$

— si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
— si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Exercices 8

⇨ Donner la limite éventuelle de la suite de terme général $n + \sin n$.

⇨ Soit (u_n) une suite réelle telle que la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge vers $\alpha > 0$. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Proposition 8.2.15

Soit (u_n) une suite, $l \in \mathbb{K}$ et (v_n) une suite réelle positive telle que
— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - l| \leqslant v_n$,
— $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Alors

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

Exercice 9

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite de terme général

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\alpha}.$$

8.2.4 Théorèmes usuels et limites usuelles

Proposition 8.2.16

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles ayant pour limites respectives l_1 et $l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.
— Si $l_1 + l_2$ n'est pas une forme indéterminée

$$u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 + l_2.$$

— Si $l_1 l_2$ n'est pas une forme indéterminée

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 l_2.$$

— Si $1/l_1$ n'est pas une forme indéterminée

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{l_1}.$$

Proposition 8.2.17

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors
$$\frac{1}{n^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Proposition 8.2.18

Soit ω un réel positif.
- Si $\omega > 1$, alors $\omega^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si $\omega < 1$, alors $\omega^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Proposition 8.2.19

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$
- Si $\omega < 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Si $\omega > 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 10

⇨ Déterminer la limite éventuelle des suites de terme général
$$\frac{\mathrm{e}^n}{n!}, \qquad \frac{n}{(1+\mathrm{i})^n}.$$

Proposition 8.2.20

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$. On suppose qu'il existe $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) tels que
$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l.$$
Si (u_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ admettant a pour limite, alors
$$f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

Exercice 11

⇨ Déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

8.2.5 Suite extraite

Définition 8.2.21

On appelle *extractrice* toute application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Remarque

⇨ Les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_1(n) := n+1, \qquad \varphi_2(n) := 2n, \qquad \varphi_3(n) := 2n+1$$
sont des extractrices.

Proposition 8.2.22

Si φ est une extractrice, alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geqslant n.$$

Définition 8.2.23

Soit (u_n) une suite. On appelle *suite extraite* (ou *sous-suite*) de (u_n) toute suite du type $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ où φ est une extractrice.

Proposition 8.2.24

Si (u_n) est une suite admettant $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) pour limite, toute sous-suite de (u_n) tend vers l.

Remarque

⇨ Pour montrer qu'une suite (u_n) n'admet pas de limite, il suffit de trouver deux extractrices φ_1 et φ_2 telles que les suites de terme général $u_{\varphi_1(n)}$ et $u_{\varphi_2(n)}$ ont vers des limites différentes.

Exercices 12

⇨ Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{n} + (-1)^n$ n'admet pas de limite.

⇨ Soit (u_n) une suite réelle non majorée. Montrer qu'on peut en extraire une suite divergeant vers $+\infty$.

Proposition 8.2.25

Soit (u_n) une suite et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) tels que
$$u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \quad \text{et} \quad u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$
Alors
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

8.3 Propriétés de $\mathbb{R}$

8.3.1 Voisinage

Définition 8.3.1

— Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un *voisinage* de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \leqslant \varepsilon\} = [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\,.$$

— On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un *voisinage* de $+\infty$ lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que
$$\mathcal{V} = [m, +\infty[\,.$$

— On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un *voisinage* de $-\infty$ lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que
$$\mathcal{V} =]-\infty, M]\,.$$

— Soit $a \in \mathbb{C}$. On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}$ est un *voisinage* de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leqslant \varepsilon\}.$$

Remarque

⇨ La notion de voisinage permet d'unifier la notion de limite. Si (u_n) est une suite réelle et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$
si et seulement si, quel que soit le voisinage $\mathcal{V}$ de l, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in \mathcal{V}$.

Proposition 8.3.2

L'intersection d'un nombre fini de voisinages de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) est un voisinage.

8.3.2 Densité

Définition 8.3.3

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$ lorsque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad |x - a| \leqslant \varepsilon.$$

Remarques

⇨ Autrement dit, A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si, quels que soient $x \in \mathbb{R}$ et le voisinage $\mathcal{V}$ de x, $\mathcal{V} \cap A \neq \varnothing$.

⇨ Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $x \leqslant a \leqslant y$.

Proposition 8.3.4

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x.

Proposition 8.3.5

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque

⇨ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

8.3.3 Propriété de la borne supérieure

Définition 8.3.6

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A admet une *borne supérieure* lorsque l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément. Si tel est le cas, on le note $\sup A$.

Remarques

⇨ Soit $b \in \mathbb{R}$. Alors $]-\infty, b]$ et $]-\infty, b[$ admettent b pour borne supérieure.

⇨ Si une partie A de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément, alors elle admet une borne supérieure et $\sup A = \max A$. Cependant, il est possible que A admette une borne supérieure qui n'appartienne pas à A ; dans ce cas, A n'admet pas de plus grand élément.

⇨ Si une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, alors elle est non vide et majorée.

Proposition 8.3.7

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est la borne supérieure de A si et seulement si

— α est un majorant de A
$$\forall a \in A, \quad a \leqslant \alpha.$$
— α est le plus petit des majorants de A
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad a \geqslant \alpha - \varepsilon.$$

Remarques

⇨ Si A est une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, dire que α est un majorant de A s'écrit : $\forall a \in A \quad a \leqslant \alpha$. Par contre, pour montrer (ou exploiter le fait) que α est le plus petit des majorants de A, deux phrases équivalentes s'offrent à nous.

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, \quad [\forall a \in A, \quad a \leqslant \beta] \quad \Longrightarrow \quad \alpha \leqslant \beta$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad a \geqslant \alpha - \varepsilon.$$

Nous emploierons le plus souvent la seconde.

⇨ Pour exploiter le fait que α est le plus petit des majorants de A, on peut remplacer l'inégalité $a \geqslant \alpha - \varepsilon$ par une inégalité stricte

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad a > \alpha - \varepsilon.$$

Proposition 8.3.8

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est la borne supérieure de A si et seulement si c'est un majorant de A et qu'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers α.

Exercice 13

⇨ Montrer que $A \coloneqq \left\{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet une borne supérieure que l'on calculera.

Théorème 8.3.9

Une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure si et seulement si elle est non vide et majorée.

Exercice 14

⇨ Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. On suppose que A est non vide et que B est majorée. Comparer $\sup A$ et $\sup B$.

Définition 8.3.10

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A admet une *borne inférieure* lorsque l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément. Si tel est le cas, on le note $\inf A$.

Proposition 8.3.11

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est la borne inférieure de A si et seulement si

— α est un minorant de A

$$\forall a \in A, \quad a \geqslant \alpha.$$

— α est le plus grand des minorants de A

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad a \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

Proposition 8.3.12

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est la borne inférieure de A si et seulement si c'est un minorant de A et qu'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers α.

Exercice 15

⇨ Montrer que $A \coloneqq \left\{\frac{4}{n} + n : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet une borne inférieure que l'on calculera.

Proposition 8.3.13

Une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure si et seulement si elle est non vide et minorée.

Définition 8.3.14

On dit qu'une partie C de $\mathbb{R}$ est *convexe* lorsque

$$\forall a, b \in C, \quad a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad [a, b] \subset C.$$

Théorème 8.3.15

Les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Remarque

⇨ On en déduit que l'intersection d'une famille d'intervalles est un intervalle.

8.4 Suite monotone

8.4.1 Suite monotone

Théorème 8.4.1: Théorème de la limite monotone

Toute suite croissante majorée est convergente.

Remarque

⇨ Si (u_n) est croissante et admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant l.$$

De plus, si (u_n) est strictement croissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < l.$$

Exercices 16

⇨ Soit $\alpha > 1$ et (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Montrer que pour tout $k \geqslant 2$

$$\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}.$$

En déduire la convergence de la suite (u_n).

⇨ La limite de l'exemple précédent est notée $\zeta(\alpha)$. On définit ainsi une fonction ζ de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, appelée fonction zéta de Riemann. Montrer que ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$.

Proposition 8.4.2

Soit (u_n) une suite croissante.
- Si elle est majorée, alors elle est convergente.
- Sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 17

⇨ Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que $u_{2n} - u_n$ est minoré par un réel $\alpha > 0$. En déduire que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Proposition 8.4.3

Toute suite décroissante minorée est convergente.

Proposition 8.4.4

Soit (u_n) une suite décroissante.
- Si elle est minorée, alors elle est convergente.
- Sinon, elle diverge vers $-\infty$.

8.4.2 Étude des suites définies par $u_{n+1} := f(u_n)$

Remarques

⇨ Lorsqu'on étudie une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} := f(u_n)$, on procède comme suit.
- *Étude de f et tracé de son graphe*
  On commencera par tracer le graphe de f en prenant soin de placer correctement ce graphe par rapport à la droite d'équation $y = x$. En pratique, on étudiera les variations de f, ses limites aux bornes du domaine de définition, ainsi que le signe de $\varphi(x) := f(x) - x$.

— *Tracé des escaliers et conjectures*
  Dans le cas où f est croissante, un dessin de l'*escalier* des premiers termes de la suite (u_n) permet d'établir une conjecture concernant son comportement asymptotique en fonction de α.
— *Recherche d'un intervalle stable par f*
  On cherche ensuite un intervalle I de $\mathbb{R}$, stable par f, tel que $u_0 \in I$. On en déduit que la relation de récurrence définit bien une suite (u_n) et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I.$$

— *Démonstration des résultats annoncés*
  Si φ est de signe constant sur I, alors (u_n) est monotone. C'est le signe de φ qui donne le sens de variation de (u_n). Elle admet donc une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ qui est soit une extrémité de I, soit un élément de I. Dans le cas où $l \in I$ et f est continue en l, on a $f(l) = l$.

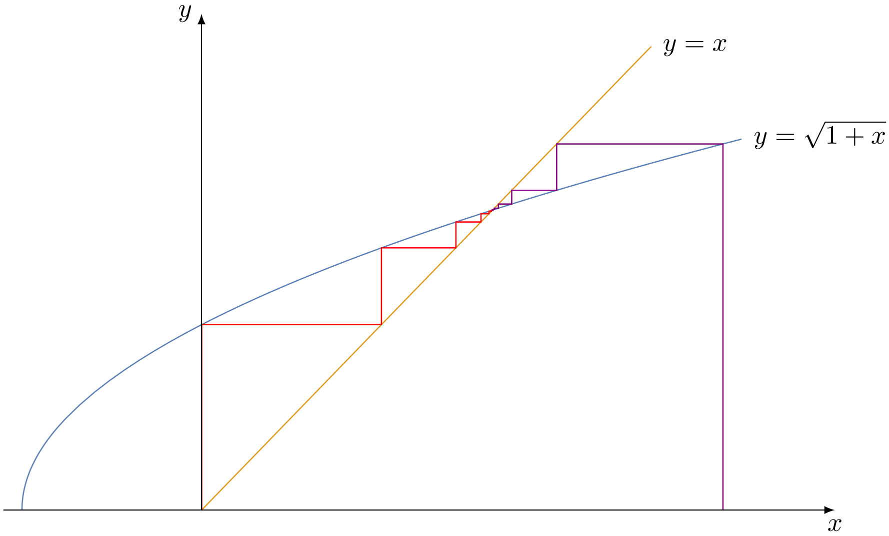
⇨ Remarquons que la croissance seule de f permet de montrer la monotonie de (u_n).

Exercices 18

⇨ Soit $\alpha \geqslant 0$ et (u_n) la suite définie par

$$u_0 \coloneqq \alpha \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq \sqrt{1 + u_n}.$$

Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).



⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par

$$u_0 \coloneqq \alpha \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq \frac{u_n^2 + 2}{3}.$$

Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

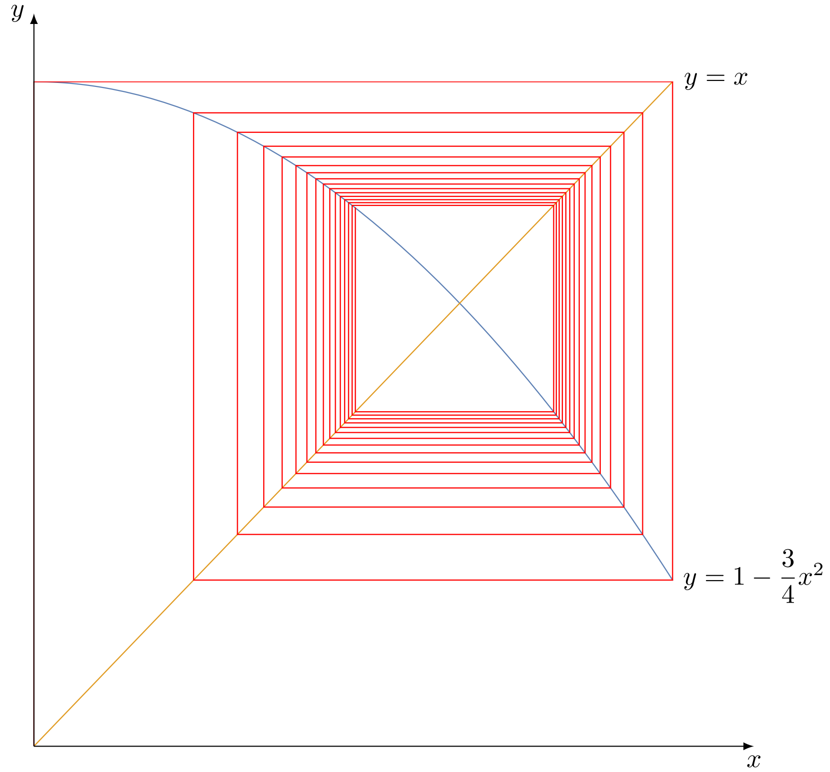
Remarque

⇨ Si f est décroissante, on étudie les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Ces suites vérifient une relation de récurrence faisant intervenir $f \circ f$. On commence par étudier la suite (u_{2n}). Comme f est décroissante, $f \circ f$ est croissante, et on est ramené au cas précédent. Puis, en remarquant que $u_{2n+1} = f(u_{2n})$, on en déduit la limite, si elle existe, de (u_{2n+1}). Si ces deux suites admettent la même limite $l \in \mathbb{R}$, alors (u_n) converge vers l. Dans le cas contraire, la suite (u_n) est divergente.

Exercice 19

⇨ Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 \coloneqq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq 1 - \frac{3}{4}u_n^2.$$



8.4.3 Suites adjacentes

Définition 8.4.5

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* lorsque

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$,
— (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante,
— $v_n - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Remarque

⇨ Si deux suites (u_n) et (v_n) vérifient les deux derniers points, alors elles vérifient le premier point. En théorie il est donc inutile de le vérifier, mais l'usage veut qu'on le fasse.

Proposition 8.4.6

Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant l \leqslant v_n.$$

Exercice 20

⇨ Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad v_n \coloneqq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

sont adjacentes. En utilisant une comparaison avec des intégrales, montrer qu'elles convergent vers $\ln 2$.

8.4.4 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 8.4.7: Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Exercice 21

⇨ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (p_n) une suite d'entiers relatifs et (q_n) une suite d'entiers naturels non nuls tels que

$$\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x.$$

Montrer que $q_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

8.5 Qcm

Suite réelle et complexe

Définition

Suite et relation d'ordre

1. Soit $a > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n \coloneqq n!/a^n$ est croissante à partir d'un certain rang

   ☐ **a.** pour tout $a > 0$
   ☐ **b.** seulement pour a dans $]0,1]$
   ☐ **c.** seulement pour $a \geqslant 1$
   ☐ **d.** pour aucune valeur de a

2. La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n \coloneqq 2n + (-1)^n$ est

   ☐ **a.** croissante
   ☐ **b.** décroissante
   ☐ **c.** non monotone
   ☐ **d.** croissante et décroissante selon la parité de n

Notion de limite

Limite finie

1. Laquelle des conditions suivantes est incompatible avec le fait que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit périodique ?

   ☐ **a.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
   ☐ **b.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente
   ☐ **c.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante
   ☐ **d.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que

   $$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n} + \varepsilon$$

   pour $n \geqslant N$. Alors $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 car

   ☐ **a.** $0 \leqslant \lim u_n \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ donc $\lim u_n = 0$
   ☐ **b.** $1/n + \varepsilon$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et ε tend vers 0
   ☐ **c.** $1/n$ tend vers 0 donc si $\varepsilon > 0$ est fixé, $0 \leqslant u_n \leqslant 2\varepsilon$ pour n assez grand
   ☐ **d.** En prenant $\varepsilon \coloneqq 1/n$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 2/n$ pour n assez grand

3. Lorsque t est un nombre réel, la suite $u_n \coloneqq \mathrm{e}^{int}$ converge pour

   ☐ **a.** $t \equiv 0\ [2\pi]$
   ☐ **b.** $t \equiv 0\ [\pi]$
   ☐ **c.** aucune valeur de t
   ☐ **d.** tout réel t

Limite infinie

Limite et relation d'ordre

1. Soit I un intervalle et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I qui converge. Pour quel intervalle I est-on certain que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans I ?

   ☐ **a.** $]0,1[$
   ☐ **b.** $[0,1]$
   ☐ **c.** $[0,1[$
   ☐ **d.** $]0,+\infty[$

2. Parmi les conditions suivantes, laquelle est suffisante pour que la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tende vers 1 ?

   ☐ **a.** $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1
   ☐ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par 1 ou décroissante et minorée par 1
   ☐ **c.** $|u_n - 1| < 1/n$ à partir d'un certain rang
   ☐ **d.** la partie entière de u_n tend vers 1

3. Parmi les conditions suivantes, laquelle est nécessaire pour que la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tende vers 1 ?

☐ **a.** $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1
☐ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par 1 ou décroissante et minorée par 1
☐ **c.** $|u_n - 1| < 1/n$ à partir d'un certain rang
☐ **d.** la partie entière de u_n tend vers 1

4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que
$$1 - \frac{1}{n} < u_n < 2 + \frac{1}{n}$$
pour tout $n \geqslant 1$, alors

☐ **a.** $\lim u_n \in [1, 2]$ ☐ **b.** $\lim u_n \in \,]1, 2[$
☐ **c.** $\lim u_n = \dfrac{3}{2}$ ☐ **d.** u_n ne converge pas forcément

Théorèmes usuels et limites usuelles

1. Quelle est la limite de la suite $n^{1/n}$?

☐ **a.** 0 ☐ **b.** 1 ☐ **c.** e ☐ **d.** $+\infty$

2. Quelle est la limite de $u_n := \frac{4^n-3^n}{2^n-1}$?

☐ **a.** $+\infty$ ☐ **b.** 2 ☐ **c.** 1 ☐ **d.** 2^n

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 1. Alors la suite $v_n := u_n^n$

☐ **a.** tend aussi vers 1 ☐ **b.** converge vers 0 ☐ **c.** diverge vers $+\infty$ ☐ **d.** est une forme indeterminée

Suite extraite

1. Laquelle des suites suivantes est extraite de la suite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$?

☐ **a.** $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$ ☐ **b.** $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ ☐ **c.** $(u_{2n+2})_{n\geqslant 0}$ ☐ **d.** $(u_{n^2})_{n\geqslant 0}$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang ?

☐ **a.** u_n tend vers 0 ☐ **b.** $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0
☐ **c.** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 ☐ **d.** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$

Propriétés de $\mathbb{R}$

Voisinage

Densité

1. Parmi les parties suivantes, laquelle est dense dans $\mathbb{R}$?

☐ **a.** $\mathbb{Z}$ ☐ **b.** $\left\{\dfrac{p}{q} : 0 < p < q\right\}$ ☐ **c.** $\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ☐ **d.** $\{2k\pi : k \in \mathbb{Q}\}$

Propriété de la borne supérieure

1. Quelle est la borne supérieure de l'intervalle $[0, 1[$?

☐ **a.** 1^- ☐ **b.** 1 ☐ **c.** $[1, +\infty[$ ☐ **d.** le plus grand réel strictement inférieur à 1

2. Quelle est la borne supérieure de $\{x \in [-2, 2] \mid x^2 < 2\}$?

☐ **a.** 4 ☐ **b.** $\sqrt{2}$ ☐ **c.** $-\sqrt{2}$ ☐ **d.** 0

3. Parmi les ensembles suivants, lequel admet une borne supérieure ?

☐ **a.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x < x+1\}$ ☐ **b.** $\{x \in \mathbb{R}_+ \mid x < -1\}$

☐ **c.** $\left\{x \in [-2\pi, 2\pi] \,\middle|\, \sin x = \dfrac{1}{3}\right\}$ ☐ **d.** $\mathbb{Z}$

4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction décroissante, la quantité $\operatorname{Sup}\left\{f\left(x^2\right) : x \in [-1,1]\right\}$ vaut

☐ **a.** $f(0)$ ☐ **b.** $f(1)$ ☐ **c.** $f(-1)$ ☐ **d.** $\max(f(1), f(-1))$

5. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Laquelle des propositions suivantes signifie que le réel a est la borne supérieure de A.

☐ **a.** $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$ ☐ **b.** $a \in A$ et $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$

☐ **c.** $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$ et pour tout $b < a$ on peut trouver un élément de A dans l'intervalle $]b, a]$

☐ **d.** $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$ et on peut trouver $b < a$ tel que l'intervalle $]b, a[$ soit inclus dans A

Suite monotone

Suite monotone

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive et décroissante. Alors

☐ **a.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est positive ou nulle
☐ **b.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
☐ **c.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est strictement positive
☐ **d.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et est constante à partir d'un certain rang

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante. Laquelle des conditions suivantes n'est pas suffisante pour affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

☐ **a.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée
☐ **b.** la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge
☐ **c.** la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0
☐ **d.** la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Étude des suites définies par $u_{n+1} \coloneqq f(u_n)$

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et le relation de récurrence $u_{n+1} \coloneqq u_n + u_n^2$. Alors

☐ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge car elle est croissante

☐ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante donc elle tend vers $+\infty$

☐ **c.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante positive donc converge et sa limite l vérifie $l = l + l^2$ donc est nulle

☐ **d.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et non majorée

Suites adjacentes

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive. Laquelle des conditions suivantes suffit pour dire que les suites $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes ?

☐ **a.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
☐ **b.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
☐ **c.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0
☐ **d.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers 0

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle croissante. On pose $v_n \coloneqq u_n + 1/n$. Les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes lorsque

☐ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge ☐ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée

☐ **c.** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$ ☐ **d.** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \geqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$

3. Soit $u_n \coloneqq 1 - 1/n$ pour $n \geqslant 1$. Si (v_n) est une suite adjacente avec (u_n), alors

☐ **a.** pour tout n, on a $v_n > 1$
☐ **b.** pour tout n, on a $v_n - u_n \geqslant 1/n$
☐ **c.** $\lim v_n > 1$
☐ **d.** (v_n) est croissante

Théorème de Bolzano-Weierstrass

1. Le théorème de Bolzano-Weierstrass dit

☐ **a.** qu'une suite réelle bornée converge
☐ **b.** qu'une suite réelle bornée admet une sous-suite qui converge
☐ **c.** que toute sous-suite d'une suite réelle bornée converge
☐ **d.** qu'une suite qui converge est bornée

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Combien y a-t-il de sous-suites de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui convergent ?

☐ **a.** il n'y en a pas forcément
☐ **b.** il y en a au moins une
☐ **c.** il y en a toujours une infinité
☐ **d.** il n'y en a qu'un nombre fini

8.6 Exercices

Suite réelle et complexe

Définition

Suite et relation d'ordre

Notion de limite

Limite finie

Exercice 1 : Minimum et Maximum

Soit u et v deux suites réelles convergeant respectivement vers l_u et l_v. Montrer que les suites de terme général $\max(u_n, v_n)$ et $\min(u_n, v_n)$ sont convergentes et calculer leurs limites.

Exercice 2 : Plus grand et plus petit élément

Soit (u_n) une suite de réels. On pose

$$A \coloneqq \{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

1. On suppose que (u_n) diverge vers $+\infty$. Montrer que A admet un plus petit élément.
2. On suppose que (u_n) converge. Montrer que A admet un plus petit ou un plus grand élément.

Exercice 3 : Quelques calculs de limite

Montrer que les suites suivantes, définies par leur terme général, admettent une limite que l'on calculera.

$$\textbf{a. } \frac{\sin(n^3)}{n}, \qquad \textbf{b. } \frac{n^3+5n}{5n^3+\cos n+\frac{1}{n^2}}, \qquad \textbf{c. } \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}, \qquad \textbf{d. } \sqrt[n]{3+\sin n},$$

$$\textbf{e. } \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n, \qquad \textbf{f. } \operatorname{Arctan}\left(\frac{n^2-n\cos n+(-1)^n}{\ln n+n^2}\right), \qquad \textbf{g. } \left(5\sin\frac{1}{n^2}+\frac{1}{5}\cos n\right)^n,$$

$$\textbf{h. } \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor, \qquad \textbf{i. } \left(a+\frac{b}{n}\right)^n \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont réels et } a \geqslant 0.$$

Exercice 4 : Une manipulation fine d'ε

Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$\forall k, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{k}{n} + \frac{1}{k}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que (u_n) converge vers 0 de deux manières distinctes.

1. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\forall n \geqslant 1, \quad |u_n| \leqslant \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

   (b) En déduire que (u_n) converge vers 0.
2. Montrer directement ce résultat en choisissant judicieusement k.

Exercice 5 : Théorème de Cesàro

Étant donnée une suite complexe (u_n), on définit la suite (c_n) par

$$\forall n \geqslant 1, \quad c_n \coloneqq \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

appelée moyenne de Cesàro de la suite (u_n).

1. On suppose dans cette question que (u_n) est convergente. Il existe donc $l \in \mathbb{C}$ tel que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

   On souhaite montrer que (c_n) converge vers l.

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant N_0, \quad |c_n - l| \leqslant \frac{|u_1 - l| + \cdots + |u_{N_0-1} - l|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

(b) En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad |c_n - l| \leqslant \varepsilon$$

et conclure.

2. Réciproquement, on suppose (c_n) convergente. Peut-on en déduire que (u_n) est convergente ?
3. Que dire si (u_n) est une suite réelle divergeant vers $+\infty$?

Exercice 6 : Applications du théorème de Cesàro

Dans cet exercice, on pourra utiliser librement le théorème de Cesàro.

1. Soit (u_n) une suite complexe telle que $u_{n+1} - u_n$ converge vers $l \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

2. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs convergeant vers un réel $l > 0$. Montrer que

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

Exercice 7 : Autour de Cesàro

Soit (u_n) une suite complexe convergeant vers $l \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n := \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ku_k$$

converge vers $l/2$.

2. Montrer que la suite (w_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n := \frac{\binom{n}{0}u_0 + \binom{n}{1}u_1 + \cdots + \binom{n}{n}u_n}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k$$

converge vers l.

Exercice 8 : Produit de Cauchy

Soit (u_n) et (v_n) deux suites complexes convergeant vers 0. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leqslant M.$$

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Limite infinie

Limite et relation d'ordre

Exercice 9 : Calcul de limite

1. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{p+1} \leqslant \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leqslant \frac{1}{p}.$$

2. En déduire la limite de la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Exercice 10 : Calcul de limite

Déterminer les limites des suites de terme général

$$\textbf{a. } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}, \qquad \textbf{b. } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad \textbf{c. } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}, \qquad \textbf{d. } \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!}.$$

Exercice 11 : Exercice

Soit (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $[0,1]$ telles que

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers 1.

Théorèmes usuels et limites usuelles

Suite extraite

Exercice 12 : Suites divergentes

Montrer que les suites suivantes, définies par leur terme général, sont divergentes

$$\textbf{a. } \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right), \qquad \textbf{b. } \frac{5n^2+\sin n}{2(n+1)^2\cos\frac{n\pi}{5}}, \qquad \textbf{c. } \frac{2+n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right)}.$$

Exercice 13 : Autour de la notion d'extractrice

1. Soit (u_n) une suite réelle prenant un nombre fini de valeurs. Montrer que l'on peut en extraire une suite constante.
2. Soit (u_n) une suite réelle ne divergeant pas vers $+\infty$. Montrer que l'on peut en extraire une suite majorée.
3. Soit (u_n) une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes.
   — Il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers l.
   — Quel que soit $\varepsilon > 0$, l'ensemble
   $$A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - l| \leqslant \varepsilon\}$$
   est infini.

   Donner une exemple d'une suite non convergente vérifiant cette propriété.
4. Montrer que de toute suite réelle divergeant vers $+\infty$, on peut extraire une suite croissante.

Exercice 14 : Convergence et suites extraites

1. Soit (u_n) une suite réelle croissante. On suppose que (u_n) admet une suite extraite convergente. Montrer que (u_n) converge.
2. Montrer que si les suites extraites de terme général u_{3n}, u_{3n+1} et u_{3n+2} convergent vers le même complexe l, alors (u_n) converge vers l.
3. On suppose qu'il existe un réel l tel que pour tout entier $k \geqslant 2$, la suite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Peut-on en déduire la convergence de la suite (u_n) ?

Propriétés de $\mathbb{R}$

Voisinage

Densité

Exercice 15 : Partie dense

On pose

$$A := \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \forall x, y \in A, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}, \qquad & nx + my \in A \\ \forall x, y \in A, \qquad & xy \in A. \end{aligned}$$

2. En déduire que la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \left(\sqrt{2}-1\right)^n$$

est une suite d'éléments de A convergeant vers 0.

3. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Propriété de la borne supérieure

Exercice 16 : Comparaison de deux ensembles

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (a,b) \in A \times B \quad a \leqslant b$$

1. Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.
2. Si l'on suppose maintenant que quel que soit $(a,b) \in A \times B$ on a $a < b$, peut-on en conclure que $\sup(A) < \inf(B)$?

Exercice 17 : Borne supérieure

Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \sup(A) - \inf(A).$$

Exercice 18 : Calcul de bornes supérieures

Déterminer, si elles ou ils existent, les bornes supérieures, bornes inférieures, plus grands éléments, plus petits éléments des parties de $\mathbb{R}$ suivantes.

$$\begin{aligned}
A &:= \left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{p} : (n,p) \in {\mathbb{N}^*}^2\right\},\\
B &:= \left\{\frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}^*\right\},\\
C &:= \left\{\frac{1}{n}+(-1)^p : (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}\right\}.
\end{aligned}$$

Exercice 19 : Bornes supérieures

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées. Soit λ un nombre réel. On pose

$$\begin{aligned}
C &:= \{a+b : a \in A \quad b \in B\},\\
D &:= \{\lambda \cdot a : a \in A\},\\
E &:= \{a \cdot b : a \in A \quad b \in B\}.
\end{aligned}$$

1. Montrer que $\sup(C)$ existe et vaut $\sup(A)+\sup(B)$.
2. Que peut-on dire de l'existence et de la valeur de $\sup(D)$, $\sup(E)$? On pourra formuler des hypothèses supplémentaires adéquates sur A et B.

Exercice 20 : Un théorème de point fixe

Soit $I = [a,b]$ avec $a < b$ et soit $f : I \to I$ une application croissante. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = c$. Considérer pour cela la partie

$$A = \{x \in I \mid f(x) > x\}.$$

Quelle est l'interprétation géométrique de cette propriété en termes du graphe de f ?

Suite monotone

Suite monotone

Exercice 21 : Moyenne arithmético-géométrique

Soit a et b deux réels positifs. Soit (u_n) et (v_n) les suites initialisées par $u_0 \coloneqq a$ et $v_0 \coloneqq b$ et définies par la récurrence

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} \coloneqq \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} \coloneqq \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. (a) Montrer que (u_n) et (v_n) sont bien définies, puis que

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n \leqslant v_n.$$

   (b) En déduire la monotonie des suites (u_n) et (v_n).
   (c) Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite que l'on note $M(a, b)$.
2. (a) Calculer $M(0, 1)$ et $M(1, 1)$.
   (b) Montrer que si $0 \leqslant x \leqslant y$, alors $M(1, x) \leqslant M(1, y)$.

Exercice 22 : Suite définie implicitement

Pour tout $n \geqslant 2$, on définit la fonction $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) \coloneqq x^n - nx + 1.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe un unique $x \in [0, 1]$ tel que $f_n(x) = 0$. On note cet élément u_n.
2. Pour tout $n \geqslant 2$, déterminer le signe de $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n)$. En déduire que (u_n) est monotone.
3. Montrer que (u_n) converge vers 0.
4. Montrer que

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

   c'est-à-dire que nu_n tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Étude des suites définies par $u_{n+1} \coloneqq f(u_n)$

Exercice 23 : Quelques applications directes du cours

Étudier les suites (u_n) définies ci-dessous.

1. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq u_n(1 - u_n)$.
2. $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq 2\ln(1 + u_n)$.
3. $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq \frac{3}{2+u_n}$.

Exercice 24 : Un point fixe attractif, puis répulsif

Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = a \cdot \frac{1 + a^2}{1 + x^2}.$$

Soit $\alpha \geqslant 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 \coloneqq \alpha$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq f(u_n).$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence éventuelle de la suite (u_n).

1. (a) Étudier la monotonie de f ainsi que la position de son graphe par rapport à la première bissectrice. On montrera en particulier que $x \in \mathbb{R}_+$ est un point fixe de f si et seulement si il est racine de

$$P(x) \coloneqq (x - a)(x^2 + ax + (1 + a^2)).$$

   (b) Tracer sur le même dessin le graphe de f ainsi que la première bissectrice.
2. (a) Étudier la monotonie de $f \circ f$.
   (b) Montrer que $x \in \mathbb{R}_+$ est un point fixe de $f \circ f$ si et seulement si il est racine du polynôme

$$Q(x) \coloneqq (x - a)(x^2 + ax + (1 + a^2))(x^2 - a(1 + a^2)x + 1).$$

(c) Étudier la position du graphe de $f \circ f$ par rapport à la première bissectrice en discutant selon les valeurs de a. Dans les différents cas, on tracera le graphe de $f \circ f$ ainsi que la première bissectrice.

Dans la suite de l'exercice, on définit la suite (v_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \coloneqq u_{2n}.$$

On remarquera que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)$.

3. Montrer que la suite (v_n) est monotone et bornée.
4. On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.
   (a) Montrer que (v_n) converge et calculer sa limite.
   (b) Qu'en déduire pour la suite (u_n) ?
5. Dans cette question, on suppose que $a > 1$.
   (a) Si $\alpha < a$, montrer que (v_n) converge vers un réel a_1 strictement inférieur à a. En déduire que la suite (u_n) diverge.
   (b) Que dire si $u_0 > a$? Si $u_0 = a$?

Suites adjacentes

Exercice 25 : Suites adjacentes

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes.

$$\textbf{a.}\ u_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

$$\textbf{b.}\ u_n \coloneqq \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{et} \quad v_n \coloneqq \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n,$$

Exercice 26 : e est irrationnel

Le but de cet exercice est de montrer que e est un nombre irrationnel.

1. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad v_n \coloneqq u_n + \frac{1}{nn!}.$$

   (a) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (b) On note l leur limite commune. On suppose que l est rationnel et on note $l = \frac{p}{q}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}.$$

   (c) Conclure à une absurdité en choisissant $n = q$.
2. Le but de cette question est de montrer que $l = \mathrm{e}$.
   (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

   (b) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

   puis conclure.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Exercice 27 : Récurrence

Soit (u_n) une suite complexe telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{2^n}.$$

On définit la suite (m_n) en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n \coloneqq \max(|u_n|, |u_{n+1}|)$.

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m_{n+1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) m_n.$$
2. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m_n \leqslant \mathrm{e}^2 m_0$$
puis que (u_n) est bornée.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe donc une extractice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge.

3. Déterminer un réel a tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_{\varphi(n)} - u_n\right| \leqslant \frac{a}{2^n}.$$
4. En déduire que la suite (u_n) converge.

Chapitre 9

Matrices

9.1 Matrice

9.1.1 Matrice

Définition 9.1.1

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $q, p \in \mathbb{N}$. On appelle *matrice* à q lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute famille $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1, q]\!] \times [\![1, p]\!]$.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{q,1} & \cdots & a_{q,p} \end{pmatrix} & i \end{array}$$

On note $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à q lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque

⇨ On appelle *matrice nulle* à q lignes et p colonnes et on note $0_{q,p}$ ou plus simplement 0 la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 9.1.2

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, on définit

— la famille $(l_1, \ldots, l_q)$ des *vecteurs ligne* de A, où pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $l_i \coloneqq (a_{i,1}, \ldots, a_{i,p}) \in \mathbb{K}^p$.

— la famille $(c_1, \dots, c_p)$ des *vecteurs colonne* de A, où pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $c_j := (a_{1,j}, \dots, a_{q,j}) \in \mathbb{K}^q$.

Définition 9.1.3

On dit qu'une matrice A est
- une *matrice colonne* lorsqu'elle ne possède qu'une seule colonne.
- une *matrice ligne* lorsqu'elle ne possède qu'une seule ligne.

Remarque

⇨ Si $n \in \mathbb{N}$, l'application φ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, qui à $(x_1, \dots, x_n)$ associe

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est une bijection. Elle permet d'identifier $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, identification que nous ferons parfois dans ce cours. Cependant, on ne se permettra pas d'identifier $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, cette identification permet de considérer que les vecteurs colonne de A sont des éléments de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ et donc des matrices colonne.

Définition 9.1.4

On appelle *transposée* de $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et on note $A^\top$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs lignes de A. Autrement dit

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \forall j \in [\![1, q]\!], \quad \left[A^\top\right]_{i,j} := a_{j,i}.$$

Exemple

⇨ Si on pose

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K}), \quad \text{alors} \quad A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K}).$$

Proposition 9.1.5

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors

$$\left(A^\top\right)^\top = A.$$

9.1.2 Matrice carrée

Définition 9.1.6

On dit qu'une matrice est *carrée* lorsqu'elle possède autant de lignes que de colonnes. L'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 9.1.7

On appelle *matrice identité* et on note I_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad [I_n]_{i,j} := \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 9.1.8

— On dit que $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \Longrightarrow d_{i,j} = 0.$$

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales à n lignes et n colonnes.
— Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on note $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

— Les matrices $\mathrm{Diag}(\lambda, \dots, \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ sont appelées *matrices scalaires.*

Définition 9.1.9

On dit que $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i > j \Longrightarrow t_{i,j} = 0.$$

On note $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à n lignes et n colonnes. Graphiquement, une matrice triangulaire supérieure T s'écrit

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Remarque

⇨ On dit qu'une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire inférieure lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad j > i \Longrightarrow t_{i,j} = 0.$$

Autrement dit T est triangulaire inférieure si et seulement si $T^\top$ est triangulaire supérieure.

Définition 9.1.10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
— On dit que A est *symétrique* lorsque $A^\top = A$ c'est-à-dire lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad a_{j,i} = a_{i,j}.$$

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques à n lignes et n colonnes.
— On dit que A est *antisymétrique* lorsque $A^\top = -A$ c'est-à-dire lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad a_{j,i} = -a_{i,j}.$$

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques à n lignes et n colonnes.

Remarque

⇨ Les formes générales d'une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et d'une matrice antisymétrique $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{1,n} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 9.1.11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *trace* de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme de ses coefficients diagonaux.

$$\mathrm{tr}(A) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

9.2 Opérations sur les matrices

9.2.1 Combinaison linéaire

Définition 9.2.1

— Soit $A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit $A+B$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall i \in [\![1,q]\!], \quad \forall j \in [\![1,p]\!], \quad [A+B]_{i,j} \coloneqq a_{i,j} + b_{i,j}.$$

— Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $\lambda \cdot A$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall i \in [\![1,q]\!], \quad \forall j \in [\![1,p]\!], \quad [\lambda \cdot A]_{i,j} \coloneqq \lambda a_{i,j}.$$

Remarque

⇨ Les matrices scalaires sont les λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 9.2.2

$(\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont l'élément neutre est la matrice nulle.

Définition 9.2.3

Pour tout $i \in [\![1,q]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$ on définit $E_{i,j}$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall k \in [\![1,q]\!], \quad \forall l \in [\![1,p]\!], \quad [E_{i,j}]_{k,l} \coloneqq \delta_{i,k}\delta_{j,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les matrices $E_{i,j}$ sont appelées *matrices élémentaires*.

Remarque

⇨ Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, on a

$$A = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}.$$

En particulier, $\mathrm{Vect}(E_{1,1}, \dots, E_{1,p}, \dots, E_{q,1}, \dots, E_{q,p}) = \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

Proposition 9.2.4

La transposition est linéaire

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top.$$

De plus cette application est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Proposition 9.2.5

— $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
— $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)$$
est la décomposition de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

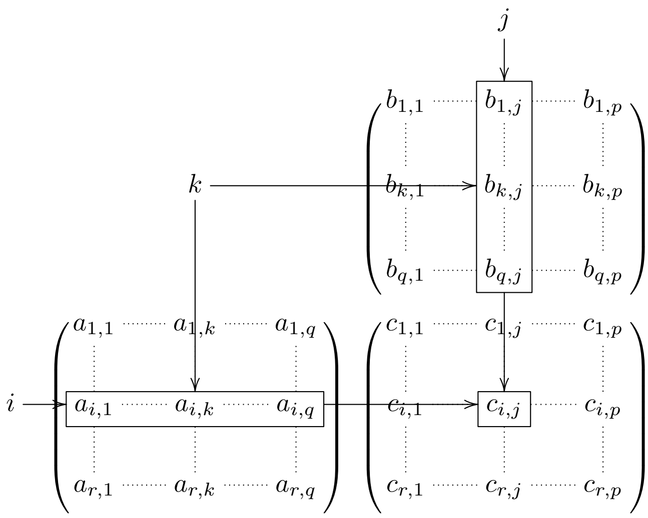
Proposition 9.2.6

La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

9.2.2 Produit

Définition 9.2.7

Soit $A \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit AB comme la matrice de $\mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ définie par
$$\forall i \in [\![1, r]\!], \quad \forall j \in [\![1, p]\!], \quad [AB]_{i,j} := \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}.$$



Remarques

⇨ Il est possible que le produit AB ait un sens sans que le produit BA en ait un. Mais si ces deux produits en ont un, en général, $AB \neq BA$. Enfin, il est possible que $AB = 0$ sans que $A = 0$ ou $B = 0$.

⇨ Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A et B *commutent* lorsque $AB = BA$.

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ alors
$$AX = Y \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q. \end{cases}$$

⇨ Si on note $C_1, \ldots, C_p \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ les vecteurs colonne de $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et si $X := \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_p \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, alors
$$AX = x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p.$$

Exercice 1

⇨ Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec $B := \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ si et seulement si elle est diagonale.

Proposition 9.2.8

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors $A = 0$ si et seulement si
$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0.$$

Proposition 9.2.9

$$\begin{aligned}
&\forall A \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K}), \quad \forall B, C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \qquad A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC \\
&\forall A, B \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K}), \quad \forall C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \qquad (\lambda A + \mu B) C = \lambda AC + \mu BC
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall A \in \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{K}), \quad \forall B \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K}), \quad \forall C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), \qquad &(AB)C = A(BC) \\
\forall A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), \qquad &AI_p = A \quad \text{et} \quad I_q A = A
\end{aligned}$$

Proposition 9.2.10

Soit $A \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Proposition 9.2.11

Soit $r, q, p \in \mathbb{N}$, $i_2 \in [\![1, r]\!]$, $i_1, j_2 \in [\![1, q]\!]$ et $j_1 \in [\![1, p]\!]$. Alors

$$E_{i_2,j_2} E_{i_1,j_1} = \delta_{j_2,i_1} E_{i_2,j_1} = \begin{cases} 0 & \text{si } j_2 \neq i_1 \\ E_{i_2,j_1} & \text{si } j_2 = i_1. \end{cases}$$

Exercice 2

⇨ Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si c'est une matrice scalaire.

Proposition 9.2.12

— Si D et D' sont deux matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont respectivement $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n$, DD' est diagonale et ses coefficients diagonaux sont $\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n$.
— Si T et T' sont deux matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont respectivement $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n$, TT' est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n$.

9.2.3 Calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 9.2.13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$ par récurrence.
— $A^0 := I_n$
— $\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^{p+1} := A^p A$.

Proposition 9.2.14

— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \qquad \begin{aligned} A^{p+q} &= A^p A^q \\ (A^p)^q &= A^{pq}. \end{aligned}$$

— Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, A^p et B^q commutent. De plus

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (AB)^p = A^p B^p.$$

Proposition 9.2.15

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k \qquad \text{et} \qquad A^p - B^p = (A-B)\left[\sum_{k=0}^{p-1} A^{(p-1)-k} B^k\right].$$

Définition 9.2.16

On dit qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *nilpotente* lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$.

Proposition 9.2.17

Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont nuls, alors $N^n = 0$. En particulier, N est nilpotente.

Exercice 3

⇨ On pose

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$.

Proposition 9.2.18

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Remarque

⇨ Cependant, en général, $\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(ACB)$.

Exercice 4

⇨ Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.

9.2.4 Matrice inversible

Définition 9.2.19

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *inversible* lorsqu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n.$$

Si tel est le cas, B est unique ; on la note A^{-1}. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

Remarque

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, A^{-1} l'est aussi et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Exercices 5

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 - 5A + 6I_n = 0$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

⇨ Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Montrer que $I_n + N$ est inversible.

Proposition 9.2.20

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles, il en est de même pour AB et

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

Proposition 9.2.21

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ possède les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned} & I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \forall A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad & AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad & A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}). \end{aligned}$$

Nous dirons que $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe, que l'on appelle *groupe linéaire*.

Proposition 9.2.22

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A^\top$ est inversible si et seulement si A l'est. De plus, si tel est le cas

$$\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top.$$

Proposition 9.2.23

Une matrice diagonale $D \coloneqq \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k \neq 0.$$

Si tel est le cas

$$D^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

9.3 Matrice et Système linéaire

9.3.1 Interprétation matricielle

Définition 9.3.1

On considère le *système linéaire* à q équations et p inconnues

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q. \end{cases}$$

La matrice $A \coloneqq (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est appelée matrice du système. La matrice $Y \coloneqq (y_i) \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ est appelée second membre. Si $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, alors $(x_1, \ldots, x_p)$ est solution du système si et seulement si $AX = Y$.

Remarque

⇨ Le système est homogène lorsque $Y = 0$. On rappelle que dans ce cas, $X = 0$ est une solution, appelée solution triviale du système.

Définition 9.3.2

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

— On appelle *noyau* de A et on note $\mathrm{Ker}\, A$ l'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0$.

$$\mathrm{Ker}\, A \coloneqq \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}.$$

— On note $C_1, \ldots, C_p \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ les vecteurs colonne de A. On appelle *image* de A et on note $\mathrm{Im}\, A$ l'ensemble

$$\mathrm{Im}\, A \coloneqq \{x_1C_1 + \cdots + x_pC_p : x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}\}.$$

Remarque

⇨ Ces définitions sont motivées par le fait que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}.$$

est une application linéaire dont le noyau et l'image sont respectivement $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.

Proposition 9.3.3

On considère le système linéaire $AX = Y$ où $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$.
- Ce système admet au moins une solution si et seulement si $Y \in \operatorname{Im} A$.
- Si c'est le cas, soit $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ une solution particulière. Alors l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = X_0 + \operatorname{Ker} A := \{X_0 + X : X \in \operatorname{Ker} A\}.$$

9.3.2 Calcul d'inverse, système de Cramer

Proposition 9.3.4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = Y \quad \Longleftrightarrow \quad X = BY.$$

De plus, si tel est le cas, B est l'inverse de A.

Remarque

⇨ Étant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, cette proposition affirme que s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que quels que soient $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = y_1 \\ \qquad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = y_n \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = b_{1,1}y_1 + b_{1,2}y_2 + \cdots + b_{1,n}y_n \\ \quad\vdots \\ x_n = b_{n,1}y_1 + b_{n,2}y_2 + \cdots + b_{n,n}y_n \end{cases}$$

alors A est inversible et $A^{-1} = B$. Inverser une matrice revient donc à résoudre un système linéaire.

Exercice 6

⇨ Montrer que la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

Définition 9.3.5

On dit qu'un système $AX = Y$ à n équations et n inconnues est de *Cramer* lorsque $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Remarque

⇨ Le fait d'être de Cramer est une propriété qui ne dépend pas du second membre.

Proposition 9.3.6

Un système de Cramer admet une unique solution.

9.3.3 Opérations élémentaires par produit matriciel

Définition 9.3.7: Matrice de dilatation

Soit $\mu \in \mathbb{K}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Alors, il existe une et une seule matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice DA est obtenue en multipliant la $k^{\text{ième}}$ ligne de A par μ.
- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, la matrice AD est obtenue en multipliant la $k^{\text{ième}}$ colonne de A par μ.

On la note $D_k(\mu)$ et on dit que c'est une *matrice de dilatation*. De plus

$$D_k(\mu) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & k & & & \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \mu & & & \\ & & & & 1 & & \\ & (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Proposition 9.3.8

Soit $\mu \in \mathbb{K}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Alors, la matrice de dilatation $D_k(\mu)$ est inversible et

$$[D_k(\mu)]^{-1} = D_k\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Définition 9.3.9: Matrice de transvection

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$. Alors, il existe une et une seule matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice TA est obtenue en ajoutant λ fois la $j^{\text{ième}}$ ligne de A à sa $i^{\text{ième}}$ ligne.
- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, la matrice AT est obtenue en ajoutant λ fois la i-ième colonne de A à sa j-ième colonne.

On la note $T_{i,j}(\lambda)$ et on dit que c'est une *matrice de transvection*. De plus

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & j & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & (0) & \\ & & \ddots & \\ & \lambda & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i \end{matrix} \end{array}$$

Proposition 9.3.10

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$. Alors, la matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ est inversible et

$$[T_{i,j}(\lambda)]^{-1} = T_{i,j}(-\lambda).$$

Définition 9.3.11: Matrice de transposition

Soit $k_1, k_2 \in [\![1, n]\!]$ tels que $k_1 \neq k_2$. Alors, il existe une et une seule matrice $\tau \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice τA est obtenue en échangeant les ${k_1}^{\text{ième}}$ et ${k_2}^{\text{ième}}$ lignes.
- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, la matrice $A\tau$ est obtenue en échangeant les ${k_1}^{\text{ième}}$ et ${k_2}^{\text{ième}}$ colonnes.

On la note τ_{k_1,k_2} et on dit que c'est une *matrice de transposition*. De plus

$$\tau_{k_1,k_2} = \begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} & & k_1 & & k_2 & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 0 & & 1 & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & 1 & & 0 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ k_1 \\ \\ k_2 \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

Proposition 9.3.12

Soit $k_1, k_2 \in [\![1, n]\!]$ tels que $k_1 \neq k_2$. Alors, la matrice de transposition τ_{k_1,k_2} est inversible et

$$\tau_{k_1,k_2}^{-1} = \tau_{k_1,k_2}$$

9.3.4 Matrice échelonnée

Définition 9.3.13

On dit qu'une matrice $E \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est *échelonnée à pivots diagonaux* lorsqu'il existe $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{K}^*$ tels que

$$E = \begin{pmatrix}
p_1 & \star & \cdots & \cdots & \star \\
0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & p_r & \star & \star \\
\vdots & & 0 & 0 \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

Les coefficients $p_1, \dots, p_r$ sont appelés *pivots* de la matrice E.

Remarque

⇨ Dans le cas où la matrice échelonnée à pivots diagonaux $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est carrée, elle est inversible si et seulement si $r = n$, c'est-à-dire si et seulement si E ne possède aucune ligne de 0.

Proposition 9.3.14

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

— Alors, il existe une succession d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes transformant A en une matrice échelonnée à pivots diagonaux.

— Autrement dit, il existe des familles $Q_1, \dots, Q_l \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $P_1, \dots, P_m \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ de matrices d'opérations élémentaires telles que $Q_l \cdots Q_1 A P_1 \cdots P_m$ est une matrice échelonnée à pivots diagonaux.

9.4 Qcm

Matrice

Matrice

Matrice carrée

1. Une matrice triangulaire supérieure et symétrique est

   ☐ **a.** nulle ☐ **b.** triangulaire inférieure ☐ **c.** diagonale ☐ **d.** antisymétrique

Opérations sur les matrices

Combinaison linéaire

1. Si M est une matrice carrée telle que $M^\top = 2M$, alors

   ☐ **a.** les coefficients diagonaux de M sont nuls ☐ **b.** M est une matrice diagonale
   ☐ **c.** M est une matrice symétrique ☐ **d.** M est nulle

2. Laquelle des hypothèses suivantes n'implique pas que la matrice A soit aussi diagonale ?

   ☐ **a.** $A^\top$ est diagonale ☐ **b.** $A - I$ est diagonale ☐ **c.** A^2 est diagonale ☐ **d.** $2A$ est diagonale

3. Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = M^\top$. Alors $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id})$ est l'espace vectoriel

   ☐ **a.** $\{0\}$ ☐ **b.** $\{-I\}$ ☐ **c.** des matrices symétriques ☐ **d.** des matrices antisymétriques

Produit

1. Si M est une matrice 3×3, combien de produits de coefficients doit-on effectuer pour calculer M^2 ?

   ☐ **a.** 9 ☐ **b.** 18 ☐ **c.** 27 ☐ **d.** 81

2. Soit

   $$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   La matrice $(M - I_3)(M - 2I_3)(M - 3I_3)$ vaut

   ☐ **a.** $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ☐ **b.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ **c.** $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ☐ **d.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

3. Combien vaut la matrice $(E_{1,2} + E_{2,1})^2$?

   ☐ **a.** $2E_{1,1}$ ☐ **b.** $2E_{2,2}$ ☐ **c.** $E_{1,2} + E_{2,1}$ ☐ **d.** $E_{1,1} + E_{2,2}$

4. On calcule tous les produits $E_{1,2}E_{i,j}$. Combien de ces produits sont non nuls ?

   ☐ **a.** n ☐ **b.** $n^2 - n$ ☐ **c.** n^3 ☐ **d.** aucun car $E_{1,2}$ est non nulle

5. Combien de matrices $E_{i,j}$ commutent avec $E_{1,1}$?

   ☐ **a.** 1 ☐ **b.** $(n-1)^2$ ☐ **c.** $(n-1)^2 + 1$ ☐ **d.** n^2

6. On pose

   $$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Alors A et B commutent si et seulement si

   ☐ **a.** A est triangulaire supérieure ☐ **b.** $c = 0$ et $a = d$ ☐ **c.** $a = c = d = 0$ ☐ **d.** $b = 0$

7. Soit M la matrice dont tous les coefficients valent 0 sur la diagonale et 1 ailleurs. Les coefficients de M^2 valent

   ☐ **a.** 0 sur la diagonale et $n - 1$ ailleurs ☐ **b.** $n - 2$ sur la diagonale et $n - 1$ ailleurs
   ☐ **c.** $n - 1$ sur la diagonale et $n - 2$ ailleurs ☐ **d.** $n - 2$ sur la diagonale et n ailleurs

8. Si A est une matrice carrée, $A^\top A$ est toujours

   ☐ **a.** triangulaire supérieure ☐ **b.** diagonale ☐ **c.** symétrique ☐ **d.** antisymétrique

Calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Matrice inversible

1. Soit A, B deux matrices carrées. Si A et B ne sont pas inversibles, laquelle des matrices suivantes peut quand même être inversible ?

   ☐ **a.** AB ☐ **b.** $2A$ ☐ **c.** $A+B$ ☐ **d.** $A^\top$

2. Si A, B sont deux matrices carrées inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'inverse de $(AB)^\top$ est

   ☐ **a.** $\left(A^{-1}\right)^\top\left(B^{-1}\right)^\top$ ☐ **b.** $\left(B^{-1}\right)^\top\left(A^{-1}\right)^\top$ ☐ **c.** $B^{-1}A^{-1}$ ☐ **d.** $A^{-1}B^{-1}$

3. Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $ABC = 0$, alors on peut affirmer que

   ☐ **a.** $CBA = 0$ ☐ **b.** A, B ou C est non inversible
   ☐ **c.** A, B ou C est nulle ☐ **d.** A, B et C sont nulles

Matrice et système linéaire

Interprétation matricielle

Calcul d'inverse, système de Cramer

Opérations élémentaires par produit matriciel

Matrice échelonnée

9.5 Exercices

Matrice

Matrice

Matrice carrée

Opérations sur les matrices

Combinaison linéaire

Produit

Exercice 1 : Sous-structures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

où a, b, c, d sont des nombres complexes.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, stable par produit.
2. Les éléments de E commutent-ils entre eux ?
3. Soit $A, B \in E$. Est-il possible d'avoir $AB = 0$ sans que $A = 0$ ou $B = 0$?

Exercice 2 : Produit

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad AXB = 0.$$

Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 3 : Corchet de Lie

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On note $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et on pose

$$\mathcal{C} \coloneqq \{AD - DA : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}.$$

1. Montrer que les matrices de $\mathcal{C}$ ont une diagonale nulle.
2. Réciproquement, montrer que toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la diagonale est nulle est dans $\mathcal{C}$.

Exercice 4 : Équation matricielle

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer l'ensemble des matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$X + \operatorname{tr}(X) A = B.$$

Calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice 5 : Calcul de puissances successives

Calculer la puissance n-ième des matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : Matrices nilpotentes

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices nilpotentes qui commutent.

1. Montrer que AB est nilpotente.
2. Montrer que $A + B$ est nilpotente.

Exercice 7 : Trace et matrices symétriques

1. Montrer que pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\operatorname{tr}\left(X^\top X\right) \geqslant 0.$$

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques.

2. Montrer que

$$\operatorname{tr}\Big((AB - BA)^\top (AB - BA)\Big) = 2\left[\operatorname{tr}\left(A^2B^2\right) - \operatorname{tr}(ABAB)\right].$$

3. En déduire que

$$\operatorname{tr}(ABAB) \leqslant \operatorname{tr}\left(A^2B^2\right).$$

Exercice 8 : Norme matricielle

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit $\|A\|$ par

$$\|A\| \coloneqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

1. Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\| \qquad \text{et} \qquad \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|.$$

2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que

$$A^k - B^k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i(A - B)B^{k-1-i}.$$

   (b) En déduire que si $\|A\| \neq \|B\|$

$$\frac{\left\|A^k - B^k\right\|}{\|A - B\|} \leqslant \frac{\|A\|^k - \|B\|^k}{\|A\| - \|B\|}.$$

Exercice 9 : Puissances

On pose

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et I_3, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = \lambda A + \mu I_3$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
3. Donner une expression explicite de a_n et b_n, puis de A^n.

Matrice inversible

Exercice 10 : Déterminant

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})A + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})I = 0$.
2. Montrer que A est inversible si et seulement si $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$.

Exercice 11 : Calcul d'inverse

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On définit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad a_{i,j} \coloneqq \begin{cases} a^{j-i} & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En introduisant la matrice N définie par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad n_{i,j} \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Matrice et système linéaire

Interprétation matricielle

Calcul d'inverse, système de Cramer

Exercice 12 : Calcul d'inverse

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

$$\textbf{a.}\ \begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad \textbf{b.}\ \begin{pmatrix}1&2&-1\\3&0&-2\\-3&6&0\end{pmatrix},\qquad \textbf{c.}\ \begin{pmatrix}0&1&0&2\\2&1&1&1\\1&2&1&0\\2&2&1&2\end{pmatrix},\qquad \textbf{d.}\ \begin{pmatrix}4&2&3\\1&2&9\\5&2&1\end{pmatrix},$$

$$\textbf{e.}\ \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix},\qquad \textbf{f.}\ \begin{pmatrix}0&1&2\\1&3&5\\1&1&0\end{pmatrix},\qquad \textbf{f.}\ \begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&1\\0&1&1\end{pmatrix},\qquad \textbf{d.}\ \begin{pmatrix}1&\bar{z}&\bar{z}^2\\z&1&\bar{z}\\z^2&z&1\end{pmatrix}\quad \text{où } z\in\mathbb{C}.$$

Exercice 13 : Réduction

On pose

$$A \coloneqq \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre le système linéaire $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déduire 3 matrices colonne $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulles ainsi que 3 réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et

$$\forall k \in [\![1,3]\!], \quad AX_k = \lambda_k X_k.$$

On choisira X_1, X_2, X_3 de manière à ce que leur second coefficient soit égal à 1.

Dans la suite, on note $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont les vecteurs colonne sont X_1, X_2 et X_3.

2. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
3. Déterminer, sans calcul brutal, une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telle que $AP = PD$.
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de P, D^n et P^{-1}. Puis, déterminer une expression de A^n en fonction de n seulement.

Pivot de Gauss

Exercice 14 : Systèmes linéaires

Soit $p \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\textbf{a.}\ \begin{cases}2px + y = p\\ 2x + py = p\end{cases}\qquad \textbf{b.}\ \begin{cases}x + py + 2z = 1\\ px + y + 2z = 1\\ x + 2py + 3z = 0\end{cases}\qquad \textbf{c.}\ \begin{cases}px + py + 4z = 1\\ 2x + y + pz = 1\\ x + 2y + z = 0\end{cases}$$

$$\textbf{d.}\ \begin{cases}x + y + z = 1-p\\ px + (1+p)y + (1+p)z = p - p^2\\ px + (1-p)y + (1-p)z = p^2\end{cases}\qquad \textbf{e.}\ \begin{cases}x - 2y + 3z = 1\\ 2x + py + 6z = 6\\ -x + 3y + (p-3)z = 0.\end{cases}$$

Exercice 15 : Exercice

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases}x + y + z + t = 3\\ x + my + z - mt = m+2\\ mx - y - mz - t = -1.\end{cases}$$

Exercice 16 : Exercice

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Résoudre le système

$$\begin{cases}x + y + z = a\\ x + \mathrm{j}y + \mathrm{j}^2 z = b\\ x + \mathrm{j}^2 y + \mathrm{j}z = c\end{cases}$$

et donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que les solutions soient réelles.

Opérations élémentaires par produit matriciel

Matrice échelonnée

Chapitre 10

Dénombrement

10.1 Cardinal

10.1.1 Équipotence

Définition 10.1.1

Soit A et B deux ensembles. On dit que A est *équipotent* à B lorsqu'il existe une bijection de A dans B.

Proposition 10.1.2

La relation « est équipotent à » est une relation d'équivalence.

Remarques

⇨ Une fois que nous aurons défini le cardinal d'un ensemble fini, nous verrons que deux ensembles finis sont équipotents si et seulement si ils ont le même nombre d'éléments.

⇨ Il est possible qu'un ensemble soit équipotent à l'une de ses parties strictes ; ces ensembles sont infinis. Par exemple l'application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$ qui à n associe $n+1$ est une bijection, ce qui montre que $\mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{N}^*$.

Pourtant $\mathbb{N}^*$ est une partie stricte de $\mathbb{N}$. De même, l'application f de $[0,1]$ dans $[0,2]$ qui à x associe $2x$ est une bijection. Pourtant $[0,1]$ est une partie stricte de $[0,2]$.

⇨ Il existe des ensembles infinis qui ne sont pas équipotents. Par exemple, on peut montrer que, quel que soit l'ensemble X, les ensembles X et $\mathcal{P}(X)$ ne sont pas équipotents. En particulier $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne sont pas équipotents. Il existe donc des ensembles infinis qui ont « plus d'éléments » que d'autres.

⇨ On dit qu'un ensemble est *dénombrable* lorsqu'il est équipotent à $\mathbb{N}$. On peut montrer que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. On peut montrer cependant que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. On dit qu'un ensemble est *au plus dénombrable* lorsqu'il est fini ou dénombrable.

10.1.2 Ensemble fini, cardinal

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[\![1,n]\!] := \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}$. En particulier $[\![1,0]\!] = \varnothing$, $[\![1,1]\!] = \{1\}$, $[\![1,2]\!] = \{1,2\}$, $[\![1,3]\!] = \{1,2,3\}$, etc.

Définition 10.1.3

On dit qu'un ensemble A est *fini* lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que A est équipotent à $[\![1,n]\!]$. On dit qu'il est *infini* dans le cas contraire.

Définition 10.1.4

Soit A un ensemble fini. Alors il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que A est équipotent à $[\![1,n]\!]$. On l'appelle *cardinal* de A et on le note $\mathrm{Card}(A)$ ou $|A|$.

Remarques

⇨ Un ensemble A est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si il existe une bijection de $[\![0,n[\![$ dans A.

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leqslant b+1$. L'ensemble $[\![a,b]\!]$ est fini de cardinal $b-a+1$.

Proposition 10.1.5

Soit A un ensemble fini et B un ensemble. Alors, A et B sont équipotents si et seulement si B est fini et $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$.

Exercices 1

⇨ Dénombrer les couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3a+b = 833$.

⇨ On a utilisé 6921 chiffres (les caractères d'imprimerie) pour numéroter les pages d'un dictionnaire. Combien de pages ce dictionnaire contient-il ? Chaque page est numérotée une seule fois, la première portant le numéro 1.

Définition 10.1.6

Soit A une partie de $\mathbb{N}$.

— Si A est fini, il est l'image d'une unique application strictement croissante de $[\![1,\mathrm{Card}(A)]\!]$ dans $\mathbb{N}$.

— Sinon, A est infini et il est l'image d'une unique application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Une telle application est appelée une *énumération* de A.

Proposition 10.1.7

Une partie de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée.

Proposition 10.1.8

Soit E un ensemble fini et A une partie de E. Alors

— A est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.

— $A = E$ si et seulement si $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$.

Proposition 10.1.9

Soit E et F deux ensembles. Alors
- Si F est fini, il existe une injection de E dans F si et seulement si E est fini et $\operatorname{Card}(E) \leqslant \operatorname{Card}(F)$.
- Si E est fini et F est non vide, il existe une surjection de E dans F si et seulement si F est fini et $\operatorname{Card}(F) \leqslant \operatorname{Card}(E)$.
- Si l'un des ensembles est fini, il existe une bijection de E dans F si et seulement si l'autre est fini et $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$.

Proposition 10.1.10: Principe des tiroirs

Soit E et F deux ensembles finis tels que $\operatorname{Card}(F) < \operatorname{Card}(E)$ et f une application de E dans F. Alors, il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.

Exercices 2

⇨ Soit $n \geqslant 2$. En supposant que la relation « est ami avec » est symétrique, montrer que dans une assemblée de n personnes, il y en a au moins deux qui ont le même nombre d'amis.

⇨ Soit $x_1, \ldots, x_{n+1} \in [0,1]$. Montrer qu'il existe $i, j \in [\![1, n+1]\!]$ tels que $i \neq j$ et

$$|x_i - x_j| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Proposition 10.1.11

Soit E un ensemble fini, F un ensemble et f une application de E dans F. Alors
- $f(E)$ est un ensemble fini et $\operatorname{Card}(f(E)) \leqslant \operatorname{Card}(E)$
- $\operatorname{Card}(f(E)) = \operatorname{Card}(E)$ si et seulement si f est injective.

Si de plus F est un ensemble fini.
- $\operatorname{Card}(f(E)) \leqslant \operatorname{Card}(F)$
- $\operatorname{Card}(f(E)) = \operatorname{Card}(F)$ si et seulement si f est surjective.

Proposition 10.1.12

Soit E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F.
- Si f est injective et $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$, alors f est bijective.
- Si f est surjective et $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$, alors f est bijective.

Autrement dit, si $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$, alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est bijective} \iff f \text{ est surjective.}$$

10.2 Dénombrement

10.2.1 Dénombrement élémentaire

Proposition 10.2.1

Soit E un ensemble fini et A, B deux parties disjointes de E, c'est-à-dire telles que $A \cap B = \varnothing$. Alors

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B).$$

Remarques

⇨ Le « ou exclusif » se traduit donc par un $+$ en dénombrement.

⇨ Si A et B sont deux parties disjointes, leur réunion est parfois notée $A \sqcup B$.

Proposition 10.2.2

Soit E un ensemble fini.
- Si A est une partie de E

$$\operatorname{Card}(\bar{A}) = \operatorname{Card}(E) - \operatorname{Card}(A).$$

— Si A et B sont deux parties de E

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B) - \operatorname{Card}(A \cap B).$$

— Si $(A_1, \dots, A_n)$ est une partition de E, alors

$$\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(A_1) + \dots + \operatorname{Card}(A_n).$$

Remarque

⇨ L'avantage du passage au complémentaire est qu'il permet de prendre la négation de la propriété qui définit l'ensemble. Cela donne parfois une phrase plus simple à manipuler et donc un ensemble plus simple à dénombrer.

Exercices 3

⇨ Quel est le nombre d'entiers entre 1 et 100 qui ne sont pas divisibles par 3 ?

⇨ Dénombrer

$$A := \{n \in [\![1, 100]\!] \mid 2|n \text{ ou } 3|n\}.$$

⇨ Quel est le nombre de rythmes de n temps que l'on peut composer uniquement avec des noires (1 temps) et des blanches (2 temps) ?

Proposition 10.2.3: Formule du crible

Soit $A_1, \dots, A_n$ des parties d'un même ensemble fini E. Alors

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Remarque

⇨ Par exemple, pour $n = 3$, la formule du crible s'écrit

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \quad = \quad & \operatorname{Card}(A_1) + \operatorname{Card}(A_2) + \operatorname{Card}(A_3) \\ & - [\operatorname{Card}(A_2 \cap A_3) + \operatorname{Card}(A_1 \cap A_3) + \operatorname{Card}(A_1 \cap A_2)] \\ & + \operatorname{Card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Proposition 10.2.4

— Si A et B sont deux ensembles finis, alors $A \times B$ est fini et

$$\operatorname{Card}(A \times B) = \operatorname{Card}(A) \operatorname{Card}(B).$$

Plus généralement, si $A_1, \dots, A_n$ sont des ensembles finis, $A_1 \times \dots \times A_n$ est fini et

$$\operatorname{Card}(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{Card}(A_k).$$

— Si A est un ensemble fini et $n \in \mathbb{N}$, alors A^n est fini et

$$\operatorname{Card}(A^n) = \operatorname{Card}(A)^n.$$

Remarque

⇨ La formule $\operatorname{Card}(A_1 \times \dots \times A_n) = \operatorname{Card}(A_1) \cdots \operatorname{Card}(A_n)$ dit simplement que lorsque l'on doit faire une succession « et » de choix indépendants, on dénombre ces choix et on les multiplie.

Exercices 4

⇨ Montrer que dans un village de 700 personnes, deux au moins ont les mêmes initiales.

⇨ Combien de menus différents peut-on faire avec 4 entrées, 6 plats et 2 desserts ?

⇨ Quel est le nombre de mots de 4 lettres contenant au moins un « e » ?

Proposition 10.2.5

— Soit E et F deux ensembles finis. Alors $\mathcal{F}(E,F) = F^E$ est fini et

$$\operatorname{Card}(\mathcal{F}(E,F)) = \operatorname{Card}\left(F^E\right) = \operatorname{Card}(F)^{\operatorname{Card}(E)}.$$

— Soit E un ensemble fini. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et

$$\operatorname{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\operatorname{Card}(E)}.$$

Exercice 5

⇨ Quel est le nombre de possibilités de répartir p boules distinctes dans n urnes distinctes ?

⇨ Une urne contient n boules distinctes. On effectue p tirages successifs avec remise (c'est-à-dire que l'on remet la boule dans l'urne après chaque tirage). Combien y-a-t-il de possibilités ?

⇨ De combien de manières peut-on descendre $n+1$ marches (donc n « paliers »), en en sautant éventuellement certaines ?

Proposition 10.2.6: Lemme des bergers

Soit E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall y \in F, \quad \operatorname{Card}\left(f^{-1}(\{y\})\right) = p.$$

Alors $\operatorname{Card}(E) = p\operatorname{Card}(F)$.

Remarque

⇨ Soit E l'ensemble des pattes des moutons foulant un pré, F l'ensemble des moutons du pré et f l'application de E dans F qui à chaque patte associe son propriétaire. Comme chaque mouton a 4 pattes

$$\forall m \in F, \quad \operatorname{Card}\left(f^{-1}(\{m\})\right) = 4.$$

On en déduit que le nombre de pattes foulant le pré est égal à quatre fois le nombre de moutons. C'est de cet exemple que la proposition précédente tire son nom de « lemme des bergers ».

10.2.2 Arrangement, combinaison

Définition 10.2.7: p-listes

Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}$. On appelle *p-liste* d'éléments de E tout p-uplet $(a_1, \dots, a_p) \in E^p$.

Exercice 6

⇨ Si $E = \{1, 2, 3\}$, donner les 2-listes d'éléments de E.

Remarques

⇨ Les p-listes d'éléments de E sont les fonctions de $[\![1,p]\!]$ dans E.

⇨ Choisir une p-liste, c'est choisir p éléments de E en tenant compte de l'*ordre* et en autorisant les *répétitions*.

Proposition 10.2.8: Nombre de listes

Soit E un ensemble de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$. Alors, il existe

$$n^p$$

p-listes d'éléments de E.

Définition 10.2.9: p-arrangements

Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}$. On appelle *p-arrangement* d'éléments de E toute p-liste $(a_1, \dots, a_p) \in E^p$ telle que

$$\forall i, j \in [\![1,p]\!], \quad i \neq j \implies a_i \neq a_j.$$

Exercice 7

⇨ Si $E = \{1, 2, 3\}$, donner les 2-arrangements d'éléments de E.

Remarques

⇨ Les p-arrangements d'éléments de E sont les fonctions injectives $[\![1, p]\!]$ dans E.

⇨ Choisir un p-arrangement, c'est choisir p éléments de E en tenant compte de l'*ordre* et en n'autorisant pas les *répétitions*.

Proposition 10.2.10: Nombre d'arrangements

Soit E un ensemble de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$. Alors il existe

$$A_n^p := \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

p-arrangements d'éléments de E.

Remarque

⇨ Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, alors

$$A_n^p = \underbrace{n\,(n-1)\cdots(n-(p-1))}_{p \text{ termes}}.$$

Exercices 8

⇨ On répartit p boules distinctes dans n urnes distinctes. Quel est le nombre de répartitions pour lesquelles chaque urne contient au plus une boule ?

⇨ Une urne contient n boules distinctes. On effectue p tirages successifs sans remise. Combien y-a-t-il de possibilités ?

Proposition 10.2.11

— Il existe A_n^p injections d'un ensemble à $p \in \mathbb{N}$ éléments dans un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments.
— Il existe $n!$ bijections d'un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments dans un ensemble à n éléments.

Remarque

⇨ En particulier, si E est un ensemble à n éléments, il existe $n!$ bijections de E dans E. De telles applications sont appelées des *permutations* de E.

Exercice 9

⇨ Combien d'anagrammes peut-on former avec les mots « maths », « chimie » et « anagramme » ?

Définition 10.2.12: p-combinaisons

Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}$. On appelle *p-combinaison* d'éléments de E toute partie de E à p éléments.

Remarque

⇨ Choisir une p-combinaison, c'est choisir p éléments de E sans tenir compte de l'*ordre* et en n'autorisant pas les *répétitions*.

Proposition 10.2.13: Nombre de combinaisons

Soit E un ensemble de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$. Alors il existe

$$C_n^p := \begin{cases} \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

p-combinaisons d'éléments de E.

Remarques

⇨ Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, alors

$$C_n^p = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-(p-1))}^{p \text{ termes}}}{p!}.$$

⇨ Le nombre de combinaisons C_n^p est aussi noté $\binom{n}{p}$. Nous utiliserons par la suite cette notation qui est la notation internationale.

Exercices 10

⇨ Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. Dénombrer les tirages possibles si on tire 3 boules
- successivement et avec remise.
- successivement et sans remise.
- simultanément.

⇨ Un code de coffre-fort est composé de 6 chiffres entre 0 et 9 dont l'ordre compte. Dénombrer
- tous les codes possibles.
- les codes dont tous les chiffres sont distincts.
- les codes ne contenant pas 0.
- les codes contenant au plus deux fois le chiffre 1.
- les codes contenant autant de chiffres pairs que de chiffres impairs.
- les codes contenant la succession 123 quelque-part.
- les codes strictement croissants.

⇨ Quel est le nombre de manières de répartir p boules indiscernables dans n urnes distinctes sachant qu'on ne peut pas mettre plus d'une boule par urne ?

⇨ Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x_1 + \cdots + x_n = p$ dans $\{0,1\}^n$.

⇨ Combien peut-on former de mots contenant p fois la lettre O et q fois la lettre I ?

⇨ Quel est le nombre de manières de répartir p boules indiscernables dans n urnes distinctes ?

⇨ Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x_1 + \cdots + x_n = p$ dans $\mathbb{N}^n$.

⇨ Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

⇨ Combien y a-t-il d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

Proposition 10.2.14

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in [\![0, n]\!], \qquad & \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \\
\forall n, p \in \mathbb{N}, \qquad & \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \\
\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \qquad & \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.
\end{aligned}$$

Remarque

⇨ La dernière formule est parfois appelée « formule du capitaine » ou formule du « comité président ».

Proposition 10.2.15

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \qquad & \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n \\
\forall a, b, n \in \mathbb{N}, \qquad & \sum_{p=0}^{n} \binom{a}{p}\binom{b}{n-p} = \binom{a+b}{n}.
\end{aligned}$$

Remarque

⇨ La seconde formule est appelée formule de Vandermonde.

Proposition 10.2.16: Binôme de Newton

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p.$$

10.3 Exercices

Cardinal

Équipotence

Exercice 1 : Non dénombrabilité de $[0,1]$

Le but de cet exercice est de démontrer que $[0,1]$ n'est pas dénombrable, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $[0,1]$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de $[0,1]$ telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad u_n = x.$$

1. Construire deux suites (a_n) et (b_n) de réels telles que
   — $a_0 = 0 \quad \text{et} \quad b_0 = 1$.
   — $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$.
   — $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n - a_n)$.
   — $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$.
2. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune $l \in [0,1]$, puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq l.$$

   Conclure.

Ensemble fini, cardinal

Exercice 2 : Ensemble d'entiers

Étant donnés 51 entiers compris entre 1 et 100, montrer qu'il en existe toujours 2 consécutifs.

Exercice 3 : Théorème d'approximation de Dirichlet

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $\delta_k := kx - \lfloor kx \rfloor$. En appliquant le principe des tiroirs aux réels δ_k, montrer le théorème d'approximation de Dirichlet

$$\exists p \in \mathbb{Z}, \quad \exists q \in [\![1, n]\!], \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   (a) Montrer qu'il existe une infinité de $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

   (b) Montrer qu'il existe une infinité de $p \in \mathbb{Z}$ pour lesquels

$$\exists q \in \mathbb{N}^*, \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

3. On admet que π est irrationnel. Dans ces conditions $\sin n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on peut poser

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n := \frac{1}{n \sin n}.$$

   On souhaite montrer que la suite (u_n) n'admet pas de limite. On raisonne par l'absurde et on suppose que (u_n) admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
   (a) Montrer que $l = 0$.
   (b) Obtenir une contradiction en appliquant les résultats de la question 2.b au réel π.

Exercice 4 : 7 nombres réels

Soit sept nombres réels $x_1, \ldots, x_7$. Montrer qu'il existe deux indices i et j distincts tels que

$$0 < \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Rappelez vous que la trigonométrie se cache même aux endroits où on ne l'attend pas.

Dénombrement

Dénombrement élémentaire

Exercice 5 : Couples dans le plan

Combien y a-t-il de couples (i, j)

1. dans $[\![1, n]\!]^2$ pour lesquels $i + j = n$?
2. dans $[\![1, n]\!]^2$ pour lesquels $i < j$?
3. dans $[\![1, n]\!] \times [\![1, 2n]\!]$ pour lesquels $i < j$?
4. dans $[\![1, n]\!]^2$ pour lesquels $|i - j| \leqslant 1$?

Exercice 6 : Autour du crible

Une certaine ville compte 17 500 actifs dans sa population. À l'issue d'un recensement, on a obtenu les informations suivantes sur ces 17 500 actifs :

— 4 actifs sur 7 sont des femmes et 6 d'entre elles sur 10 ont voté aux dernières municipales.
— 3 actifs sur 5 ont voté aux dernières municipales et 40% de ces personnes sont au chômage.
— Le chômage touche 1 actif sur 4 et 60% des demandeurs d'emploi sont des femmes.
— 60% des femmes au chômage ont voté aux dernières municipales.

Combien d'hommes qui ne sont pas au chômage sont restés chez eux le jour des élections municipales ?

Arrangement, combinaison

Exercice 7 : Anagrammes

Dénombrer les anagrammes des mots suivants

COUVERT, COUTEAU, FOURCHETTE.

Exercice 8 : Le livreur

Un livreur doit distribuer des colis à cinq personnes A, B, C, D, E. Combien y a-t-il de trajets possibles ? S'il souhaite livrer A avant B et C, combien y a-t-il de trajets possibles ?

Exercice 9 : Surjections d'un ensemble fini dans un autre

Quels que soient $n, p \in \mathbb{N}$, on note $S_{p,n}$ le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

1. On suppose que $p \leqslant n$. Que vaut $S_{p,n}$?
2. Calculer $S_{n+1,n}$ et $S_{p,2}$.
3. Montrer que

$$\forall p, n \in \mathbb{N}, \quad n^p = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} S_{p,i}.$$

Exercice 10 : Partitions d'un ensemble

Quels que soient $n, p \in \mathbb{N}$, on note $P_{n,p}$ le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal np en n parties à p éléments. Montrer que

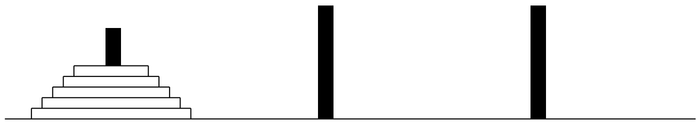
$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1,p} = \frac{1}{n+1} \binom{(n+1)p}{p} P_{n,p}.$$

En déduire $P_{n,p}$.

Exercice 11 : Tours de Hanoï

Le jeu des tours de Hanoï se compose de trois tiges sur lesquelles on peut empiler n disques deux à deux distincts ($n \geq 1$). Initialement, les n disques sont empilés sur la première tige, par ordre décroissant de taille, du bas vers le haut. Le but du jeu est de transporter la tour complète sur une autre tige par une suite de mouvements consistant à déplacer un disque à la fois, et en respectant les deux règles suivantes :

— on ne peut ôter d'une tige que le disque se trouvant au sommet de la pile ;
— on ne peut empiler un disque sur une tige que si elle est vide ou bien si l'on pose le disque en question sur un autre plus grand.



Notons a_n le nombre minimal de mouvements nécessaires au transport de la tour initiale de n disques.

1. Montrer que $a_1 = 1$ et $a_2 = 3$.
2. Établir une relation entre a_{n+1} et a_n pour tout $n \geq 1$.
3. Montrer que $a_n = 2^n - 1$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 12 : Exercice

Sur une étagère, on range les n tomes d'une encyclopédie. Combien y a-t-il de manières de les ranger tout en étant sûr que le tome 1 et le tome 2 sont côte à côte et dans cet ordre ?

Exercice 13 : Exercice

De combien de façons différentes peut-on ranger les nombres $1, 2, \ldots, n$ si l'on veut que le produit de deux nombres voisins soit toujours pair ?

Exercice 14 : Exercice

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. La boule 1 est jaune, les boules 2 et 3 sont bleues, les boules 4,5,6 sont rouges et les boules 7,8,9,10 sont vertes. On tire dans l'urne successivement et avec remise 5 boules. Le résultat est donc la liste ordonnée des cinq numéros des boules tirées. Déterminer le nombre de résultats

1. en tout,
2. pour lesquels les cinq boules sont toutes de la même couleur,
3. pour lesquels les quatre couleurs apparaissent parmi les cinq boules,
4. pour lesquels la boule numéro 8 a été tirée et exactement deux des boules tirées sont rouges.

Exercice 15 : Exercice

On dispose de trois urnes notées A, B, C et de six boules. On répartit les six boules dans les trois urnes (chaque urne peut contenir de 0 à 6 boules). Une répartition est une liste ordonnée de trois nombres indiquant le nombre de boules contenues dans les urnes A, B, C. Par exemple, la répartition $(2, 4, 0)$ indique que l'urne A contient 2 boules, l'urne B en contient 4 et l'urne C est vide. Déterminer le nombre de répartitions

1. en tout,
2. telles que l'urne A est vide,
3. telles que l'urne A est la seule urne vide,
4. telles qu'une urne et une seulement est vide,
5. telles qu'aucune urne est vide,
6. telles qu'au moins une urne est vide.

Exercice 16 : Exercice

On considère un quadrillage de n lignes et m colonnes. On part de la case en haut à gauche pour arriver à la case en bas à droite. Les seuls mouvements possibles sont de se déplacer d'une case à droite ou d'une case en bas. Combien existe-t-il de chemins ?

Exercice 17 : Exercice

Un domino est un rectangle constitué de deux carrés, chacun comportant entre 0 et 6 points.

1. Combien existe-t-il de dominos ?
2. Combien de paires peut-on former avec des dominos ayant un nombre en commun ?

Exercice 18 : Exercice

Soit E un ensemble de cardinal $2n$. On appelle partition de E en paires tout ensemble $\{\{a_1, b_1\}, \ldots, \{a_n, b_n\}\}$ avec pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i \neq b_i$ et $(\{a_1, b_1\}, \ldots, \{a_n, b_n\})$ est une partition de E. Dénombrer les partitions de E en paires.

Exercice 19 : Exercice

Soit E une partie de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer de deux manières différentes les couples $(a, A) \in E \times \mathcal{P}(E)$ tels que $a \notin A$. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

Exercice 20 : Compter les matrices

Combien existe-t-il de matrices de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ dont les entrées sont « 0 » ou « 1 » et

1. dont chaque ligne contient exactement un coefficient « 1 » ?
2. dont chaque ligne contient exactement deux coefficients « 1 » ?
3. dont chaque ligne et chaque colonne contiennent exactement un coefficient « 1 » (on suppose ici $q = p$) ?

Exercice 21 : Le crible

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!.$$
On pourra appliquer la formule du crible aux ensembles $[\![1, n]\!] \setminus \{k\}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
2. Simplifier de même
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$
pour tout $p \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 22 : Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre d'applications f de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ telles que $f \circ f = \mathrm{Id}$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).

Chapitre 11

Groupes

11.1 Groupe

11.1.1 Loi de composition interne

Définition 11.1.1

Soit E un ensemble. On appelle loi de *composition interne* toute application $\star$ de $E \times E$ dans E.

$$\star : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x \star y \end{array}$$

Définition 11.1.2

La loi $\star$ est dite

— *associative* lorsque
$$\forall x, y, z \in E, \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z)\,.$$

— *commutative* lorsque
$$\forall x, y \in E, \quad x \star y = y \star x.$$

Exemples

⇨ L'addition et la multiplication sont des lois de composition interne sur $\mathbb{Z}$, associatives et commutatives.

⇨ L'exponentiation est une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$ qui n'est ni associative, ni commutative.

⇨ Si X est un ensemble, la composition est une loi de composition interne associative sur $E \coloneqq \mathcal{F}(X, X)$. Elle n'est pas commutative dès que X possède au moins deux éléments.

⇨ Le produit matriciel est une loi de composition interne associative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elle est n'est pas commutative dès que $n \geqslant 2$.

Remarques

⇨ Soit $\star$ une loi *associative*. Quels que soient $x, y, z, t \in E$, les 5 expressions suivantes sont égales :

$$(x \star y) \star (z \star t), \quad ((x \star y) \star z) \star t,$$

$$(x \star (y \star z)) \star t, \quad x \star ((y \star z) \star t), \quad x \star (y \star (z \star t)).$$

On admettra plus généralement que toute expression de n éléments construite à l'aide de la loi $\star$ ne dépend pas de l'emplacement des parenthèses. C'est pourquoi on se permettra de les omettre.

⇨ On dit que deux éléments $x, y \in E$ *commutent* lorsque $x \star y = y \star x$.

Définition 11.1.3

Une partie A de E est dite *stable* par $\star$ lorsque

$$\forall x, y \in A, \quad x \star y \in A.$$

Remarque

⇨ Si $\star$ est une loi de composition interne sur E et $A \in \mathcal{P}(E)$ est stable par $\star$, alors la loi

$$\begin{array}{rccc} \star_A : & A \times A & \longrightarrow & A \\ & (x, y) & \longmapsto & x \star y \end{array}$$

est une loi de composition interne sur A. On continuera à la noter $\star$.

Définition 11.1.4

On dit que $\star$ admet un *élément neutre* $e \in E$ lorsque

$$\forall x \in E, \quad x \star e = x \quad \text{et} \quad e \star x = x.$$

Si tel est le cas, il est unique et on l'appelle *élément neutre* de $\star$. Lorsque la loi est notée additivement, l'élément neutre est noté 0.

Remarque

⇨ Par convention, lorsqu'une loi est notée additivement, elle sera toujours commutative.

Exercice 1

⇨ Parmi les lois de composition interne citées plus haut, lesquelles admettent un élément neutre ?

Dans toute la suite de ce cours, on supposera, sauf mention explicite du contraire, que les lois sont associatives et admettent un élément neutre.

Définition 11.1.5

Soit $x \in E$. On définit par récurrence x^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en posant :
- $x^0 := e$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^{n+1} := x^n \star x$.

Remarque

⇨ Lorsque la loi est notée additivement, on n'utilise pas la notation x^n mais plutôt la notation $n \cdot x$. On a donc :
- $0 \cdot x = 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1) \cdot x = n \cdot x + x$.

Proposition 11.1.6

- Soit $x \in E$. Alors

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{aligned} x^{m+n} &= x^m \star x^n \\ (x^m)^n &= x^{mn}. \end{aligned}$$

- Soit $x, y \in E$ tels que $x \star y = y \star x$. Alors, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, x^n et y^m commutent. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (x \star y)^n = x^n \star y^n.$$

Remarque

⇨ Si la loi est notée additivement, on a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad \forall m,n \in \mathbb{N}, \qquad & (m+n)\cdot x = m\cdot x + n\cdot x \\ & n\cdot(m\cdot x) = (nm)\cdot x \\ \forall x,y \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad & n\cdot(x+y) = n\cdot x + n\cdot y. \end{aligned}$$

Définition 11.1.7

Soit $x \in E$. On dit que x est *symétrisable* pour la loi $\star$ lorsqu'il existe $y \in E$ tel que

$$x \star y = y \star x = e.$$

Si tel est le cas, y est unique et est appelé *symétrique* de x. On l'appelle *inverse* de x et on le note x^{-1} lorsque la loi est notée multiplicativement. On l'appelle *opposé* de x et on le note $-x$ lorsque la loi est notée additivement.

Proposition 11.1.8

— Si x est symétrisable, x^{-1} l'est et

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x.$$

— Si x et y sont symétrisables, $x \star y$ l'est et

$$(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}.$$

Définition 11.1.9

Soit $x \in E$. Si x est symétrisable, on étend la définition de x^n en posant :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad x^n := \begin{cases} x^n & \text{si } n \geqslant 0 \\ \left(x^{-n}\right)^{-1} & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Proposition 11.1.10

— Soit $x \in E$. Si x est symétrisable

$$\begin{aligned} \forall m,n \in \mathbb{Z}, \qquad & x^{m+n} = x^m \star x^n \\ & (x^m)^n = x^{mn}. \end{aligned}$$

— Si $x, y \in E$ sont symétrisables et commutent, alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (x \star y)^n = x^n \star y^n.$$

Remarque

⇨ Lorsque la loi est notée additivement, on a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad \forall m,n \in \mathbb{Z}, \qquad & (m+n)\cdot x = m\cdot x + n\cdot x \\ & n\cdot(m\cdot x) = (nm)\cdot x \\ \forall x,y \in E, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad & n\cdot(x+y) = n\cdot x + n\cdot y. \end{aligned}$$

Définition 11.1.11

On dit qu'un élément x de E est *régulier* lorsque

$$\begin{aligned} \forall y,z \in E, \quad & x \star y = x \star z \implies y = z \\ & y \star x = z \star x \implies y = z. \end{aligned}$$

Proposition 11.1.12

Les éléments symétrisables sont réguliers.

11.1.2 Groupe

Définition 11.1.13

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$. On dit que $(G, \star)$ est un *groupe* lorsque
- $\star$ est associative
- $\star$ admet un élément neutre
- tout élément de G est symétrisable.

Le groupe $(G, \star)$ est dit commutatif (ou *abélien*) lorsque la loi $\star$ est commutative.

Remarques

⇨ $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes commutatifs.

⇨ Si $(G, \star)$ est un groupe et $a, b \in G$, alors

$$\forall x \in G, \quad a \star x = b \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^{-1} \star b.$$

De même

$$\forall x \in G, \quad x \star a = b \quad \Longleftrightarrow \quad x = b \star a^{-1}.$$

⇨ Si $(G, \star)$ est un groupe fini, on appelle table de $(G, \star)$ le tableau à deux entrées dont les lignes et les colonnes sont indexées par les éléments de G et qui contient les produits $x \star y$. Puisque $(G, \star)$ est un groupe, chaque ligne et chaque colonne contient une et une seule fois chaque élément de G.

Exercice 2

⇨ Montrer qu'il n'existe qu'une seule table de groupe à 3 éléments.

Définition 11.1.14

Soit $(G, \star)$ un groupe et H une partie de G. On dit que H est un *sous-groupe* de $(G, \star)$ lorsque
- $e \in H$
- $\forall x, y \in H, \quad x \star y \in H$
- $\forall x \in H, \quad x^{-1} \in H$.

Si tel est le cas, alors $(H, \star)$ est un groupe.

Remarques

⇨ Si H est un sous-groupe de G, alors : $\forall x \in H, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad x^n \in H$.

⇨ En pratique, pour montrer que $(H, \star)$ est un groupe, on le fera presque toujours apparaître comme sous-groupe d'un groupe connu.

Exemples

⇨ Si $(G, \star)$ est un groupe, G et $\{e\}$ sont des sous-groupes de G. Le sous-groupe $\{e\}$ est appelé groupe *trivial*.

⇨ $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{C}, +)$. De même, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{U}$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Proposition 11.1.15

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe dont l'élément neutre est 1.

Proposition 11.1.16

Soit E un ensemble. On note $\sigma(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E. Alors $(\sigma(E), \circ)$ est un groupe, appelé groupe des *permutations* de E, dont l'élément neutre est Id_E.

Exercice 3

⇨ Montrer que l'ensemble des bijections strictement croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-groupe de $(\sigma(\mathbb{R}), \circ)$.

Proposition 11.1.17

L'intersection d'une famille de sous-groupes est un sous-groupe.

Remarque

⇨ Contrairement à l'intersection, l'union de deux sous-groupes n'est en général pas un sous-groupe.

Définition 11.1.18

Soit $(G, \star)$ un groupe et A une partie de G. Alors, au sens de l'inclusion, il existe un plus petit sous-groupe de G contenant A ; on l'appelle *groupe engendré* par A et on le note $\mathrm{Gr}(A)$.

Remarque

⇨ Si $(G, \star)$ est un groupe et x est un élément de G, le groupe engendré par $\{x\}$, appelé aussi groupe engendré par x, est $\left\{x^k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Définition 11.1.19

Soit $(G_1, \star_1)$ et $(G_2, \star_2)$ deux groupes. On dit qu'une application φ de G_1 dans G_2 est un *morphisme de groupe* lorsque

$$\forall x, y \in G_1, \quad \varphi\left(x \star_1 y\right) = \varphi(x) \star_2 \varphi(y).$$

Plus précisément, on dit que φ est un

- *endomorphisme* lorsque $(G_1, \star_1) = (G_2, \star_2)$
- *isomorphisme* lorsque φ est bijective
- *automorphisme* lorsque φ est un endomorphisme et un isomorphisme.

Remarque

⇨ L'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$ qui à θ associe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{U}, \times)$. L'application exp de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Proposition 11.1.20

Soit φ un morphisme du groupe de $(G_1, \star_1)$ dans $(G_2, \star_2)$. Alors

$$\begin{aligned} & & \varphi\left(e_1\right) &= e_2 \\ & \forall x \in G_1, & \varphi\left(x^{-1}\right) &= \left[\varphi(x)\right]^{-1} \\ \forall x \in G_1, \quad & \forall n \in \mathbb{Z}, & \varphi\left(x^n\right) &= \left[\varphi(x)\right]^n. \end{aligned}$$

Remarque

⇨ Si φ est un morphisme de groupe et que les lois sont notées additivement, alors

$$\forall x \in G_1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \varphi(n \cdot x) = n \cdot \varphi(x).$$

Exercice 4

⇨ Déterminer les endomorphismes, puis les automorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$.

Proposition 11.1.21

Soit φ un morphisme de $(G_1, \star_1)$ dans $(G_2, \star_2)$. Alors

- l'image réciproque d'un sous-groupe de G_2 est un sous-groupe de G_1.
- l'image directe d'un sous-groupe de G_1 est un sous-groupe de G_2.

Définition 11.1.22

Soit φ un morphisme de $(G_1, \star_1)$ dans $(G_2, \star_2)$. On appelle *noyau* de φ et on note $\operatorname{Ker}\varphi$ l'ensemble

$$\operatorname{Ker}\varphi := \{x \in G_1 \mid \varphi(x) = e_2\}.$$

C'est un sous-groupe de G_1.

Proposition 11.1.23

Un morphisme φ de $(G_1, \star_1)$ dans $(G_2, \star_2)$ est injectif si et seulement si

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{e_1\}.$$

Remarque

⇨ Pour montrer l'injectivité d'un morphisme, montrer que $\operatorname{Ker}\varphi = \{e_1\}$ doit devenir un réflexe. Pour cela, il est naturel de procéder par double inclusion. Mais comme l'inclusion $\{e_1\} \subset \operatorname{Ker}\varphi$ est toujours vraie, puisque $\varphi(e_1) = e_2$, il est essentiel de se concentrer sur l'inclusion $\operatorname{Ker}\varphi \subset \{e_1\}$.

Exercice 5

⇨ Soit $(G, \star)$ un groupe et φ l'application de G dans $\sigma(G)$ définie par

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & G & \longrightarrow & \sigma(G) \\ & x & \longmapsto & \begin{array}{rccc} \varphi(x) : & G & \longrightarrow & G \\ & g & \longmapsto & x \star g \end{array} \end{array}$$

Montrer que φ est bien définie et que c'est un morphisme injectif de groupe. En déduire que $(G, \star)$ est isomorphe à un sous-groupe du groupe de ses permutations.

Proposition 11.1.24

— La composée de deux morphismes de groupe est un morphisme de groupe.
— La bijection réciproque d'un isomorphisme de groupe est un isomorphisme de groupe.

Proposition 11.1.25

Si $(G, \star)$ est un groupe, on note $\operatorname{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G. $(\operatorname{Aut}(G), \circ)$ est un groupe.

Définition 11.1.26

Soit $(G_1, \star_1)$ et $(G_2, \star_2)$ deux groupes. On définit la loi $\star$ sur $G_1 \times G_2$ par

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in G_1 \times G_2, \quad (x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = (x_1 \star_1 y_1, x_2 \star_2 y_2).$$

Alors $(G_1 \times G_2, \star)$ est un groupe d'élément neutre (e_1, e_2) et

$$\forall (x_1, x_2) \in G_1 \times G_2, \quad (x_1, x_2)^{-1} = \left(x_1^{-1}, x_2^{-1}\right).$$

Exercice 6

⇨ Montrer que $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}, \times)$ est isomorphe à $(\mathbb{C}^*, \times)$.

11.1.3 Ordre d'un élément

Proposition 11.1.27

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$n\mathbb{Z} := \{kn : k \in \mathbb{Z}\}.$$

C'est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

Proposition 11.1.28

Une partie H de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$. De plus, si tel est le cas, l'entier n est unique.

Remarque

⇨ Si H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ non réduit à $\{0\}$, alors H admet un plus petit élément strictement positif $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors $H = n\mathbb{Z}$.

Définition 11.1.29

Soit $(G,\star)$ un groupe et $x \in G$.
- On dit que x est d'*ordre fini* lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$. Dans ce cas, il existe un unique $\omega \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad x^n = e \quad \Longleftrightarrow \quad \omega | n.$$
On l'appelle *ordre* de x. C'est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$.
- Sinon, on dit que x est d'*ordre infini*. On a alors
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad x^n = e \quad \Longleftrightarrow \quad n = 0.$$

Remarques

⇨ Dans $(\mathbb{C}^*, \times)$, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ est d'ordre n.

⇨ Dans un groupe, e est l'unique élément d'ordre 1.

⇨ Dans un groupe fini, tout élément est d'ordre fini.

⇨ Soit $x \in G$ un élément d'ordre $\omega \in \mathbb{N}^*$. Alors le groupe engendré par x est $\left\{e, x, x^2, \dots, x^{\omega-1}\right\}$, ces éléments étant deux à deux distincts. En particulier, l'ordre de x est le cardinal du groupe qu'il engendre.

Théorème 11.1.30: Théorème de Lagrange

Soit $(G,\star)$ un groupe fini et x un élément de G. Alors l'ordre de x divise le cardinal de G.

Remarques

⇨ Si $(G,\star)$ est un groupe fini, le cardinal de G est aussi appelé ordre de G. La version faible du théorème de Lagrange nous dit donc que dans un groupe fini, l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe.

⇨ La version forte du théorème de Lagrange dit que si $(G,\star)$ est un groupe fini et H est un sous-groupe de $(G,\star)$, alors le cardinal de H divise le cardinal de G. De cette version forte découle la version faible : si $x \in G$, il suffit de remarquer que le cardinal du groupe H engendré par x est l'ordre de x.

Exercice 7

⇨ Déterminer les sous-groupes finis de $(\mathbb{U}, \times)$.

11.2 Groupe symétrique

11.2.1 Groupe symétrique

Définition 11.2.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle *groupe symétrique* et on note $(\mathcal{S}_n, \circ)$ l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même muni de la loi de composition.

Remarques

⇨ Si $\sigma \in \mathcal{F}\left([\![1,n]\!], [\![1,n]\!]\right)$, l'application σ est aussi notée
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$
Puisque $[\![1,n]\!]$ est fini, σ est bijective si et seulement si elle est injective ou surjective. Autrement dit, σ est bijective si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :
1. Les entiers $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ sont deux à deux distincts.
2. $\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\} = [\![1,n]\!]$.

⇨ Si E est un ensemble fini de cardinal n, l'ensemble des bijections de E muni de la loi de composition est un groupe isomorphe à $(\mathcal{S}_n, \circ)$.

Proposition 11.2.2

$(\mathcal{S}_n, \circ)$ est un groupe fini de cardinal $n!$.

Définition 11.2.3

Soit $n \in \mathbb{N}$.
- Soit $p \in [\![2, n]\!]$. On appelle *cycle* de longueur p (ou p-cycle) toute permutation σ tel qu'il existe $x_0, \ldots, x_{p-1} \in [\![1, n]\!]$ deux à deux distincts tels que
  - $\sigma(x_0) = x_1, \sigma(x_1) = x_2, \ldots, \sigma(x_{p-1}) = x_0$
  - $\forall x \in [\![1, n]\!] \setminus \{x_0, \ldots, x_{p-1}\}, \quad \sigma(x) = x$

  On note $\sigma = (x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{p-1})$.
- On appelle *transposition* tout cycle de longueur 2.

Remarques

⇨ Si $n \geqslant 3$, $(\mathcal{S}_n, \circ)$ n'est pas commutatif.

⇨ Si σ est une transposition, alors $\sigma^2 = \mathrm{Id}$. On en déduit que $\sigma^{-1} = \sigma$.

⇨ Si $i \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on note $i \bmod p$, le reste de la division euclidienne de i par p. Si $\sigma = (x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{p-1})$ est un p-cycle, on a donc

$$\forall i \in [\![0, p[\![, \quad \sigma(x_i) = x_{i+1 \bmod p}.$$

⇨ Les p-cycles sont des éléments d'ordre p.

Exercices 8

⇨ Soit τ un p-cycle et $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Montrer que $\sigma\tau\sigma^{-1}$ est un p-cycle.

⇨ Montrer que si $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_n$ sont deux p-cycles, il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $\sigma_2 = \sigma\sigma_1\sigma^{-1}$.

11.2.2 Décomposition en cycles à supports disjoints

Définition 11.2.4

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $[\![1, n]\!]$ par

$$\forall x, y \in [\![1, n]\!], \quad x\mathcal{R}y \iff \left[\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \sigma^k(x) = y\right].$$

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Si $x \in [\![1, n]\!]$, la classe de x est notée $\mathcal{O}(x)$ et est appelée orbite de x.

Remarques

⇨ Les orbites étant des classes d'équivalence, elles forment une partition de $[\![1, n]\!]$.

⇨ Si $x \in [\![1, n]\!]$, alors $\mathcal{O}(x) = \left\{\sigma^k(x) : k \in \mathbb{Z}\right\}$. De plus, il existe un plus petit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^p(x) = x$. On a alors $\mathcal{O}(x) = \left\{x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{p-1}(x)\right\}$.

Définition 11.2.5

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On appelle *support* de σ et on note $\mathrm{Supp}(\sigma)$ l'ensemble des $x \in [\![1, n]\!]$ tels que $\sigma(x) \neq x$.

Remarques

⇨ Si $\sigma = (x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{p-1})$ est un p-cycle, alors $\mathrm{Supp}(\sigma) = \{x_0, \ldots, x_{p-1}\}$.

⇨ Le support de σ est stable par σ.

⇨ Deux permutations de supports disjoints commutent. Cependant la réciproque est fausse.

Théorème 11.2.6

Toute permutation s'écrit comme le produit (commutatif) de cycles à supports disjoints. De plus, à l'ordre près, il y a unicité d'une telle décomposition.

Exercices 9

⇨ Déterminer tous les éléments de $\mathcal{S}_3$. Quels sont leurs ordres ?

⇨ Quels sont les entiers qui sont l'ordre d'un élément de $\mathcal{S}_4$?

⇨ Déterminer les éléments d'ordre 2 de $\mathcal{S}_n$?

11.2.3 Signature, groupe alterné

Proposition 11.2.7

Toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ s'écrit comme le produit d'au plus $n-1$ transpositions.

Remarque

⇨ Soit $\sigma = (x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{p-1})$ un cycle de longueur p. Alors

$$\sigma = (x_0 \quad x_1)\,(x_1 \quad x_2) \cdots (x_{p-2} \quad x_{p-1})\,.$$

Exercice 10

⇨ Dans $\mathcal{S}_3$, on pose $\sigma_1 \coloneqq (1 \quad 3)$ et $\sigma_2 \coloneqq (1 \quad 2 \quad 3)$. Décomposer $\sigma_1\sigma_2$ en produit de transpositions de deux manières distinctes.

Définition 11.2.8

Soit σ une permutation et
$$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m \quad \text{et} \quad \sigma = \tau'_1 \cdots \tau'_{m'}$$
deux décompositions de σ en produit de transpositions. Alors m et m' ont même parité ; on dit que σ est *paire* lorsque ces entiers sont pairs et que σ est *impaire* dans le cas contraire. On définit la *signature* de σ que l'on note $\epsilon(\sigma)$ par
$$\epsilon(\sigma) \coloneqq \begin{cases} +1 & \text{si } \sigma \text{ est paire} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ est impaire.} \end{cases}$$

Remarques

⇨ Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ une décomposition de σ en produit de transpositions. Alors

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^m\,.$$

⇨ La signature d'un p-cycle est $(-1)^{p-1}$. En particulier, les transpositions sont impaires et les 3-cycles sont pairs.

Proposition 11.2.9

L'application ϵ de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$ est un morphisme de groupe.

Remarque

⇨ Si σ est une permutation, σ et σ^{-1} ont la même signature.

Définition 11.2.10

On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des permutations paires. C'est un sous-groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ appelé *groupe symétrique alterné.*

Remarque

⇨ Si $n \geqslant 2$, le groupe $(\mathcal{A}_n, \circ)$ est de cardinal $n!/2$.

11.3 Qcm

Groupe

Loi de composition interne

1. Sur lequel des ensembles suivants la composition ne définit pas une loi de composition interne ?

☐ **a.** L'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ☐ **b.** L'ensemble de toutes les applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$
☐ **c.** L'ensemble des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ ☐ **d.** L'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Groupe

1. Dans un groupe dont la loi est notée multiplicativement, quel est l'inverse de l'élément xyz ?

☐ **a.** $x^{-1}y^{-1}z^{-1}$ ☐ **b.** $z^{-1}y^{-1}x^{-1}$ ☐ **c.** $x^{-1}z^{-1}y^{-1}$ ☐ **d.** zyx

2. Laquelle des parties suivantes est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$?

☐ **a.** $\{-1,0,1\}$ ☐ **b.** L'ensemble des nombres pairs ☐ **c.** $\mathbb{N}$ ☐ **d.** L'ensemble des nombres impairs

3. Parmi les parties suivantes, laquelle est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$?

☐ **a.** $\mathbb{R}^*$ ☐ **b.** $\mathbb{R}_+^*$ ☐ **c.** $\mathbb{Q}$ ☐ **d.** $\mathbb{N}$

4. Un groupe multiplicatif G est non commutatif lorsque

☐ **a.** $xy \neq yx$ pour tout couple $(x,y) \in G^2$ ☐ **b.** $xy \neq yx$ pour tout couple $(x,y) \in G^2$ avec $x \neq y$
☐ **c.** Il existe $(x,y) \in G^2$ tel que $xy \neq yx$ ☐ **d.** Il existe $(x,y) \in G^2$ tel que $xy = yx$

5. Dans le groupe des bijections de $\mathbb{R}$ dans lui-même, quel est l'élément neutre ?

☐ **a.** $x \mapsto x$ ☐ **b.** $x \mapsto 0$ ☐ **c.** $x \mapsto 1$ ☐ **d.** $x \mapsto -x$

6. Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. Laquelle des lois de composition interne suivante sur $\mathcal{P}(E)$ n'est pas associative ?

☐ **a.** La réunion ☐ **b.** L'intersection ☐ **c.** La différence ☐ **d.** La différence symétrique

7. Parmi les applications suivantes, laquelle n'est pas un morphisme du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même ?

☐ **a.** $x \mapsto \ln x$ ☐ **b.** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ ☐ **c.** $x \mapsto \sqrt{x}$ ☐ **d.** $x \mapsto x$

8. Laquelle des applications suivantes n'est pas un morphisme de groupe de $(\mathbb{C},+)$ dans lui-même ?

☐ **a.** $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ ☐ **b.** $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ ☐ **c.** $z \mapsto \overline{z}$ ☐ **d.** $z \mapsto |z|$

9. Soit f un morphisme d'un groupe G dans un groupe H. Laquelle des propriétés suivantes implique que f est injectif ?

☐ **a.** $x = e_G \implies f(x) = e_H$ ☐ **b.** $f(x) = e_H \implies x = e_G$
☐ **c.** $x = y \implies f(x) = f(y)$ ☐ **d.** $y \in H \implies \exists x \in G, \quad y = f(x)$

10. Soit G un groupe dont la loi est notée multiplicativement, et a un élément de G. Laquelle des applications suivantes est toujours un morphisme de groupe de G dans G ?

☐ **a.** $f_1 : x \mapsto ax$ ☐ **b.** $f_2 : x \mapsto axa^{-1}$ ☐ **c.** $f_3 : x \mapsto axa$ ☐ **d.** $f_4 : x \mapsto x^{-1}$

Ordre d'un élément

Groupe symétrique

Groupe symétrique

1. Le cardinal du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ est

☐ **a.** n ☐ **b.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ☐ **c.** n^n ☐ **d.** $n!$

2. Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ est commutatif pour

☐ **a.** $n = 1$ ☐ **b.** $n \leqslant 2$ ☐ **c.** $n \leqslant 3$ ☐ **d.** tout n

3. Parmi les permutations $\sigma \in \mathcal{S}_3$, combien vérifient $\sigma(x) \neq x$ pour tout $x \in \{1, 2, 3\}$?

☐ **a.** 2 ☐ **b.** 3 ☐ **c.** 4 ☐ **d.** 8

4. La composée de $\sigma = (1\ 2\ 3) \circ (1\ 3\ 4)$ vaut

☐ **a.** $(2\ 4\ 3)$ ☐ **b.** $(2\ 3\ 4)$ ☐ **c.** $(1\ 3\ 4)$ ☐ **d.** $(3\ 2\ 4)$

5. Dans $\mathcal{S}_n$, combien y a-t-il de transpositions ?

☐ **a.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ☐ **b.** $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ☐ **c.** $n(n-1)$ ☐ **d.** n^2

Décomposition en cycles à supports disjoints

1. Soit $\sigma \coloneqq (1\ 2\ 3) \circ (1\ 5) \in \mathcal{S}_5$. Le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $\sigma^k = \mathrm{Id}$ est

☐ **a.** 4 ☐ **b.** 5 ☐ **c.** 6 ☐ **d.** 5!

Signature, groupe alterné

1. Soit σ la permutation circulaire de $\{1, 2, \ldots, n\}$, définie par $\sigma(k) \coloneqq k+1$ et $\sigma(n) \coloneqq 1$. Quelle est sa signature ?

☐ **a.** 1 ☐ **b.** -1 ☐ **c.** $(-1)^n$ ☐ **d.** $(-1)^{n-1}$

2. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$. Alors σ possède forcèment un point fixe

☐ **a.** si n est pair ☐ **b.** si n est impair ☐ **c.** si la signature de σ vaut 1 ☐ **d.** dans tous les cas

3. Soit σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $\sigma^7 = \mathrm{Id}$. Alors la signature de σ est

☐ **a.** 1 ☐ **b.** -1 ☐ **c.** $(-1)^n$ ☐ **d.** $(-1)^{n-1}$

4. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. L'application f qui à une partie A de E associe son complémentaire $E \setminus A$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$. Quelle est sa signature ?

☐ **a.** 1 ☐ **b.** -1 ☐ **c.** $(-1)^n$ ☐ **d.** $(-1)^{2^{n-1}}$

11.4 Exercices

Groupe

Loi de composition interne

Exercice 1 : Loi de composition interne

1. Déterminer les propriétés de la loi de composition interne $\perp$ sur $\mathbb{Q}$ définie par
$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, \quad a \perp b := a + b + ab.$$
2. Faire de même avec la loi ∇ définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par
$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad (a,b)\nabla(c,d) := \left(ac, \frac{d}{a} + bc\right).$$

Groupe

Exercice 2 : Transport de structure

1. Soit $(G, \Box)$ un groupe et H un ensemble tel qu'il existe une fonction $f : H \to G$ bijective. On définit la loi $\star$ sur H par
$$\forall x, y \in H, \quad x \star y := f^{-1}\left(f(x) \Box f(y)\right).$$
Montrer que $(H, \star)$ est un groupe isomorphe à $(G, \Box)$.
2. On définit la loi $\oplus$ sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \oplus y := \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$
Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus)$ est un groupe commutatif.

Exercice 3 : Sous groupe et permutations

Soit E un ensemble et A une partie de E. On note $\mathcal{S}(A)$ l'ensemble des permutations f de E qui laissent la partie A invariante, c'est-à-dire telles que $f(A) = A$. Montrer que $\mathcal{S}(A)$ est un sous-groupe de $(\sigma(E), \circ)$.

Exercice 4 : Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que
$$a\mathbb{Z} := \{ka : k \in \mathbb{Z}\}$$
est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

Le but de cet exercice est de montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit de cette forme, soit dense dans $\mathbb{R}$. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ distinct de $\{0\}$. On pose $a := \inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right)$.

2. Montrer que a est bien défini.
3. Dans cette question on suppose que $a > 0$.
   (a) Montrer que $a \in G$.
   (b) En déduire que $G = a\mathbb{Z}$.
4. Montrer que si $a = 0$, G est dense dans $\mathbb{R}$.

On résume les conclusions des questions précédentes en disant que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit discrets soit denses dans $\mathbb{R}$.

5. Soit a et b deux réels non nuls tels que $a/b \notin \mathbb{Q}$. Montrer que
$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{na + mb : n, m \in \mathbb{Z}\}$$
est dense dans $\mathbb{R}$.
6. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit qu'un réel T est une période de f lorsque
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x).$$
   (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des périodes de f est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
   (b) On suppose que f est non constante et périodique. Montrer qu'il existe un unique $T_0 > 0$ tel que $\mathcal{P} = T_0\mathbb{Z}$.

Exercice 5 : Sous-groupe de $\mathbb{U}$

Montrer que $\cup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe strict de $(\mathbb{U},\cdot)$.

Exercice 6 : Union de deux sous-groupes

Soit $(G,*)$ un groupe, et H et K deux sous-groupes de G. Montrer que $H\cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H\subset K$ ou $K\subset H$.

Exercice 7 : Groupes tels que $x^2=e$

Soit $(G,\star)$ un groupe tel que
$$\forall x\in G,\quad x^2=e.$$
Montrer que G est commutatif.

Exercice 8 : Action d'un groupe sur lui-même

Soit $(G,\star)$ un groupe, dont l'élément neutre est noté e. Pour $a\in G$, on définit les applications γ_a et τ_a de G dans lui-même par les formules
$$\forall g\in G,\quad \gamma_a(g)\coloneqq a\star g \quad\text{et}\quad \tau_a(g)\coloneqq a\star g\star a^{-1}.$$

1. Montrer que γ_a et τ_a sont des bijections. Montrer que τ_a est un automorphisme de G. Que dire de γ_a ?
2. Pour a et b éléments quelconques de G, calculer $\tau_a\circ\tau_b$. Retrouver le fait que τ_a est un automorphisme de G, et donner une autre expression de $(\tau_a)^{-1}$.
3. On note $\mathrm{Int}(G)$ le sous ensemble de $\mathrm{Aut}(G)$ formé des applications τ_a pour $a\in G$. Ce sont les automorphismes dits *intérieurs* de G. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccc}\varphi: & G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(G)\\ & a & \longmapsto & \tau_a\end{array}$$
est un morphisme du groupe $(G,\star)$ dans le groupe $(\mathrm{Aut}(G),\circ)$, et en déduire que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{Aut}(G),\circ)$.

Exercice 9 : Groupe diédral

Pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$, on pose
$$\begin{array}{rccc}\varphi_{a,b}: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & z & \longmapsto & az+b\end{array}$$
et on pose $A^+\coloneqq\{\varphi_{a,b} : (a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\}$. On pose enfin
$$\begin{array}{rccc}s: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & z & \longmapsto & \overline{z}\end{array}$$

1. (a) Montrer que A^+ est un sous-groupe de $(\sigma(\mathbb{C}),\circ)$.
   (b) On pose $A\coloneqq A^+\cup A^+s$ où $A^+s\coloneqq\{f\circ s : f\in A^+\}$. Montrer que A est un sous-groupe de $(\sigma(\mathbb{C}),\circ)$.
2. Soit $n\geqslant 2$. On note D_n l'ensemble des fonctions $f\in A$ pour lesquelles $f(\mathbb{U}_n)\subset\mathbb{U}_n$.
   (a) Montrer que si $f\in D_n$ l'application induite à $\mathbb{U}_n$ est bijective.
   (b) Montrer que D_n est un sous-groupe de A. On l'appelle *groupe diédral de degré n*.
   (c) Montrer que D_n contient s ainsi que
   $$\begin{array}{rccc}r: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & z & \longmapsto & \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}z\end{array}$$
   (d) Que vaut la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$? En déduire que 0 est point fixe de tout élément de D_n.
   (e) Montrer que
   $$D_n=\left\{r^k : k\in[\![0,n[\![\right\}\cup\left\{r^k\circ s : k\in[\![0,n[\![\right\}$$
   puis décrire géométriquement les éléments de D_n.

Ordre d'un élément

Exercice 10 : Théorème de Lagrange

Soit $(G, \star)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G. On souhaite montrer que $\mathrm{Card}(H)$ divise $\mathrm{Card}(G)$. Pour cela, on introduit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur G par

$$\forall x, y \in G, \quad x\mathcal{R}y \iff yx^{-1} \in H.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in G$. Montrer que
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & H & \longrightarrow & \mathrm{Cl}(x) \\ & h & \longmapsto & hx \end{array}$$
est une bijection.
3. Conclure.

Exercice 11 : Existence d'un élément d'ordre 2

Soit $(G, \star)$ un groupe fini de cardinal pair. Le but de cet exercice est de montrer qu'il possède un élément d'ordre 2. Pour cela, on considère l'ensemble

$$E \coloneqq \left\{x \in G \;\middle|\; x^2 \neq e\right\}.$$

1. Montrer que : $\forall x \in E, \quad x^{-1} \in E$.
2. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur E par
$$\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \iff y = x \quad \text{ou} \quad y = x^{-1}.$$
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Quel est le cardinal de chacune de ses classes d'équivalence ?
3. Conclure.

On peut généraliser ce résultat en montrant que si p est un nombre premier divisant l'ordre de G, ce dernier possède un élément d'ordre p. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Sylow.

Exercice 12 : Les groupes d'ordre inférieur à 5 sont commutatifs

1. Soit $(G, \star)$ un groupe fini dont le cardinal p est un nombre premier et $x \in G \setminus \{e\}$. Montrer que
$$G = \left\{x^k : k \in [\![0, p-1]\!]\right\}$$
puis en déduire que G est commutatif.
2. Montrer que les groupes finis de cardinal inférieur ou égal à 5 sont commutatifs.
On montrera qu'il n'y a que deux tables possibles pour les groupes de cardinal 4.
3. Donner un exemple de groupe de cardinal 6 non commutatif.

Groupe symétrique

Groupe symétrique

Décomposition en cycles à supports disjoints

Exercice 13 : Décomposition en produit de cycles

Décomposer la permutation suivante en produit de cycles de support disjoints.

$$\sigma \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 4 & 3 & 8 & 7 & 10 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

En déduire sa signature.

Exercice 14 : Exercice

Déterminer l'ordre maximal d'un élément de $\mathcal{S}_{10}$.

Signature, groupe alterné

Exercice 15 : Générateurs du groupe symétrique

1. Montrer que les transpositions $(1 \quad i)$ (pour $i \in [\![2, n]\!]$) engendrent le groupe symétrique $(\mathcal{S}_n, \circ)$.
2. Montrer que les cycles de longueur 3 engendrent $(\mathcal{A}_n, \circ)$.

Exercice 16 : Exercice

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un morphisme injectif de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\mathcal{A}_{n+2}, \circ)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de morphisme injectif de $(\mathcal{S}_4, \circ)$ dans $(\mathcal{A}_5, \circ)$.

Exercice 17 : Définition de la signature

Soit $n \geqslant 2$. Le but de cet exercice est de démontrer qu'il existe deux et seulement deux morphismes de groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
— L'application $\bar{1}$ qui a toute permutation σ associe 1.
— Un autre morphisme ϵ que l'on définira comme étant la signature.

1. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe au plus un seul morphisme φ de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ différent de $\bar{1}$. Soit φ un morphisme de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
   (a) Soit τ une transposition. Montrer que $\varphi(\tau) \in \{-1, 1\}$.
   (b) En déduire que φ est à valeurs dans $\{-1, 1\}$.
   (c) Soit τ_1 et τ_2 deux transpositions.
      i. Montrer que τ_1 et τ_2 sont conjuguées, c'est-à-dire qu'il existe une permutation σ telle que
      $$\tau_2 = \sigma\tau_1\sigma^{-1}$$
      ii. En déduire que $\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2)$.
   (d) Conclure
2. Le but de cette partie est de montrer l'existence d'un morphisme de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ différent de $\bar{1}$.
   On dit qu'une partie A de $[\![1, n]\!]^2$ est une représentation des couples d'éléments de $[\![1, n]\!]$ lorsque
   $$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \begin{cases} (i, j) \in A \Longrightarrow (j, i) \notin A \\ i \neq j \Longrightarrow [(i, j) \in A \quad \text{ou} \quad (j, i) \in A] \end{cases}$$
   (a) Soit A une représentation des couples d'éléments de $[\![1, n]\!]$ et σ une permutation de $[\![1, n]\!]$. Montrer que :
   $$\sigma(A) \coloneqq \{(\sigma(i), \sigma(j)) : (i, j) \in A\}$$
   est une représentation des couples d'éléments de $[\![1, n]\!]$.
   (b) Soit A une représentation des couples d'éléments de $[\![1, n]\!]$ et σ une permutation de $[\![1, n]\!]$. On note n_A le nombre d'inversions de σ, c'est-à-dire le nombre d'éléments (i, j) de A tels que $j - i$ et $\sigma(j) - \sigma(i)$ soient de signes distincts. On définit alors la signature de σ par
   $$\epsilon(\sigma) \coloneqq (-1)^{n_A}$$
      i. Montrer que la signature ne dépend pas du choix de A.
      ii. Montrer que :
      $$\epsilon(\sigma) = \prod_{(i,j) \in A} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$
      iii. En déduire que ϵ est un morphisme de groupe
   (c) Montrer que ϵ est différent de $\bar{1}$ et conclure.
3. En déduire qu'il existe un unique morphisme de $\mathcal{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$ qui vaut -1 sur les transpositions. Ce morphisme est appelé signature.

Chapitre 12

Limites et continuité

« Un mathématicien est une machine à transformer le café en théorèmes. »

— PAUL ERDÖS (1913-1996)

« Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée ! »

— JOHN VON NEUMANN (1903–1957)

12.1 Fonction numérique, topologie élémentaire

Définition 12.1.1

On appelle *fonction numérique* toute fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarques

- Dans la suite de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Il arrive que l'on définisse une fonction par son expression « $f(x)$ ». C'est alors au lecteur de déterminer son domaine de définition, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels « $f(x)$ » a un sens.

Définition 12.1.2

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ et A une partie de $\mathcal{D}$. On dit que f *vérifie la propriété* $\mathcal{P}$ *sur* A lorsque la restriction de f à A vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

12.1.1 Propriété locale

Définition 12.1.3

On dit que $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est *définie au voisinage* de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque, pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de a, $\mathcal{D} \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$.

Proposition 12.1.4

Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ qui tend vers a.

Définition 12.1.5

On dit que $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ *au voisinage de* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{D} \cap \mathcal{V}$.

Remarques

- La fonction sin est croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Elle est donc croissante au voisinage de 0.
- Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est bornée au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\exists \eta > 0, \quad \exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant M.$$

Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est bornée au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad x \geqslant m \Longrightarrow |f(x)| \leqslant M.$$

Définition 12.1.6

On dit qu'une propriété $\mathcal{P}$ est *locale en* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque, quelles que soient les fonctions $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ définies au voisinage de a, si il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que

$$\forall x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{V}, \quad g(x) = f(x)$$

alors $\mathcal{P}(f)$ est vrai si et seulement si $\mathcal{P}(g)$ est vrai.

Définition 12.1.7

On dit qu'un élément $a \in \mathcal{D}$ est *intérieur* à $\mathcal{D}$ lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}$.

Remarque

- Si I est un intervalle, un élément $a \in I$ est intérieur à I si et seulement si ce n'est pas une de ses extrémités.

12.2 Limite

12.2.1 Définition, propriétés élémentaires

Définition 12.2.1

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \mathbb{K}$. On dit que $f(x)$ *tend* vers l lorsque x tend vers a et on note

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$$

lorsque, quel que soit le voisinage $\mathcal{W}$ de l, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad x \in \mathcal{V} \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{W}.$$

La propriété « tend vers l lorsque x tend vers a » est locale en a.

Remarque

- En pratique, on utilisera les caractérisations suivantes :
  - Pour $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{K}$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

— Pour $a \in \mathbb{R}$ et $l = -\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant M.$$

— Pour $a \in \mathbb{R}$ et $l = +\infty$

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant m.$$

— Pour $a = -\infty$ et $l \in \mathbb{K}$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad x \leqslant A \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

— Pour $a = -\infty$ et $l = -\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad x \leqslant A \Longrightarrow f(x) \leqslant M.$$

— Pour $a = -\infty$ et $l = +\infty$

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad x \leqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant m.$$

— Pour $a = +\infty$ et $l \in \mathbb{K}$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad x \geqslant B \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

— Pour $a = +\infty$ et $l = -\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant M.$$

— Pour $a = +\infty$ et $l = +\infty$

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant m.$$

Exercice 1

⇨ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que

$$f(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que dire si f n'est pas croissante ?

Proposition 12.2.2

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \mathbb{K}$. Alors

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$$

si et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de $\mathcal{D}$ tendant vers a, la suite $(f(u_n))$ tend vers l.

Remarques

⇨ Si f est définie en $a \in \mathbb{R}$ et admet une limite en a, cette limite est $f(a)$.

⇨ Cette proposition est utile pour prouver qu'une fonction f n'a pas de limite en a. Pour cela, il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a.$$

et telles que les suites de terme général $f(u_n)$ et $f(v_n)$ aient des limites distinctes.

Exercices 2

⇨ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.

⇨ Montrer que la fonction d'expression $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

Proposition 12.2.3

Si f admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors cette limite est unique. Si tel est le cas, on écrit

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Proposition 12.2.4

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \mathbb{K}$. On suppose que

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$

Alors

$$|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} |l| \quad \text{et} \quad \overline{f}(x) \xrightarrow[x \to a]{} \bar{l}.$$

Proposition 12.2.5

Soit f une fonction complexe définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \mathbb{C}$. Alors

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\operatorname{Re}[f(x)] \xrightarrow[x \to a]{} \operatorname{Re}(l) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}[f(x)] \xrightarrow[x \to a]{} \operatorname{Im}(l)\right].$$

Proposition 12.2.6

- Les théorèmes usuels portant sur les combinaisons linéaires, les produits et les quotients de limites de suites restent vrais pour les fonctions.
- Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tendant vers $l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ en a et g une fonction définie au voisinage de l_1 tendant vers $l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) en l_1. Si $g \circ f$ est définie au voisinage de a, alors

$$(g \circ f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_2.$$

Remarques

⇨ Comme pour les suites, la somme d'une fonction admettant une limite finie en a et d'une fonction n'admettant pas de limite en a n'admet pas de limite en a. Les autres théorèmes de ce type sont souvent faux ; par exemple, il est possible qu'une fonction f n'admette pas de limite en a bien que $g \circ f$ admette une limite en a.

⇨ Soit f et g sont deux fonctions réelles définies sur $\mathcal{D}$. On définit les fonctions $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \sup(f, g)(x) := \max(f(x), g(x)) \quad \text{et} \quad \inf(f, g)(x) := \min(f(x), g(x)).$$

Si f et g admettent pour limites respectives l_f et $l_g \in \mathbb{R}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors

$$\sup(f, g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \max(l_f, l_g) \quad \text{et} \quad \inf(f, g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \min(l_f, l_g).$$

12.2.2 Limite et ordre sur $\mathbb{R}$

Proposition 12.2.7

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ une fonction admettant une limite finie en a. Alors f est bornée au voisinage de a.

Proposition 12.2.8

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Si f est majorée par $M \in \mathbb{R}$, alors $l \leqslant M$.
- Si f est minorée par $m \in \mathbb{R}$, alors $l \geqslant m$.

Proposition 12.2.9

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Si M est un réel tel que $l < M$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad x \in \mathcal{V} \Longrightarrow f(x) \leqslant M.$$

- Si m est un réel tel que $l > m$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad x \in \mathcal{V} \Longrightarrow f(x) \geqslant m.$$

Remarques

⇨ En pratique, il conviendra d'expliciter les voisinages. Par exemple, si $f(x)$ tend vers $l < M$ lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$, il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant M.$$

⇨ Si une fonction complexe f admet une limite $l \in \mathbb{C}$ non nulle en $+\infty$, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad x \geqslant m \Longrightarrow f(x) \neq 0.$$

Théorème 12.2.10: Théorème des gendarmes

Soit f, g et $h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$
On suppose que f et h admettent la même limite finie $l \in \mathbb{R}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors
$$g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$

Proposition 12.2.11

Soit f et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant g(x)$$
et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

— Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.
— Si $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.

Proposition 12.2.12

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \in \mathbb{K}$ et g une fonction réelle positive telle que

— $\forall x \in \mathcal{D}, \quad |f(x) - l| \leqslant g(x)$,
— $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

Alors
$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$

Exercice 3

⇨ Déterminer la limite, si elle existe, de la fonction d'expression $\frac{x}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ en 0.

12.2.3 Limite à gauche, à droite

Définition 12.2.13

— Soit f une fonction définie au voisinage à gauche de $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que f admet l pour *limite à gauche* en a lorsque la restriction de f à $\mathcal{D} \cap]-\infty, a[$ admet l pour limite en a. Si tel est le cas, on note
$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x < a}]{} l.$$
La propriété « tend vers l lorsque x tend vers a par la gauche » est locale à gauche en a.

— Soit f une fonction définie au voisinage à droite de $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que f admet l pour *limite à droite* en a lorsque la restriction de f à $\mathcal{D} \cap]a, +\infty[$ admet l pour limite en a. Si tel est le cas, on note
$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x > a}]{} l.$$
La propriété « tend vers l lorsque x tend vers a par la droite » est locale à droite en a.

Remarque

⇨ On définit de même les notions de limite à gauche au sens large, de limite à droite et de limite épointée (pour $x \neq a$). On écrit alors respectivement
$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \leqslant a}]{} l, \qquad f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \geqslant a}]{} l, \qquad f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \neq a}]{} l.$$

Proposition 12.2.14

Soit f une fonction définie au voisinage de a et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a si et seulement si, les objets ci-dessous susceptibles d'avoir un sens

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x), \quad f(a) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

existent et sont égaux à l.

Remarques

⇨ Par exemple, si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$, et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers 0 si et seulement si

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x < 0}]{} l \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} l.$$

De même, si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ et $l \in \mathbb{R}$, alors $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers 0 si et seulement si

$$f(0) = l \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} l.$$

⇨ On a bien entendu des théorèmes similaires faisant intervenir les limites au sens large. Par exemple, si f est définie sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a si et seulement si

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \leqslant a}]{} l \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x > a}]{} l.$$

Exercice 4

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Théorème 12.2.15: Théorème de la limite monotone

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante sur un intervalle I.

— Si $a \in I$ n'est pas une borne de I, f admet une limite finie à gauche (au sens strict) et une limite finie à droite (au sens strict) en a. De plus

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x).$$

— Si a est la borne supérieure de I, f admet une limite en a. Cette limite est finie si f est majorée, et est égale à $+\infty$ sinon.

— Si a est la borne inférieure de I, f admet une limite en a. Cette limite est finie si f est minorée, et est égale à $-\infty$ sinon.

Remarques

⇨ Une proposition similaire existe pour les fonctions décroissantes.

⇨ Si $f :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$ est une fonction croissante admettant une limite $l \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors

$$\forall x \in]-\infty, a[, \quad f(x) \leqslant l.$$

De plus, si f est strictement croissante, alors

$$\forall x \in]-\infty, a[, \quad f(x) < l.$$

12.3 Continuité

12.3.1 Continuité ponctuelle

Définition 12.3.1

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est *continue* en $x_0 \in \mathcal{D}$ lorsque

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0).$$

La propriété « est continue en x_0 » est locale en x_0. On appelle domaine de continuité de f l'ensemble des $x_0 \in \mathcal{D}$ en lesquels f est continue.

Remarques

- La continuité de f en x_0 s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

- Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est continue en $x_0 \in \mathcal{D}$ si et seulement si elle admet une limite en x_0.
- On dit qu'une fonction f est *continue à droite* en x_0 lorsque

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}]{} f(x_0).$$

  De même, on définit la notion de *continuité à gauche*. Une fonction est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en x_0.
- On dit qu'une fonction f admet une *discontinuité de première espèce* en x_0 lorsqu'elle admet des limites à droite et à gauche et lorsque l'une de ces limites est différente de $f(x_0)$. Par exemple, la fonction partie entière admet une discontinuité de première espèce en tout point $x_0 \in \mathbb{Z}$.
- Les fonctions valeur absolue, puissance (en particulier les puissances entières et les racines n-ièmes), ln, exp, les fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques, directes et réciproques sont continues en tout point de leur domaine de définition.
- Une fonction continue en x_0 est bornée au voisinage de x_0.

Exercice 5

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

  Montrer que f est discontinue en 0 et que cette discontinuité n'est pas de première espèce.

Définition 12.3.2

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. Lorsque $f(x)$ admet une limite finie $l \in \mathbb{K}$ lorsque x tend vers a, on dit que f est *prolongeable par continuité* en a. La fonction

$$\hat{f} : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

est alors appelée *prolongement par continuité* de f en a. C'est une fonction continue en a.

Proposition 12.3.3

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ une fonction et $x_0 \in \mathcal{D}$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite (u_n) d'éléments de $\mathcal{D}$ convergeant vers x_0

$$f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0).$$

Remarques

- Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et (u_n) une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

  Alors, si (u_n) admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, c'est une borne de I ou un point fixe de f.

⇨ Soit f et g deux fonctions continues en tout point de $\mathbb{R}$. Si elles coïncident sur $\mathbb{Q}$, alors $f = g$.

⇨ Cette proposition est utile pour prouver qu'une fonction f n'est pas continue en x_0. Pour cela, il suffit de trouver une suite (u_n) convergeant vers x_0 telle que la suite de terme général $f(u_n)$ ait une limite différente de $f(x_0)$.

Exercices 6

⇨ Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ est discontinue en tout point.

⇨ Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues en tout point de $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Proposition 12.3.4: Théorèmes usuels

Soit f et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues en $x_0 \in \mathcal{D}$. Alors
- Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ est continue en x_0.
- fg est continue en x_0.
- Si $g(x_0) \neq 0$, g ne s'annule pas au voisinage de x_0 et f/g est continue en x_0.

Proposition 12.3.5: Théorèmes usuels

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{K}$ deux fonctions telles que $g \circ f$ est défini au voisinage de $x_0 \in \mathcal{D}_f$. Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Remarque

⇨ La somme d'une fonction continue en x_0 et d'une fonction discontinue en x_0 est discontinue en x_0. Les autres propositions de ce type peuvent être fausses. Par exemple, si f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := x \quad \text{et} \quad g(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

alors f est continue en 0 et g ne l'est pas. Pourtant $f \cdot g$ l'est. On retiendra que les réciproques des théorèmes usuels peuvent être fausses.

Proposition 12.3.6

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ une fonction continue en $x_0 \in \mathcal{D}$. Alors $\overline{f}$ et $|f|$ sont continues en x_0.

Proposition 12.3.7

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une fonction et $x_0 \in \mathcal{D}$. Alors

$$[f \text{ est continue en } x_0] \iff [\operatorname{Re}(f) \text{ et } \operatorname{Im}(f) \text{ sont continues en } x_0].$$

Remarque

⇨ Si f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ continue en x_0, alors e^f est continue en x_0.

Exercice 7

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{e^{ix}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ i & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

12.3.2 Continuité sur une partie

Définition 12.3.8

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$.
- On dit que f est *continue* lorsqu'elle est continue en tout point de $\mathcal{D}$.
- Si A est une partie de $\mathcal{D}$, on dit que f est continue sur A lorsque la restriction de f à A est continue.

Remarque

⇨ Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ et A une partie de $\mathcal{D}$. Si f est continue en tout point de A, alors f est continue sur A. Cependant, la réciproque est fausse. En effet, si f est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors f est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas continue en 0.

Définition 12.3.9

Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est *k-lipschitzienne* lorsque

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|\,.$$

Exercice 8

⇨ Montrer que les fonctions « valeur absolue » et « sinus » sont 1-lipschitziennes.

Proposition 12.3.10

Une fonction lipschitzienne est continue.

Dans la suite du cours d'analyse, on s'intéressera le plus souvent à des fonctions dont le domaine de définition est une partie relativement simple de $\mathbb{R}$. Afin de formaliser cela, une partie de $\mathbb{R}$ sera dite *élémentaire* lorsque c'est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. Par exemple $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ sont des parties élémentaires de $\mathbb{R}$ alors que $\mathbb{Q}$ n'en est pas une. Notons que cette définition est propre à ce cours. Les parties élémentaires de $\mathbb{R}$ jouissent de nombreuses propriétés : $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont des parties élémentaires, une union finie de parties élémentaires est une partie élémentaire, une intersection finie de parties élémentaires est une partie élémentaire, le complémentaire d'une partie élémentaire est une partie élémentaire. Autrement dit, tout ensemble construit à partir de parties élémentaires à l'aide d'un nombre fini d'opérations est élémentaire.

On dit que deux intervalles I et J sont *bien disjoints* lorsque $I \cup J$ n'est pas un intervalle. En particulier deux intervalles bien disjoints sont disjoints. Mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de $I = [0, 1]$ et $J =]1, 2]$ qui sont disjoints mais qui ne sont pas bien disjoints. On montre que si A est une partie élémentaire de $\mathbb{R}$, à réordonnement près, il existe un unique n-uplet $(I_1, \ldots, I_n)$ d'intervalles deux à deux biens disjoints tels que $A = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$. On dit que les I_k sont les *composantes connexes* de A. Enfin, on dit que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est une *extrémité* de A lorsque c'est l'extrémité d'un des I_k.

Si $\mathcal{D}$ est une partie élémentaire, une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si a est un élément ou une extrémité de $\mathcal{D}$. D'autre part, un élément $a \in \mathcal{D}$ est intérieur à $\mathcal{D}$ si et seulement si ce n'est pas une extrémité de $\mathcal{D}$.

Exercice 9

⇨ Montrer que $\mathcal{D} := \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ est une partie élémentaire. Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$, déterminer
- L'ensemble des $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pour lesquels f est définie au voisinage de a.
- L'ensemble des $a \in \mathcal{D}$ intérieurs à $\mathcal{D}$.

Proposition 12.3.11

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur un domaine *élémentaire* et $\mathcal{D} = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ la décomposition de $\mathcal{D}$ en composantes connexes. Alors f est continue si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f est continue sur I_k.

Proposition 12.3.12

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
- Si f est continue sur $I \cap]a, +\infty[$, elle est continue en tout point de $I \cap]a, +\infty[$.
- Si f est continue sur $I \cap [a, +\infty[$, elle est continue à droite en a et en tout point de $I \cap]a, +\infty[$.

12.3.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 12.3.13: Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Si $y_0 \in$ « $[f(a), f(b)]$ », il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Remarques

- ⇨ Une fonction réelle continue ne s'annulant pas sur un intervalle I est de signe constant.
- ⇨ Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que

$$\forall x \in I, \quad [f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x) = 1] \,.$$

Alors f est constante. Plus généralement, si sur un intervalle, une fonction continue prend un nombre fini de valeurs, alors elle est constante.

Exercice 10

⇨ Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer que f admet un point fixe.

Proposition 12.3.14

Soit f une fonction réelle continue sur $]a, b[$ admettant respectivement pour limite l_a et $l_b \in \overline{\mathbb{R}}$ en a et $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $y_0 \in$ « $]l_a, l_b[$ », il existe $x_0 \in \,]a, b[$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Exercice 11

⇨ Montrer que tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Proposition 12.3.15

L'image d'un intervalle par une fonction réelle continue est un intervalle.

Remarques

- ⇨ Cette proposition est une reformulation du théorème des valeurs intermédiaires.
- ⇨ Il est possible que les intervalles I et $f(I)$ ne soient pas de même nature (ouvert, fermé, ouvert à gauche et fermé à droite). Par exemple, si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \frac{1}{1 + x^2}$$

on a $f\left(]-\infty, +\infty[\right) = \,]0, 1]$.

Théorème 12.3.16: Théorème de la bijection

— Soit f une fonction continue, strictement croissante sur $[a, b]$. Alors elle réalise une bijection de $[a, b]$ sur

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

— Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction continue, strictement croissante sur $]a, b[$. On pose

$$l_a \coloneqq \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{et} \quad l_b \coloneqq \lim_{x \to b} f(x).$$

Alors f réalise une bijection de $]a, b[$ sur

$$f\left(]a, b[\right) = \,]l_a, l_b[\,.$$

Proposition 12.3.17

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle continue strictement monotone sur I. Alors f induit une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J \coloneqq f(I)$ et sa bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue sur J.

Remarque

- ⇨ La fonction sin est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Comme $\sin(-\pi/2) = -1$ et $\sin(\pi/2) = 1$, elle réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$. Sa bijection réciproque, la fonction Arcsin est donc continue sur $[-1, 1]$.

Exercice 12

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) := x\mathrm{e}^x$$

Montrer que f réalise une bijection continue de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, que f^{-1} est continue et que

$$f^{-1}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

Proposition 12.3.18

Soit f une fonction réelle, continue et injective sur un intervalle I. Alors f est strictement monotone.

12.3.4 Théorème de compacité

Définition 12.3.19

Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble non vide X. Si f est majorée sur X, $\{f(x) : x \in X\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure notée

$$\sup_{x \in X} f(x).$$

On dit que cette borne est atteinte lorsqu'il existe $x_0 \in X$ tel que

$$f(x_0) = \sup_{x \in X} f(x)$$

c'est-à-dire lorsque l'ensemble $\{f(x) : x \in X\}$ admet un plus grand élément ; si tel est le cas, la borne supérieure est notée

$$\max_{x \in X} f(x).$$

Remarques

⇨ On définit de même la notion de borne inférieure.

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := x(1-x).$$

Alors f est bornée et atteint ses bornes sur $[0, 1]$.

$$\sup_{x \in [0,1]} x(1-x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \inf_{x \in [0,1]} x(1-x) = f(0) = f(1) = 0.$$

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) := \frac{1}{x}.$$

Alors f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, elle est minorée mais n'atteint pas sa borne inférieure sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\inf_{x \in \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{x} = 0.$$

Théorème 12.3.20: Théorème de compacité

Sur un segment, une fonction réelle continue est bornée et atteint ses bornes.

Remarque

⇨ Si $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est une fonction continue, on applique souvent ce théorème à la fonction $|f|$. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Exercice 13

⇨ Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b], \quad 0 \leqslant f(x) < 1$. Montrer que si (u_n) est une suite d'éléments de $[a, b]$, alors

$$f(u_n)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Proposition 12.3.21

L'image d'un segment par une fonction réelle continue est un segment.

12.3.5 Continuité uniforme

Définition 12.3.22

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est *uniformément continue* lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}, \quad |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 14

⇨ 1. Montrer que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x - y|}.$$

2. En déduire que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $\mathbb{R}_+$, est uniformément continue.

Proposition 12.3.23

Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est uniformément continue, alors elle est continue.

Remarques

⇨ Nous verrons que la réciproque est fausse, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions continues qui ne sont pas uniformément continues.

⇨ Soit f une fonction continue. Alors

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall y \in \mathcal{D}, \quad |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Les deux premiers quantificateurs étant de même nature, on peut les échanger, donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall y \in \mathcal{D}, \quad |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Une fonction est donc uniformément continue lorsqu'on peut échanger les quantificateurs portant sur x et η, c'est-à-dire lorsqu'il est possible de choisir η indépendamment de x.

⇨ Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Exercice 15

⇨ 1. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ une fonction uniformément continue. Montrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites d'éléments de $\mathcal{D}$ telles que $u_n - v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, alors

$$f(u_n) - f(v_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

2. En déduire que la fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas uniformément continue.

Théorème 12.3.24: Théorème de Heine

Sur un segment, une fonction continue est uniformément continue.

12.4 Exercices

Fonction numérique, topologie élémentaire

Exercice 1 : Monotonie

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 2 : Une fonction périodique étrange

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des périodes de f est $\mathbb{Q}$. *On a donc construit une fonction périodique non constante qui n'admet pas de plus petite période strictement positive.*

Propriété locale

Limite

Définition, propriétés élémentaires

Exercice 3 : Non existence d'une limite

Montrer que la fonction définie sur $]0,1[$ par

$$\forall x \in \left]0,1\right[, \quad f(x) \coloneqq \sin\left(\frac{1}{x - x^2}\right)$$

n'a pas de limite en 0.

Exercice 4 : Manipulation de limite

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(2x) - f(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

En remarquant que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right] + f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

montrer que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

Limite et ordre sur $\mathbb{R}$

Limite à gauche, limite à droite

Exercice 5 : Existence et calculs de limites

Existence et calcul des limites des expressions suivantes

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \text{ à droite en } 0, \qquad x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } 0,$$

$$x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \text{ en } 0, \qquad \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } 0, \qquad \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}} \text{ en } +\infty.$$

Exercice 6 : Existence et calculs de limites

Existence et calcul des limites des expressions suivantes

$$\textbf{a. } \frac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1} \text{ en } \frac{1}{2}, \qquad \textbf{b. } \frac{3}{x^3 - 1} - \frac{2}{x^2 - 1} \text{ en } 1,$$

$$\textbf{c. } x^n \mathrm{e}^{-1/x^2} \text{ en } 0 \text{ avec } n \in \mathbb{Z}, \qquad \textbf{d. } \frac{\ln(\operatorname{ch}(\alpha x))}{\ln(\operatorname{ch} x)} \text{ en } +\infty \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R},$$

Continuité

Continuité ponctuelle

Exercice 7 : Continuité par la monotonie

1. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si f est décroissante et $x \mapsto xf(x)$ est croissante, alors f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire que
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}} \end{array}$$
est continue.

Exercice 8 : Une fonction continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ et } x = \frac{p}{q} \text{ avec } (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \text{ et } p \wedge q = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f est discontinue en tout $x \in \mathbb{Q}$.
2. Le but de cette question est de montrer que f est continue en tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   (a) Soit (p_n) une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$ et (q_n) une suite d'éléments de $\mathbb{N}^*$ telles que
   $$\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x.$$
   Montrer que $(q_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
   (b) En déduire que f est continue en x.

Exercice 9 : Équations fonctionnelles

1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues en 0, telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x).$$
2. Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) - f(x) = x.$$

Exercice 10 : Une équation fonctionnelle

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin \frac{x}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n}.$$
2. Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x) \cos x.$$

Exercice 11 : Une équation fonctionnelle

On cherche à déterminer l'ensemble des applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telles que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

1. Soit f une telle application.
   (a) On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.
   Dans la suite, on suppose que f ne s'annule pas.
   (b) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0.$$
   (c) En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^{ax}.$$
   On pourra utiliser le résultat d'un exercice similaire vu en cours.
2. Conclure.

Exercice 12 : Prolongement d'inégalités

1. Soit f et g deux fonctions continues $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) < g(x).$$
   (a) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x).$$
   (b) Montrer que l'on a pas nécessairement
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) < g(x).$$
2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que
$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$
Montrer que f est strictement croissante, c'est-à-dire que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$

Exercice 13 : Limite uniforme de fonctions continues

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$
Montrer que f est continue.

Continuité sur une partie

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 14 : Point fixe

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que I est stable par f et que $f \circ f$ possède un point fixe. Montrer que f en possède un aussi.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante. Montrer que f possède un et un seul point fixe.

Exercice 15 : Équation fonctionnelle

Déterminer les fonctions f, continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)^2 - 2xf(x) - 1 = 0.$$

Exercice 16 : Théorème de la corde raide

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer qu'il existe $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que
$$f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x).$$
2. Montrer que si un coureur parcourt 20 km en une heure, il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel il a exactement parcouru 10 km.
3. Plus généralement, montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que
$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x).$$
4. Si $\alpha \in [0, 1]$, existe-t-il toujours $x \in [0, 1 - \alpha]$ tel que $f(x + \alpha) = f(x)$?

Exercice 17 : Preuve du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$ et l'on souhaite montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. Comme c'est immédiat lorsque $f(b) = 0$, on suppose que $f(b) > 0$. On pose alors
$$X := \{x \in [a, b] \mid f(x) \leqslant 0\}.$$

1. Montrer que X admet une borne supérieure que l'on note c, puis que $c \in [a, b]$.
2. Montrer que $f(c) \leqslant 0$.
3. Montrer que $c < b$, puis que $f(c) \geqslant 0$. Conclure.

Exercice 18 : Monotonie des injections continues sur un intervalle

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective sur un intervalle I. Le but de cet exercice est de montrer que f est strictement monotone. On raisonne par l'absurde et on suppose que f ne l'est pas. On pose

$$A \coloneqq \{(x, y) : x, y \in I \quad \text{et} \quad x < y\}.$$

1. Montrer qu'il existe $(x_0, y_0) \in A$ tel que $f(x_0) \leqslant f(y_0)$ et $(x_1, y_1) \in A$ tel que $f(x_1) \geqslant f(y_1)$.
2. Montrer soigneusement que
$$\forall t \in [0, 1], \quad (tx_0 + (1-t)x_1, ty_0 + (1-t)y_1) \in A.$$
3. On définit la fonction g de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par
$$\forall t \in [0, 1], \quad g(t) \coloneqq f(tx_0 + (1-t)x_1) - f(ty_0 + (1-t)y_1).$$
Montrer qu'il existe $t \in [0, 1]$ tel que $g(t) = 0$ et conclure.

Exercice 19 : Équation fonctionnelle

On cherche à déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$(E) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x^2 + f(y)) = f(x)^2 + y.$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue solution de (E).
   (a) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x) \quad \text{ou} \quad f(-x) = f(x).$$
   En déduire que f est impaire.
   (b) Montrer que
   $$\forall x, y \geqslant \mathbb{R}_+, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$
   puis en déduire la forme de f.
2. Déterminer toutes les fonctions continues vérifiant (E).

Exercice 20 : Dilatation

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \geqslant a\,|x - y|.$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que f est strictement monotone, puis surjective.

Théorème de compacité

Exercice 21 : Fonctions bornées

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 22 : Théorème des bornes atteintes

1. Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est bornée et atteint ses bornes.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\sup_{x \in [a,b]} f(x) = \sup_{x \in]a,b[} f(x).$$
On commencera par montrer que ces bornes supérieures existent.
3. Soit f et g deux fonctions continues définies sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall x \in [a, b], \quad 0 < f(x) < g(x).$$
Montrer qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que
$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leqslant kg(x).$$

Exercice 23 : Théorème des bornes atteintes

Soit f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On définit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) := \sup_{x\in[a,b]} \left(f(x) + tg(x)\right).$$

1. Montrer que h est bien définie.
2. On pose
$$M := \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|.$$
Montrer que h est M-lipschitzienne. En déduire qu'elle est continue.

Exercice 24 : Exercice

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$.

1. Montrer que f est bornée.
2. f atteint-elle ses bornes ?

Continuité uniforme

Exercice 25 : Fonctions Hölderiennes

Soit $\alpha > 0$. On dit qu'une fonction f est α-Hölderienne lorsqu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant c\,|x-y|^\alpha.$$

1. Montrer que si f est α-Hölderienne avec $\alpha > 1$, f est constante.
2. Montrer que si f est α-Hölderienne, f est uniformément continue.

Exercice 26 : Généralisation du théorème de Heine

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} l_1 \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l_2$$

Le but de cet exercice est de montrer que f est uniformément continue.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \leqslant b$ tels que
$$\forall x, y \in \left]-\infty, a\right], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall x, y \in \left[b, +\infty\right[, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$
2. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall x, y \in [a,b], \quad |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$
3. Conclure.

Exercice 27 : Uniforme continuité

Soit f une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant a + b\,|x|.$$

Chapitre 13

Anneaux, corps, polynômes

13.1 Anneau, corps

13.1.1 Anneau

Définition 13.1.1

Soit $(A,+)$ un groupe commutatif (d'élément neutre 0_A) et $\times$ une loi de composition interne sur A. On dit que $(A,+,\times)$ est un *anneau* lorsque

- $\times$ est associatif,
- $\times$ admet un élément neutre 1_A,
- $\times$ est distributive par rapport à $+$

$$\forall a,b,c\in A,\qquad \begin{aligned} a\times(b+c) &= a\times b + a\times c,\\ (a+b)\times c &= a\times c + b\times c.\end{aligned}$$

Un élément $a\in A$ est dit *inversible* lorsqu'il est inversible pour la loi $\times$. Un anneau $(A,+,\times)$ est dit *commutatif* lorsque $\times$ est commutative.

Remarque

⇨ Si $a,b\in A$, on dit que a et b *commutent* lorsque $a\times b = b\times a$.

Exemples

⇨ $(\mathbb{C},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathbb{Z},+,\times)$ sont des anneaux commutatifs.

⇨ Si $(A,+,\times)$ est un anneau et X est un ensemble, l'ensemble $\mathcal{F}(X,A)$ des fonctions de X dans A, muni des lois $+$ et $\times$ définies par

$$\forall f,g\in\mathcal{F}(X,A),\quad \forall x\in X,\quad \begin{aligned}(f+g)(x) &\coloneqq f(x)+g(x),\\ (f\times g)(x) &\coloneqq f(x)\times g(x)\end{aligned}$$

est un anneau dont l'élément neutre pour l'addition est la fonction $x \mapsto 0_A$ et l'élément neutre pour la multiplication est $x \mapsto 1_A$. Si A est commutatif, alors $\mathcal{F}(X, A)$ l'est aussi. En particulier, $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$ et $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs.

- Si $n \in \mathbb{N}$, alors $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau dont l'élément neutre pour la multiplication est la matrice I_n. Il est non commutatif dès que $n \geqslant 2$. Les éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les matrices inversibles.
- Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau dont l'élément neutre est Id. En général, il n'est pas commutatif. Les éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ sont les isomorphismes.
- Soit $\mathbb{F}_2$ l'ensemble à deux éléments $\{\bar{0}, \bar{1}\}$. On définit sur $\mathbb{F}_2$ les lois $+$ et $\times$ par

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Alors $(\mathbb{F}_2, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Proposition 13.1.2

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Alors

$$\begin{aligned} \forall a \in A, \quad & 0_A \times a = 0_A \quad \text{et} \quad a \times 0_A = 0_A \\ \forall a, b \in A, \quad & a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b) \\ \forall a, b \in A, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad & (n \cdot a) \times b = a \times (n \cdot b) = n \cdot (a \times b). \end{aligned}$$

Remarque

- Soit $(A, +, \times)$ un anneau dans lequel $0_A = 1_A$. Alors $A = \{0_A\}$. Réciproquement, si A est un ensemble contenant un unique élément muni des seules lois de composition interne $+$ et $\times$ que l'on peut définir sur cet ensemble, alors $A = \{0_A\}$ et $(A, +, \times)$ est un anneau. On dit que cet anneau est l'anneau *trivial*.

Proposition 13.1.3

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $a, b \in A$ tels que $a \times b = b \times a$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(a^{n-k} \times b^k\right) \qquad \text{et} \qquad a^n - b^n = (a-b) \times \left[\sum_{k=0}^{n-1} a^{(n-1)-k} \times b^k\right].$$

Remarques

- Ces relations peuvent être fausses lorsque a et b ne commutent pas. Par exemple, si a et b sont deux éléments d'un anneau, alors
$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \times b + b^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a \times b = b \times a.$$
- Remarquons que si $a \in A$, alors a commute avec 1_A, donc ces formules sont valables pour développer $(1_A + a)^n$ et factoriser $a^n - 1_A$.

Définition 13.1.4

On dit qu'un élément $a \in A$ est nilpotent lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0_A$.

Exercice 1

- Montrer que si x est nilpotent, alors $1_A - x$ est inversible.

Définition 13.1.5

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. L'ensemble U_A des éléments inversibles de A est un groupe pour la multiplication.

Remarque

- L'ensemble U_A des inversibles de A est parfois noté $A^\times$. Il est important de ne pas confondre cet ensemble avec $A^* := A \setminus \{0_A\}$.

Exemples

- Le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}$ est $(\{-1, 1\}, \times)$.
- Le groupe des inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$. Le groupe des inversibles de $\mathcal{L}(E)$ est $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.

Définition 13.1.6

On dit qu'un anneau $(A,+,\times)$ est *intègre* lorsque
- $1_A \neq 0_A$
- $\times$ est commutative
- $\forall a,b \in A, \quad a \times b = 0_A \Longrightarrow [a = 0_A \quad \text{ou} \quad b = 0_A]$.

Remarque

⇨ Si $(A,+,\times)$ est intègre, tout élément non nul $a \in A^*$ est régulier pour $\times$:

$$\forall b,c \in A, \quad a \times b = a \times c \quad \Longrightarrow \quad b = c.$$

Exercice 2

⇨ L'anneau $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\times)$ est-il intègre ?

Dans la suite, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, les éléments 0_A et 1_A seront le plus souvent notés 0 et 1.

Définition 13.1.7

Soit $(A,+,\times)$ un anneau et B une partie de A. On dit que B est un *sous-anneau* de A lorsque
- $0 \in B \quad \text{et} \quad 1 \in B$
- $\forall b_1,b_2 \in B, \quad b_1 + b_2 \in B, \quad -b_1 \in B \quad \text{et} \quad b_1 \times b_2 \in B.$

Si tel est le cas, $(B,+,\times)$ est un anneau.

Remarques

⇨ Si B est un sous-anneau de $(A,+,\times)$, B est un sous-groupe de $(A,+)$.

⇨ Si B est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, alors $\mathbb{Z} \subset B$.

Exercice 3

⇨ Montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] := \{a + \mathrm{i}b : a,b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Définition 13.1.8

Soit $(A,+,\times)$ et $(B,+,\times)$ deux anneaux. On dit qu'une application φ de A dans B est un *morphisme d'anneau* lorsque

$$\begin{aligned} \forall a_1,a_2 \in A, \qquad & \varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) \\ \forall a_1,a_2 \in A, \qquad & \varphi(a_1 \times a_2) = \varphi(a_1) \times \varphi(a_2) \\ & \varphi(1_A) = 1_B. \end{aligned}$$

Proposition 13.1.9

Soit φ un morphisme d'anneau de $(A,+,\times)$ dans $(B,+,\times)$. Alors

$$\begin{aligned} \forall a \in A, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad & \varphi(n \cdot a) = n \cdot \varphi(a) \\ \forall a \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad & \varphi(a^n) = [\varphi(a)]^n. \end{aligned}$$

De plus, si $a \in A$ est inversible, il en est de même pour $\varphi(a)$ et

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \varphi(a^n) = [\varphi(a)]^n.$$

Proposition 13.1.10

- La composée de deux morphismes d'anneaux est un morphisme d'anneau.
- La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Proposition 13.1.11

Soit φ un isomorphisme de l'anneau $(A,+,\times)$ dans l'anneau $(B,+,\times)$. Alors

$$\forall x \in A, \quad x \in U_A \Longleftrightarrow \varphi(x) \in U_B.$$

De plus φ induit un isomorphisme du groupe $(U_A, \times)$ dans le groupe $(U_B, \times)$.

Définition 13.1.12

On dit qu'une partie $\mathcal{I}$ d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ est un *idéal* de A lorsque
- $0 \in \mathcal{I}$
- $\forall x, y \in \mathcal{I}, \quad \forall a, b \in A, \quad ax + by \in \mathcal{I}$

Proposition 13.1.13

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et $x \in A$. Alors

$$xA := \{ax : a \in A\}$$

est un idéal de A. Un tel idéal est appelé idéal *principal*.

Remarque

⇨ Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{Z}$. Alors, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{I} = n\mathbb{Z}$. Dans $\mathbb{Z}$, tout idéal est donc principal.

13.1.2 Corps

Définition 13.1.14

On dit qu'un anneau $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un *corps* lorsque
- $1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$
- $\times$ est commutative
- Tout élément non nul de $\mathbb{K}$ admet un inverse pour la loi $\times$.

Exemples

⇨ Muni des lois usuelles d'addition et de multiplication, $\mathbb{C}$ est un corps.

⇨ $(\mathbb{F}_2, +, \times)$ est un corps.

Remarque

⇨ Si $\mathbb{K}$ est un corps, l'ensemble des inversibles de $\mathbb{K}$ est $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$. Autrement dit, $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K}^*$.

Proposition 13.1.15

Un corps est intègre.

Exercice 4

⇨ Résoudre l'équation $x^2 = 1$ sur le corps $\mathbb{K}$.

Définition 13.1.16

Soit $(\mathbb{L}, +, \times)$ un corps et $\mathbb{K}$ une partie de $\mathbb{L}$. On dit que $\mathbb{K}$ est un *sous-corps* de $\mathbb{L}$ lorsque
- $\mathbb{K}$ est un sous-anneau de $\mathbb{L}$
- $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad x^{-1} \in \mathbb{K}$.

Si tel est le cas, $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps.

Remarque

⇨ $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des sous-corps de $\mathbb{C}$.

⇨ Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, alors $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$.

Définition 13.1.17

Si $(\mathbb{K}, +, \times)$ et $(\mathbb{L}, +, \times)$ sont deux corps, on appelle morphisme de corps de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{L}$ tout morphisme d'anneau pour les structures sous-jacentes.

Remarques

- Si φ est un morphisme d'un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ dans un sous-corps $\mathbb{L}$ de $\mathbb{C}$, alors

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in \mathbb{K}, \quad \varphi(rx) = r\varphi(x).$$

- Si φ est un morphisme de corps, alors φ est injective.

Exercice 5

- Déterminer les morphismes de corps φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x$.

Définition 13.1.18

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Alors, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & k & \longmapsto & k \cdot 1_{\mathbb{K}} \end{array}$$

est un morphisme du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{K}, +)$. Il existe donc un unique $p \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Ker} \varphi = p\mathbb{Z}$. L'entier p est soit nul soit un nombre premier et est appelé *caractéristique* de $\mathbb{K}$.

Remarques

- Les sous-corps de $\mathbb{C}$ sont de caractéristique nulle. Le corps $\mathbb{F}_2$ est de caractéristique 2.
- Lorsque $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $k \cdot 1_{\mathbb{K}} = k$. Si $\mathbb{K}$ est un corps quelconque, on confondra le plus souvent $k \cdot 1_{\mathbb{K}}$ et k.

13.2 Espace vectoriel, algèbre

13.2.1 Espace vectoriel

Définition 13.2.1

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $(E, +)$ un groupe commutatif d'élément neutre 0_E et $\cdot$ une loi de composition externe.

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* lorsque

$$\begin{array}{rrl} \forall x, y \in E, & \forall \lambda \in \mathbb{K}, & \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \\ \forall x \in E, & \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, & (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \\ \forall x \in E, & \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, & \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x \\ & \forall x \in E, & 1 \cdot x = x. \end{array}$$

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*, ceux de E, *vecteurs*.

Remarque

- L'ensemble du cours sur les espaces vectoriels reste valide pour un corps quelconque, excepté le paragraphe sur les symétries qui n'est vrai que pour les corps de caractéristique différente de 2.

Proposition 13.2.2

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{L}$-espace vectoriel et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{L}$. Alors $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En particulier $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarques

- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Muni des lois usuelles, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Comme $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

13.2.2 Algèbre

Définition 13.2.3

On dit qu'un anneau $(A, +, \times)$ muni d'une loi de composition externe $\cdot$ sur un corps $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre lorsque
- $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
- $\times$ est compatible avec la loi de composition externe

$$\forall x, y \in A, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y) = \lambda \cdot (x \times y)$$

On dit que l'algèbre $(A, +, \cdot, \times)$ est commutative lorsque $\times$ est commutatif.

Exemples

⇨ $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

⇨ Soit X un ensemble. Alors $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative. En particulier, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative et l'ensemble des suites réelles est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

Définition 13.2.4

Soit $(A, +, \cdot, \times)$ une $\mathbb{K}$-algèbre et B une partie de A. On dit que B est une *sous-algèbre* de A lorsque
- $0 \in B \quad \text{et} \quad 1 \in B$
- $\forall x, y \in B, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + \mu y \in B$
- $\forall x, y \in B, \quad x \times y \in B$

Si tel est le cas, $(B, +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Remarque

⇨ Une sous-algèbre n'est rien d'autre qu'un sous-espace vectoriel qui est aussi un sous-anneau.

Définition 13.2.5

Soit $(A, +, \cdot, \times)$ et $(B, +, \cdot, \times)$ deux $\mathbb{K}$-algèbre. On dit qu'une application φ de A dans B est un morphisme d'algèbre lorsque c'est un morphisme d'anneau et une application linéaire, c'est-à-dire lorsque

$$\begin{aligned} \forall x, y \in A, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \qquad & \varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y) \\ \forall x, y \in A, \qquad & \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \\ & \varphi(1_A) = 1_B. \end{aligned}$$

Proposition 13.2.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Proposition 13.2.7

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}$. Alors $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

13.3 L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

13.3.1 Définition

Définition 13.3.1

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Alors il existe une unique algèbre commutative $\mathbb{K}[X]$ ainsi qu'un élément $X \in \mathbb{K}[X]$, appelé *indéterminée*, tels que
- Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que
$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$$
où, par abus de notation, $a_0 = a_0 \cdot 1_{\mathbb{K}[X]} = a_0 X^0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$
$$a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \cdots = a_n = 0.$$

On l'appelle *algèbre des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

Remarque

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. Il est d'usage de définir a_k pour tout $k > n$ en posant $a_k \coloneqq 0$. Alors, quel que soit $q \geqslant n$
$$P = \sum_{k=0}^{q} a_k X^k.$$
D'autre part, si $b_0, \dots, b_m \in \mathbb{K}$ sont tels que $P = b_0 + b_1 X + \cdots + b_m X^m$, en définissant $b_k \coloneqq 0$ pour tout $k > m$, on a
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = b_k.$$
Aurement dit, la suite (a_k) est unique ; on l'appelle famille des *coefficients de* P.

Proposition 13.3.2: Produit de Cauchy

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes dont les coefficients sont respectivement (a_k) et (b_k). Alors, si on note (c_k) la famille des coefficients du produit PQ, on a
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad c_k = \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l.$$

Remarque

- On a donc
$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l\right) X^k$$
si on utilise la convention $a_k \coloneqq 0$ pour $k > n$ et $b_k \coloneqq 0$ pour $k > m$.

Exercice 6

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$
en calculant $(1+X)^{2n}$ de deux manières différentes.

13.3.2 Substitution

Définition 13.3.3

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre, $x \in \mathcal{A}$ et $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$. On définit $P(x)$ par
$$P(x) \coloneqq a_0 1_{\mathcal{A}} + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathcal{A}.$$
On dit que l'on a substitué l'élément $x \in \mathcal{A}$ à l'indéterminée X.

Remarques

- Si $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre et $x \in \mathcal{A}$, l'application φ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{A}$ qui à P associe $P(x)$ est un morphisme d'algèbre. Autrement dit
$$\begin{aligned} \forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \qquad & (\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda P(x) + \mu Q(x) \\ \forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \qquad & (PQ)(x) = P(x) Q(x) \\ & 1_{\mathbb{K}[X]}(x) = 1_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$
- On dit qu'un polynôme P est un polynôme annulateur de $x \in \mathcal{A}$ lorsque $P(x) = 0$. Par exemple, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, $P \coloneqq X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de i. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie, alors $P \coloneqq X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de s.
- On dit qu'un élément $z \in \mathbb{C}$ est algébrique lorsqu'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(z) = 0$. Par exemple $z_1 = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$ est algébrique car $P_1 \coloneqq X^2 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ est un polynôme annulateur de z_1. De même, j est algébrique car $P_2 \coloneqq X^3 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ est un polynôme annulateur de j. Lorsqu'on effectue des calculs

avec un nombre algébrique z, il est souvent plus économe en calculs d'exploiter le fait que $P(z) = 0$ plutôt que de remplacer z par une expression parfois complexe. Par exemple, si $x := \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$, en exploitant le fait que $x^2 = x + 1$, on a

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = x^3 = x \cdot x^2 = x\,(x+1) = x^2 + x = 2x + 1 = 2 + \sqrt{5}$$

Si on souhaite calculer $1/x$, on exploite le fait que $x^2 - x - 1 = 0$, ce qui donne $x\,(x-1) = 1$, puis $1/x = x - 1$. Donc

$$\frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

⇨ On dit qu'un élément de $\mathbb{C}$ est *transcendant* lorsqu'il n'est pas algébrique. On peut montrer, mais c'est difficile, que e et π sont transcendants.

Exercice 7

⇨ Montrer que $1 + \sqrt{7}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ sont algébriques.

⇨ Soit $D := \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(D) = \operatorname{Diag}(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$.

Définition 13.3.4

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme $P \circ Q$ par

$$P \circ Q := P(Q).$$

Remarque

⇨ Si $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(X) = P$. Un polynôme peut donc indifféremment être noté P ou $P(X)$.

Définition 13.3.5

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que
- P est *pair* lorsque $P(-X) = P(X)$.
- P est *impair* lorsque $P(-X) = -P(X)$.

Proposition 13.3.6

Soit $\mathbb{K}$ un corps qui n'est pas de caractéristique 2 et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors
- P est pair si et seulement si ses coefficients d'indices impairs sont nuls.
- P est impair si et seulement si ses coefficients d'indices pairs sont nuls.

13.3.3 Degré d'un polynôme

Définition 13.3.7

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit le *degré* de P que l'on note $\deg P$ par
- Si $P = 0$, on pose $\deg P := -\infty$.
- Sinon, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \quad \text{et} \quad a_n \neq 0.$$

  De plus n et les $a_0, \ldots, a_n$ sont uniques ; on pose alors $\deg P := n$. Le coefficient a_n est appelé *coefficient dominant* de P.

Remarques

⇨ Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est non nul, son coefficient dominant est parfois noté $\operatorname{cd}(P)$.

⇨ Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

⇨ On dit qu'un polynôme P est constant lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $P = \lambda$, c'est-à-dire lorsque son degré est inférieur ou égal à 0.

Proposition 13.3.8

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$.

— Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si $\deg P \leqslant n$ et $\deg Q \leqslant n$, alors

$$\deg\left(\lambda P + \mu Q\right) \leqslant n.$$

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\mu \in \mathbb{K}$. Si $\deg P = n$ et $\deg Q < n$, alors

$$\deg\left(\lambda P + \mu Q\right) = n \qquad \text{et} \qquad \operatorname{cd}(\lambda P + \mu Q) = \lambda \operatorname{cd}(P).$$

Remarque

⇨ Lorsque P et Q sont des polynômes de degré n, il est possible que $P + Q$ soit de degré strictement inférieur à n. Par exemple $P := X + 1$ et $Q := -X$ sont de degré 1 mais $P + Q = 1$ est de degré 0.

Exercice 8

⇨ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Calculer le degré de $P\left(X+1\right) - P(X)$ en fonction de celui de P.

Définition 13.3.9

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Remarque

⇨ Si $n \geqslant 1$, $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas stable par produit. En effet, $X^n \in \mathbb{K}_n[X]$ mais $X^{2n} = X^n \cdot X^n \notin \mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 13.3.10

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$\deg\left(PQ\right) = \deg P + \deg Q.$$

De plus, si P et Q sont non nuls, alors $\operatorname{cd}(PQ) = \operatorname{cd}(P)\operatorname{cd}(Q)$.

Remarques

⇨ Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est non nul et si $n \in \mathbb{N}$, alors $\deg\left(P^n\right) = n \deg P$.

⇨ Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ n'est pas constant, alors $\deg\left(P \circ Q\right) = \deg(P)\deg(Q)$.

Proposition 13.3.11

$\mathbb{K}[X]$ est une algèbre intègre

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad PQ = 0 \quad \Longrightarrow \quad [P = 0 \quad \text{ou} \quad Q = 0]\,.$$

Proposition 13.3.12

Les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes de degré 0, c'est-à-dire les polynômes constants non nuls.

Définition 13.3.13

On dit qu'un polynôme non nul U est unitaire lorsque son coefficient dominant est égal à 1. Tout polynôme P non nul s'écrit de manière unique sous la forme $P = \lambda P_u$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et P_u est unitaire. Lorsque $P = 0$, on pose par convention $P_u := 0$.

Définition 13.3.14: Division euclidienne

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$A = QB + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.$$

Q est appelé *quotient* de la division euclidienne de A par B, R son *reste*.

Remarques

- Si B est un polynôme annulateur non nul de x et $A \in \mathbb{K}[X]$. Alors $A(x) = R(x)$ où R est le reste de la division euclidienne de A par B. En effet
$$A(x) = Q(x)\underbrace{B(x)}_{=0} + R(x)$$
- Il est parfois utile de calculer le reste de la division euclidienne de A par B sans calculer son quotient. Par exemple, si $A := X^n$ et $B := (X-1)(X-2)$, le reste R de la division euclidienne de A par B est de degré inférieur ou égal à 1 donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $R = aX + b$. Comme $A = QB + R$, on en déduit que $A(1) = Q(1)B(1) + R(1)$. Comme $B(1) = 0$, on a $A(1) = R(1)$. De même $A(2) = R(2)$. Donc
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n. \end{cases}$$
On en déduit que $a = 2^n - 1$ et $b = 2 - 2^n$. Donc $R = (2^n - 1)X + (2 - 2^n)$. Cette méthode fonctionne dès que le polynôme B, de degré n, admet n racines deux à deux distinctes.

Exercices 9

- Calculer $x^5 + x^4 - 1$ où $x := (1 + \sqrt{5})/2$.
- On pose
$$A := \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
Vérifier que $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$ puis calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 13.3.15

Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Alors, il existe un unique polynôme unitaire ou nul P tel que $\mathcal{I} = P\mathbb{K}[X]$.

Remarque

- En particulier, dans $\mathbb{K}[X]$, tout idéal est principal.

13.3.4 Racines, fonctions polynôme

Définition 13.3.16

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On appelle racine de P tout élément $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Remarques

- Les polynômes de degré 1 admettent une unique racine.
- D'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout polynôme réel de degré impair admet (au moins) une racine réelle.
- La notion de racine dépend du corps considéré. En effet, si on le considère comme élément de $\mathbb{C}[X]$, les racines de $(X^2-2)(X^2+1)$ sont $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$. Considéré comme élément de $\mathbb{R}[X]$, ses racines sont $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$. Enfin il n'a aucune racine si on le considère comme un élément de $\mathbb{Q}[X]$.
- Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{L}$, on dit que α est une racine de P sur $\mathbb{L}$ lorsque $P(\alpha) = 0$.
- Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est une racine de P. Les racines de P sont donc soit réelles, soit conjuguées deux à deux.

Proposition 13.3.17

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que
$$P = (X - \alpha)Q.$$

Remarque

- Cette factorisation se calcule en pratique en effectuant la division euclidienne de P par $X - \alpha$.

Proposition 13.3.18

Tout polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus n racines.

Remarques

- On en déduit qu'un polynôme de degré inférieur ou égal à n admettant $n+1$ racines deux à deux distinctes est nul. De même, si deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n prennent la même valeur en $n+1$ points deux à deux distincts, alors ils sont égaux.
- Un polynôme admettant une infinité de racines est donc nul. De même, deux polynômes prenant la même valeur sur un ensemble infini sont égaux.

Exercices 10

- Montrer que les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(X) = P(X+1)$ sont les polynômes constants.
- Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \overline{z}$.

Proposition 13.3.19: Polynôme interpolateur de Lagrange

Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, $n+1$ éléments deux à deux distincts et $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$. Alors, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad P(x_i) = y_i.$$

On l'appelle *polynôme interpolateur de Lagrange* associé aux familles $(x_0, \dots, x_n)$ et $(y_0, \dots, y_n)$.

Remarque

- Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note L_i le polynôme défini par

$$L_i := \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

Les polynômes L_i sont appelés *polynômes de Lagrange* et vérifient : $\forall i, j \in [\![0, n]\!], \quad L_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Le polynôme interpolateur de Lagrange associé aux familles $(x_0, \dots, x_n)$ et $(y_0, \dots, y_n)$ est donné par

$$P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i.$$

Définition 13.3.20

On dit qu'une application $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est une fonction polynôme lorsqu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = P(x).$$

Proposition 13.3.21

Si $\mathbb{K}$ est infini, l'application de l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ dans l'algèbre $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, qui au polynôme P associe la fonction polynôme $\tilde{P}$, est injective.

Remarques

- Cette proposition permet, lorsque $\mathbb{K}$ est infini, d'identifier polynômes et fonctions polynôme. C'est pourquoi de rares énoncés se permettent de les confondre, identification que nous ne ferons que lorsque l'énoncé le demande explicitement.
- Cette proposition est fausse lorsque le corps $\mathbb{K}$ est fini. En effet, si $\mathbb{K} = \{a_1, \dots, a_n\}$, le polynôme

$$P := \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$$

est non nul car $\deg P = n$, mais la fonction polynôme associée est nulle.

13.3.5 Polynôme dérivé

Définition 13.3.22

Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme dérivé de P par

$$\begin{aligned} P' &:= a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}. \end{aligned}$$

Remarque

⇨ Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la fonction polynôme associée à P' est la dérivée (comme définie dans le cours d'analyse) de la fonction polynôme associée à P.

Proposition 13.3.23

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors

$$(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q' \qquad (PQ)' = P'Q + PQ' \quad \text{et} \quad (P \circ Q)' = Q' \left(P' \circ Q\right).$$

Remarque

⇨ On peut utiliser le polynôme dérivé pour calculer la reste de la division euclidienne de A par B lorsque B possède des racines multiples. Par exemple, si $A := X^n$ et $B := (X-1)^2$, le reste R de la division euclidienne de A par B est de degré inférieur ou égal à 1 donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $R = aX + b$. Comme plus haut, $A(1) = R(1)$. En dérivant la relation $A = QB + R$, on obtient $A' = B'Q + BQ' + R'$. Puisque 1 est racine de B et de B', on en déduit que $A'(1) = R'(1)$. Donc

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a \qquad = n. \end{cases}$$

On en déduit que $a = n$ et $b = 1 - n$, donc $R = nX + (1 - n)$.

Définition 13.3.24

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence la dérivée n-ième de P par
- — $P^{(0)} := P$
- — $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P^{(n+1)} := \left[P^{(n)}\right]'$.

Remarque

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (X^n)^{(k)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P^{(k)}(0) = k! a_k.$$

Proposition 13.3.25

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$
- — Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors
$$(\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}.$$
- — On a
$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(n-k)} Q^{(k)}.$$
Cette formule est appelée formule de Leibniz.

Exercice 11

⇨ Calculer $(X^2 P)^{(n)}$ en fonction des dérivées successives de P.

Dans la suite du cours, on suppose que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle.

Proposition 13.3.26

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$\deg P' = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg P \geqslant 1, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarques

- $P' = 0$ si et seulement si P est constant.
- Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P' \leqslant \deg(P) - 1$.
- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\deg P^{(n)} = \begin{cases} \deg(P) - n & \text{si } \deg P \geqslant n, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

  En particulier, $\deg P^{(n)} \leqslant \deg(P) - n$.

Proposition 13.3.27: Formule de Taylor

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k.$$

13.4 Exercices

Anneau, corps

Anneau

Exercice 1 : Anneau de Boole

Soit E un ensemble. Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on définit $A\Delta B$ par

$$A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on définit la fonction caractéristique de A comme l'application $\mathbb{1}_A : A \to \mathbb{F}_2$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} \bar{1} & \text{si } x \in A \\ \bar{0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
2. En déduire que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif.
3. Montrer que cet anneau est intègre si et seulement si E possède un unique élément.

Exercice 2 : Fonction définie sur un anneau

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et f une application de A dans $\mathbb{R}_+$ telle que
— $\forall x \in A, \quad f(x) = 0 \iff x = 0$.
— $\forall x, y \in A, \quad f(xy) = f(x)f(y)$.
— $\forall x, y \in A, \quad f(x + y) \leqslant \max(f(x), f(y))$.
Montrer que $\{x \in A \mid f(x) \leqslant 1\}$ est un sous-anneau de A.

Exercice 3 : Anneau

Soit $a \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$A := \left\{ \frac{p}{a^n} : p \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. Déterminer $A^\times$.

Exercice 4 : Inversibles dans un anneau

On rappelle que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] := \{a + \mathrm{i}b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, $|z|^2 \in \mathbb{N}$. En déduire $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]^\times$
2. Montrer que
$$\mathbb{Z}\left[\mathrm{i}\sqrt{2}\right] := \left\{a + \mathrm{i}b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$
est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, puis déterminer $\mathbb{Z}\left[\mathrm{i}\sqrt{2}\right]^\times$.

Exercice 5 : Éléments nilpotents

Soit A un anneau. Un élément $x \in A$ est dit nilpotent lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^p = 0$. Si tel est le cas, le plus petit entier p satisfaisant cette relation est appelé *indice de nilpotence* de x.

1. Montrer que si A est intègre, 0 est le seul élément nilpotent de A.
2. Montrer que la somme et le produit de deux éléments nilpotents qui commutent sont encore nilpotents.
3. Si $x \in A$ est nilpotent, montrer que $1 - x$ est inversible et calculer $(1 - x)^{-1}$.

Exercice 6 : Centre

Soit A un anneau.

1. On appelle centre de A et on note $Z(A)$ l'ensemble des éléments de A qui commutent avec tous les éléments de A. Montrer que $Z(A)$ est un sous-anneau de A.
2. On suppose que
$$\forall x \in A, \quad x^3 = x.$$

(a) Montrer que
$$\forall x, y \in A, \quad xy = 0 \quad \Longrightarrow \quad yx = 0.$$
(b) Soit $x \in A$ tel que $x^2 = x$. En étudiant $x(y - xy)$ pour $y \in A$, montrer que $x \in Z(A)$.
(c) Montrer que pour tout $x \in A$, $x^2 \in Z(A)$.
(d) En déduire que A est commutatif.

Corps

Exercice 7 : Morphisme de corps

Montrer qu'un morphisme de corps est toujours injectif. Trouver un morphisme d'anneaux non injectif.

Exercice 8 : Extension quadratique

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{\alpha} \notin \mathbb{Q}$. On pose
$$\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) \coloneqq \left\{a + b\sqrt{\alpha} : (a, b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$$

1. Soit $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{\alpha}$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
3. Pour $x = a + b\sqrt{\alpha} \in \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$, on pose $\overline{x} = a - b\sqrt{\alpha}$; on l'appelle le conjugué de x. Montrer que l'application $x \mapsto \overline{x}$ est bien définie et est un automorphisme du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$.
4. Montrer que l'automorphisme construit à la question précédente est le seul automorphisme non trivial de $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$.

Espace vectoriel, algèbre

Espace vectoriel

Algèbre

L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

Définition

Exercice 9 : Produit

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels qu'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ tels que
$$P = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k X^k.$$
Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par produit.

Substitution

Degré d'un polynôme

Exercice 10 : Équations sur $\mathbb{R}[X]$

Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X).$$
On commencera par effectuer une analyse et on cherchera des informations sur le degré de P.

Exercice 11 : Division euclidienne

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste de la division euclidienne

1. de $X^n(X + 1)^2$ par $(X - 1)(X - 2)$.
2. de X^n par $(X - 1)^2(X + 1)$.
3. de $(X + 1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ par $X^2 + X + 1$.

Racines, fonctions polynôme

Exercice 12 : Exercice

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) = n^2.$$
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) = n^2 + (-1)^n.$$

Exercice 13 : Polynômes de Tchebychev

On définit la suite de polynômes (T_n) par
$$T_0 \coloneqq 1, \quad T_1 \coloneqq X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} \coloneqq 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Calculer les polynômes T_n pour $n \in [\![0, 5]\!]$.
2. Calculer le degré de T_n et son coefficient dominant.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est l'unique polynôme tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n\left(\cos x\right) = \cos\left(nx\right).$$
4. En déduire les racines de T_n.
5. En dérivant deux fois la relation obtenue dans la question 3, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (X^2 - 1)T_n'' + XT_n' - n^2 T_n = 0.$$
6. Déterminer une expression explicite de T_n en exploitant la formule de Moivre.

Exercice 14 : Exercice

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles qu'il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{e}^{kx}.$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ est intègre.
3. Déterminer $U_{\mathcal{A}}$.

Exercice 15 : Polynômes de Lagrange

Soit $n \geqslant 2$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. Simplifier les sommes
$$\sum_{i=1}^{n} L_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i L_i.$$

Exercice 16 : Polynômes de Lagrange

On note $L_0, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange de $0, \ldots, n$.

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, exprimer le coefficient dominant de L_k au moyen de factorielles.
2. Exprimer de deux manières différentes l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n tel que
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(k) = k^n.$$
3. En déduire une simplification de
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n.$$

Exercice 17 : Exercice

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de P pour que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \in \mathbb{R}.$$
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de P pour que
$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad P(x) \in \mathbb{Q}.$$
On pourra utiliser les polynômes de Lagrange.

Polynôme dérivé

Exercice 18 : Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On pose
$$S := \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} \quad \text{et} \quad P := \sum_{i=k}^{n} (X+1)^i.$$

1. Exprimer S en fonction de $P^{(k)}(0)$.
2. Simplifier $(X+1)P - P$, puis dériver $k+1$ fois la relation obtenue.
3. En déduire une expression simple de S.

Exercice 19 : Équations sur $\mathbb{R}[X]$

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$P(2X) = P'(X)P''(X).$$
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0.$$

Exercice 20 : Coefficients binomiaux

On donne un entier $n \geqslant 1$.

1. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, calculer la dérivée n-ième du polynôme $P = (X-a)^n (X-b)^n$.
2. En déduire une expression simplifiée de la somme
$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Exercice 21 : Primitive

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Montrer que
$$Q := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k P^{(k)}(X)}{(k+1)!} X^{k+1}$$
est l'unique primitive de P qui s'annule en 0.

Chapitre 14

Dimension finie

14.1 Famille libre, famille génératrice, base

14.1.1 Famille libre

Définition 14.1.1

On dit qu'une famille $(x_1,\dots,x_p)\in E^p$ est *libre* lorsque quels que soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K}$

$$\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_p x_p=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1=\cdots=\lambda_p=0.$$

Sinon, on dit qu'elle est *liée*. Dans ce cas, toute relation du type $\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_p x_p=0$ où les λ_k ne sont pas tous nuls est appelée *relation de liaison*.

Exercices 1

- Montrer que la famille $((1,2,3),(4,5,6),(5,2,1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que sur $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille $\sin,\cos$ est libre. Que dire si on lui adjoint la fonction $x\mapsto\sin(x+\pi/4)$?
- Sur $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, montrer que si $\alpha_1,\cdots,\alpha_p\in\mathbb{R}$ sont tels que $\alpha_1<\cdots<\alpha_p$, la famille des fonctions d'expressions $\mathrm{e}^{\alpha_1 x},\mathrm{e}^{\alpha_2 x},\dots,\mathrm{e}^{\alpha_p x}$ est libre.
- Montrer que la famille $1,\sqrt{2},\sqrt{3}$ est libre dans $\mathbb{R}$ considéré comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda\in\mathbb{R}$ pour que la famille $((1,2,0),(2,1,1),(3,3,\lambda))$ soit une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Remarques

- Lorsque $(x_1,\dots,x_n)$ est libre, on dit aussi que $x_1,\dots,x_n$ sont *linéairement indépendants*.

- Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre d'éléments de E alors, quels que soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que
$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_p x_p$$
on a $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_p = \mu_p$. La liberté d'une famille permet donc « d'identifier » les coefficients d'une combinaison linéaire.
- Une famille composée d'un unique vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
- Une famille $(x, y) \in E^2$ formée de deux vecteurs est liée si et seulement si ces vecteurs sont *colinéaires*, c'est-à-dire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$. Plus généralement, une famille est liée si et seulement si il existe un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.
- Une famille libre reste libre lorsqu'on effectue une permutation de ses vecteurs ou lorsqu'on retire certains de ses vecteurs. En particulier, une famille libre ne contient ni vecteur nul, ni doublon, ni vecteurs colinéaires.
- Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre et si $x \in E \setminus \operatorname{Vect}(x_1, ..., x_p)$, alors la famille $(x_1, \dots, x_p, x)$ est libre.
- Sur $\mathbb{C}$, considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la famille $(1, \mathrm{i})$ est libre. Cependant, si $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, elle est liée. La notion de liberté dépend donc du corps considéré.

Proposition 14.1.2

L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.

14.1.2 Famille génératrice

Définition 14.1.3

On dit qu'une famille $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ est *génératrice* de E lorsque, quel que soit $x \in E$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que
$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p.$$
Autrement dit, la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice si et seulement si $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_p) = E$.

Remarques

- Une famille génératrice reste génératrice lorsqu'on effectue une permutation de ses vecteurs ou lorsqu'on lui rajoute d'autres vecteurs.
- Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille génératrice et si $x_p \in \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_{p-1})$, alors la famille $(x_1, \dots, x_{p-1})$ est génératrice.

Exercices 2

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la famille $((1,2,0),(2,1,1),(3,3,\lambda))$ soit une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille $(1, X-\alpha, (X-\alpha)^2, \dots, (X-\alpha)^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 14.1.4

Soit f et g deux applications linéaires de E dans F. On suppose que $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille génératrice de E telle que
$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad f(x_k) = g(x_k).$$
Alors $f = g$.

Exercice 3

- Montrer la formule de Simpson.
$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \qquad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{P(0) + 4P(1/2) + P(1)}{6}.$$

Proposition 14.1.5

Soit f une application linéaire de E dans F. On suppose que chaque élément d'une famille génératrice $(y_1, \dots, y_p)$ de F admet au moins un antécédent par f. Alors f est surjective.

Proposition 14.1.6

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors l'image $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ d'une famille génératrice $(x_1, \dots, x_p)$ de E est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. En particulier, si f est surjective, l'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

14.1.3 Base

Définition 14.1.7

On dit qu'une famille $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ est une *base* de E lorsque, quel que soit $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Autrement dit, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice.

Remarques

⇨ Si $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $x \in E$, les $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ sont appelées *coordonnées* de x relativement à la base $\mathcal{B}$.

⇨ Une base reste une base lorsqu'on effectue une permutation de ses vecteurs.

Définition 14.1.8

— Si $n \in \mathbb{N}$, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ définie par

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad e_k \coloneqq (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée *base canonique*.

— Si $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On l'appelle *base canonique* de $\mathbb{K}_n[X]$.

— Si $p, q \in \mathbb{N}$, la famille $(E_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant q, 1 \leqslant j \leqslant p}$ des matrices élémentaires est une base de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ appelée *base canonique*.

Proposition 14.1.9

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tels que E admette une base $(e_1, \dots, e_n)$. Alors, quel que soit $(y_1, \dots, y_n) \in F^n$, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad f(e_k) = y_k.$$

De plus

— f est injective si et seulement si $(y_1, \dots, y_n)$ est libre.

— f est surjective si et seulement si $(y_1, \dots, y_n)$ est génératrice dans F.

— f est un isomorphisme si et seulement si $(y_1, \dots, y_n)$ est une base de F.

Exercice 4

⇨ On pose $E \coloneqq \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \operatorname{Id}$ et $u \neq \operatorname{Id}$.

Proposition 14.1.10

Soit A et B deux sous-espaces vectoriels de E, $\mathcal{A} \coloneqq (a_1, \dots, a_p)$ une famille d'éléments de A et $\mathcal{B} \coloneqq (b_1, \dots, b_q)$ une famille d'éléments de B. On pose $\mathcal{E} \coloneqq (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$.

— Si A et B sont en somme directe et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont libres, alors $\mathcal{E}$ est libre.

— Si $A + B = E$ et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont respectivement génératrices de A et B, alors $\mathcal{E}$ est génératrice de E.

— Si $A \oplus B = E$ et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont respectivement des bases de A et B, alors $\mathcal{E}$ est une base de E. On dit qu'une telle base est *adaptée* à la décomposition $E = A \oplus B$.

Définition 14.1.11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une base $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit $e_i^\star$ comme étant l'unique application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ telle que

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad e_i^\star(e_j) = \delta_{i,j}.$$

La forme linéaire $e_i^\star$ associe à $x \in E$ la i-ième coordonnée de x relativement à la base $\mathcal{B}$. Les applications $e_i^\star$ sont appelées *formes coordonnées* relativement à la base $\mathcal{B}$.

Remarques

⇨ Si $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} e_k^\star(x) e_k.$$

⇨ Si $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, alors

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad e_k^\star(x) = x_k.$$

Proposition 14.1.12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une base $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$. Alors $(e_1^\star, \dots, e_n^\star)$ est une base de $E^\star$, appelée *base duale* de $\mathcal{B}$.

Remarque

⇨ Dans $E := \mathbb{K}^n$, si $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de E et $\varphi \in E^*$, il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\varphi = a_1 e_1^* + \cdots + a_n e_n^*.$$

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a donc $\varphi(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$.

14.1.4 Cas des familles infinies

Définition 14.1.13

On dit qu'une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est *presque nulle* lorsqu'il existe une partie finie $J := \{i_1, \dots, i_n\}$ de I telle que

$$\forall i \in I \setminus J, \quad \lambda_i = 0.$$

On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I.

Remarques

⇨ Si I est fini, toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par I est presque nulle. Cette notion n'a donc d'intérêt que lorsque I est infini.

⇨ Si $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$, on appelle *support* de cette famille l'ensemble

$$J := \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}.$$

Les familles presque nulles sont donc les familles à support fini.

⇨ Une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est presque nulle si et seulement si elle est nulle à partir d'un certain rang. En particulier, la famille des coefficients d'un polynôme est presque nulle.

Définition 14.1.14

Soit $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de E et $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille presque nulle d'éléments de $\mathbb{K}$. Soit $J := \{i_1, \dots, i_n\}$ une partie de I en dehors de laquelle λ_i est nul. On définit alors

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i := \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} x_{i_k}.$$

Remarques

⇨ Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la famille de ses coefficients, alors

$$P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k.$$

⇨ Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ et $(\mu_i)_{i\in I}$ deux familles presque nulles d'éléments de $\mathbb{K}$. On pose

$$x := \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \qquad \text{et} \qquad y := \sum_{i\in I} \mu_i x_i.$$

Alors, quels que soient λ et $\mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda\lambda_i + \mu\mu_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle et

$$\lambda x + \mu y = \sum_{i\in I} (\lambda\lambda_i + \mu\mu_i) x_i.$$

Proposition 14.1.15

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. Alors

$$\mathrm{Vect}\,\{x_i : i \in I\} = \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i x_i : (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\}.$$

Définition 14.1.16

On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est *libre* lorsque, quelle que soit la famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in I, \quad \lambda_i = 0.$$

Sinon, on dit qu'elle est *liée*. Dans ce cas, toute relation du type $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ où les λ_i ne sont pas tous nuls est appelée *relation de liaison*.

Remarques

⇨ On dit qu'une partie A de E est libre lorsque la famille de ses éléments est libre.

⇨ Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est libre si et seulement si toute sous-famille finie de $(x_i)_{i\in I}$ est libre, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $i_1, \ldots, i_n \in I$ deux à deux distincts et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 x_{i_1} + \cdots + \lambda_n x_{i_n} = 0$$

on a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

⇨ Une famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est libre si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

on a $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Exercice 5

⇨ Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts. Montrer qu'elle est libre.

Définition 14.1.17

On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est *génératrice* de E lorsque, quel que soit $x \in E$, il existe une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i.$$

Autrement dit, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si $\mathrm{Vect}\,\{x_i : i \in I\} = E$.

Remarques

⇨ On dit qu'une partie A de E est génératrice lorsque la famille de ses éléments est génératrice.

⇨ Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est génératrice de E si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe $i_1, \ldots, i_n \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k}.$$

⇨ Comme dans le cas des familles finies, si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ coïncident sur une famille génératrice de E, alors $f = g$. De même, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et que chaque élément d'une famille génératrice de F admet un antécédent par f, alors f est surjective.

⇨ Enfin, l'image par une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$.

Définition 14.1.18

On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est une *base* de E lorsque, quel que soit $x \in E$, il existe une unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i.$$

Autrement dit, la famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice.

Remarques

- Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $x \in E$, la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ est appelée famille des *coordonnées* de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$.
- Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(y_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de F, alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que
$$\forall i \in I, \quad f(e_i) = y_i.$$
De plus, f est injective si et seulement si $(y_i)_{i\in I}$ est libre, f est surjective si et seulement si $(y_i)_{i\in I}$ est génératrice de F et f est un isomorphisme si et seulement si $(y_i)_{i\in I}$ est une base de F.
- La proposition sur les sommes de sous-espaces vectoriels et les familles s'énonce de manière similaire avec des familles infinies.

Définition 14.1.19

La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée *base canonique*.

Remarque

- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors la famille $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des coefficients de P est la famille des coordonnées de P dans la base canonique.

14.2 Dimension

14.2.1 Espace vectoriel de dimension finie

Définition 14.2.1

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de *dimension finie* lorsqu'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de *dimension infinie*.

Remarque

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Proposition 14.2.2: Lemme de Steinitz

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(g_1, \dots, g_q)$ une famille génératrice de E.
- Toute famille libre de E possède au plus q éléments.
- Il est possible de compléter toute famille libre $(e_1, \dots, e_p)$ en une base $(e_1, \dots, e_p, g_{i_{p+1}}, \dots, g_{i_n})$ de E où $g_{i_{p+1}}, \dots, g_{i_n}$ sont des éléments de la famille $(g_1, \dots, g_q)$.

Remarque

- Pour montrer qu'un espace vectoriel est de dimension infinie, il suffit donc de trouver des familles libres possédant autant d'éléments que l'on souhaite.

Exercice 6

- À l'aide d'éléments de la famille $(1, X, X^2)$, compléter la famille $(X^2 - 1, X^2 + 1)$ en une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 14.2.3: Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
- Toute famille libre se complète en une base finie de E.
- Il est possible d'extraire une base finie de toute famille génératrice de E.

Proposition 14.2.4

Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base finie.

Remarques

- On en déduit qu'un espace vectoriel est de dimension finie si et seulement si il admet une base finie.
- On peut montrer que tout espace vectoriel admet une base mais ce théorème est peu utile, hors programme, difficile à montrer et fait appel à l'axiome du choix.

14.2.2 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 14.2.5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E sont finies et ont le même nombre d'éléments ; on appelle *dimension* de E et on note $\dim E$ cet entier.

Remarques

- Un espace vectoriel E est de dimension nulle si et seulement si $E = \{0\}$. On appelle *droite vectorielle* tout espace vectoriel de dimension 1, c'est-à-dire tout espace vectoriel E tel qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = \mathbb{K}x$. On appelle *plan vectoriel* tout espace vectoriel de dimension 2.
- Considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\mathbb{C}$ est de dimension 2. Cependant, $\mathbb{C}$ est de dimension 1 lorsqu'on le considère comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. La dimension est donc une notion qui dépend du corps.

Exercices 7

- Dans $\mathbb{R}^3$, donner une base du sous-espace vectoriel d'équation $x + y + z = 0$.
- Dans $\mathbb{R}_2[X]$, donner une base puis la dimension du sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

- Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

Proposition 14.2.6

- Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n + 1$.
- Si $p, q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension pq.

Remarques

- En particulier, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2.
- $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ sont de dimension $n(n+1)/2$. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est de dimension $n(n-1)/2$.

Proposition 14.2.7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de p éléments de E.
- Si $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, alors $p \leqslant n$.
- Si $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice, alors $p \geqslant n$.

Exercice 8

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme nilpotent de E. En notant m le plus petit entier tel que $f^m = 0$, montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$ est libre. Que peut-on en déduire sur m ?

Proposition 14.2.8

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si F est de dimension finie et $\dim E = \dim F$. En particulier, si E est de dimension n, E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Exercices 9

⇨ Soit $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ et E l'ensemble des suites (u_n) à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_0 u_n.$$

Montrer que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0, \dots, u_{p-1}) \end{array}$$

est un isomorphisme. En déduire que E est de dimension finie et que $\dim E = p$.

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et E l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

Montrer que si $t_0 \in \mathbb{R}$, alors

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ y & \longmapsto & (y(t_0), y'(t_0)) \end{array}$$

est un isomorphisme. En déduire que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

14.2.3 Existence et unicité en dimension finie

Proposition 14.2.9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors
- Toute famille libre de E comportant n éléments est une base de E.
- Toute famille génératrice de E comportant n éléments est une base de E.

Autrement dit, si la famille $\mathcal{F}$ est composée de n éléments,

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \iff \mathcal{F} \text{ est une base} \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice.}$$

Proposition 14.2.10

Soit $\mathcal{B} := (P_0, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de degrés *échelonnés*, c'est-à-dire telle que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \deg P_k = k.$$

Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercices 10

⇨ Montrer que l'application de $\mathbb{C}_{n+1}[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ qui à P associe $P(X+1) - P(X)$ est surjective.

⇨ Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ stables par dérivation ?

Proposition 14.2.11

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F.
- Si f est injective et $\dim E = \dim F$, alors f est un isomorphisme.
- Si f est surjective et $\dim E = \dim F$, alors f est un isomorphisme.

Autrement dit, si $\dim E = \dim F$

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est bijective} \iff f \text{ est surjective.}$$

Remarques

⇨ Si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, pour montrer que c'est un automorphisme, il suffit de montrer qu'il est injectif (ou surjectif).

⇨ Ce théorème est faux si E et F ne sont pas de même dimension ou si ils sont de dimension infinie. Par exemple, les applications linéaires

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, 0) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array}$$

sont injectives mais pas surjectives. De même, les applications linéaires

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \quad \text{et} \quad f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

sont surjectives mais ne sont pas injectives.

Proposition 14.2.12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors

— f est inversible si et seulement si f est inversible à gauche, c'est-à-dire si et seulement si il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Si tel est le cas, $g = f^{-1}$ et en particulier $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

— f est inversible si et seulement si f est inversible à droite, c'est-à-dire si et seulement si il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$. Si tel est le cas, $g = f^{-1}$ et en particulier $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

14.2.4 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition 14.2.13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et A un sous-espace vectoriel de E. Alors

— A est de dimension finie et $\dim A \leqslant \dim E$.

— $A = E$ si et seulement si $\dim A = \dim E$.

Remarque

⇨ Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et A un sous-espace vectoriel de E de dimension p, toute base $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de A est appelée *base adaptée* au sous-espace vectoriel A.

Exercice 11

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathrm{GL}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si F est stable par u, alors $u(F) = F$ et F est stable par u^{-1}.

Proposition 14.2.14

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.

Exercice 12

⇨ Trouver un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ de l'espace vectoriel engendré par $(1, 1, 1)$.

Remarque

⇨ Si E est de dimension infinie, on peut montrer que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire, mais ce théorème est peu utile, hors programme, difficile à démontrer et fait appel à l'axiome du choix.

14.2.5 Notion de rang

Définition 14.2.15

Soit f une application linéaire de E dans F. Lorsque $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension finie, on appelle *rang* de f et on note $\mathrm{rg}\, f$ la dimension de $\mathrm{Im}\, f$.

Remarques

⇨ Si F est de dimension finie, $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension finie et $\mathrm{rg}\, f \leqslant \dim F$. De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si f est surjective.

⇨ Si E est de dimension finie, $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension finie et $\mathrm{rg}\, f \leqslant \dim E$. De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si f est injective.

⇨ Si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\dim f(A) \leqslant \dim A$.

⇨ Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\mathrm{rg}\, u = 0$ si et seulement si $u = 0$.

Exercice 13

⇨ Calculer le rang de l'application de $\mathbb{K}_n[X]$ dans lui-même qui à P associe $P(X+1) - P(X)$.

Proposition 14.2.16

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n et f une application linéaire de E dans F. Alors f est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{rg}\, f = n$.

Proposition 14.2.17

— Soit E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(g) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f).$$

— On ne change pas le rang d'une application linéaire si on la compose à gauche ou à droite par un isomorphisme.

Définition 14.2.18

On appelle *rang* d'une famille $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ et on note $\mathrm{rg}\,(x_1, \dots, x_p)$ la dimension de $\mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_p)$.

Remarque

⇨ Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, alors

$$\mathrm{rg}\,(x_1, \dots, x_p) \leqslant p \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}\,(x_1, \dots, x_p) \leqslant n.$$

De plus

— $\mathrm{rg}\,(x_1, \dots, x_p) = p$ si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.
— $\mathrm{rg}\,(x_1, \dots, x_p) = n$ si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice.

14.3 Calcul de dimension et de rang, hyperplan

14.3.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Proposition 14.3.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et A, B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors

$$\dim E = \dim A + \dim B.$$

Proposition 14.3.2: Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et A, B deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim\,(A + B) = \dim A + \dim B - \dim\,(A \cap B)\,.$$

Remarque

⇨ En particulier, $\dim(A + B) \leqslant \dim A + \dim B$ et cette inégalité est une égalité si et seulement si A et B sont en somme directe.

Exercices 14

⇨ Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que l'intersection de deux plans vectoriels est soit un plan soit une droite.

Proposition 14.3.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et A et B deux sous-espaces vectoriels de E.
— Si $A \cap B = \{0\}$ et $\dim E = \dim A + \dim B$, alors $E = A \oplus B$.
— Si $E = A + B$ et $\dim E = \dim A + \dim B$, alors $E = A \oplus B$.
Autrement dit, si $\dim E = \dim A + \dim B$

$$A \text{ et } B \text{ sont en somme directe} \iff E = A \oplus B \iff E = A + B.$$

14.3.2 Produit d'espaces vectoriels, espace $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition 14.3.4

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie et

$$\dim (E \times F) = \dim E + \dim F.$$

En particulier, si $n \in \mathbb{N}$, E^n est de dimension finie et

$$\dim (E^n) = n \dim E.$$

Proposition 14.3.5

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \cdot \dim F.$$

En particulier, $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2 .$$

Proposition 14.3.6

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E^\star$ est de dimension finie et

$$\dim E^\star = \dim E.$$

14.3.3 Théorème du rang

Théorème 14.3.7: Théorème du rang

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une application linéaire de E dans F. Alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Autrement dit

$$\operatorname{rg} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f.$$

Remarque

⇨ Le théorème du rang permet de retrouver le fait que si f est une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F de même dimension, alors il suffit de montrer que f est injective ou surjective pour montrer que f est un isomorphisme.

Exercices 15

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

Déterminer le noyau de φ, son rang, puis son image.

⇨ Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$\dim [f(A)] = \dim A - \dim (A \cap \operatorname{Ker} f)$$

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $g \in \mathcal{L}(E)$. Calculer le rang de

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

⇨ Soit E, F et G des espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(F, E)$ et $g \in \mathcal{L}(G, E)$. Montrer qu'il existe une application linéaire h de F dans G telle que $f = g \circ h$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$.

14.3.4 Hyperplan

Proposition 14.3.8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si $\dim H = n - 1$.

Exercices 16

⇨ Dans $\mathbb{R}^3$, donner la dimension du sous-espace vectoriel d'équation $3x + 2y - z = 0$.

⇨ Dans $\mathbb{R}_n[X]$, donner la dimension du sous-espace vectoriel

$$H := \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et φ_1, φ_2 deux formes linéaires sur E. Calculer le rang de

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ & x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \end{array}$$

en fonction de φ_1 et φ_2.

⇨ Quelle est la dimension de l'intersection de deux hyperplans ?

Proposition 14.3.9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

— Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ ne sont pas tous nuls, l'ensemble H d'équation

$$a_1 e_1^\star(x) + \cdots + a_n e_n^\star(x) = 0$$

est un hyperplan de E.

— Réciproquement, si H est un hyperplan de E, il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$a_1 e_1^\star(x) + \cdots + a_n e_n^\star(x) = 0$$

est une équation de H. De plus, si $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$, alors

$$b_1 e_1^\star(x) + \cdots + b_n e_n^\star(x) = 0$$

est une équation de H si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad b_k = \alpha a_k.$$

Proposition 14.3.10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

— L'intersection de p hyperplans est de dimension supérieure ou égale à $n - p$.

— Si $p \in [\![0, n]\!]$, tout sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans.

14.4 Sous-espace affine

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Nous avons vu que les éléments de E sont naturellement des vecteurs. Dans cette partie, nous allons voir les éléments de E comme des points. Afin de marquer cette différence de point de vue, nous utiliserons dans cette partie les lettres a, b, c, d du début de l'alphabet pour désigner les éléments de E que nous considérerons comme des points et les lettres x, y, z de la fin de l'alphabet pour désigner les éléments de E que nous considérerons comme des vecteurs.

Définition 14.4.1

Soit $a, b \in E$. On définit le vecteur $\overrightarrow{ab} \in E$ par

$$\overrightarrow{ab} := b - a.$$

Proposition 14.4.2

— Quel que soit $a \in E$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & E \\ & b & \longmapsto & \overrightarrow{ab} \end{array}$$

est bijective.

— Quels que soient $a, b, c \in E$

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}.$$

Remarque

⇨ Soit $a \in E$ et $x \in E$. Alors $b := a + x$ est l'unique élément de E tel que $\overrightarrow{ab} = x$.

Définition 14.4.3

Soit $x \in E$. On appelle translation de vecteur x l'application

$$\begin{array}{rccc} \tau_x : & E & \longrightarrow & E \\ & a & \longmapsto & a + x. \end{array}$$

Remarques

⇨ Si $x, y \in E$, alors $\tau_x \circ \tau_y = \tau_{x+y}$.

⇨ Si $x \in E$, l'application τ_x est linéaire si et seulement si $x = 0$. Dans ce cas, $\tau_x = \mathrm{Id}$.

Définition 14.4.4

On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de E est un *sous-espace affine* de E lorsqu'il existe $a \in E$ et un sous-espace vectoriel F de E tel que

$$\mathcal{F} = \{a + x : x \in F\}.$$

On écrit alors $\mathcal{F} = a + F$. De plus $a \in \mathcal{F}$ et

$$F = \left\{ \overrightarrow{bc} : b, c \in \mathcal{F} \right\}.$$

On dit que F est la *direction* de $\mathcal{F}$.

Remarques

⇨ En particulier, un sous-espace affine est non vide.

⇨ Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de direction F, alors, quel que soit $a \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = a + F$.

⇨ Un sous-espace vectoriel est un sous-espace affine. Réciproquement, un sous-espace affine est un sous-espace vectoriel si et seulement si il contient 0.

Exercices 17

⇨ Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ de

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 1 \end{cases}$$

et l'exprimer comme un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$.

⇨ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante et exprimer son ensemble de solutions comme un sous-espace affine de $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$y' + 2y = x^2 - 2x + 3.$$

Proposition 14.4.5

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. Alors l'ensemble

$$\mathcal{S} := \{a \in E \mid u(a) = b\}$$

de solutions de l'équation $u(a) = b$ est
- — Soit vide.
- — Soit un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} u$.

Remarque

⇨ En particulier, si $a_0 \in E$ est une solution de l'équation $u(a) = b$, l'ensemble des solutions de cette équation est

$$a_0 + \operatorname{Ker} u = \{a_0 + x : x \in \operatorname{Ker} u\}.$$

Proposition 14.4.6

Soit $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines de E et $(F_i)_{i\in I}$ la famille de leurs directions respectives. On pose

$$\mathcal{F} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i \qquad \text{et} \qquad F := \bigcap_{i\in I} F_i.$$

Alors
- — Soit $\mathcal{F}$ est vide. Dans ce cas, ce n'est pas un sous-espace affine.
- — Soit $\mathcal{F}$ est non vide. Dans ce cas, c'est un sous-espace affine de E de direction F.

14.5 Exercices

Famille libre, famille génératrice, base

Famille libre

Exercice 1 : Familles de fonctions

1. Soit $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) \coloneqq \sin x, \quad f_2(x) \coloneqq \cos x, \quad f_3(x) \coloneqq x \sin x, \quad f_4(x) \coloneqq x \cos x.$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

2. Soit $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) \coloneqq \mathrm{e}^{x}, \quad f_2(x) \coloneqq \mathrm{e}^{2x}, \quad f_3(x) \coloneqq \mathrm{e}^{x^2}.$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

Exercice 2 : Familles de fonctions

Montrer que les familles de fonctions suivantes sont libres.

1. La famille de fonctions $(f_0, \dots, f_n)$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) \coloneqq x^k.$$

2. La famille $(f_1, \dots, f_n)$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ sont deux à deux distincts et

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) \coloneqq \cos(\alpha_k x).$$

3. La famille de fonctions $(f_0, \dots, f_n)$ définies par

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) \coloneqq \sin^k x.$$

4. La famille $(f_1, \dots, f_n)$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sont deux à deux distincts et

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) \coloneqq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_k x}.$$

5. La famille $(f_1, \dots, f_n)$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sont deux à deux distincts et

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) \coloneqq |x - \alpha_k|.$$

Exercice 3 : Modification d'une famille libre

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de n vecteurs. On se donne n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et on pose

$$y \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $y_i \coloneqq x_i + y$ et l'on souhaite montrer que $(y_1, \dots, y_n)$ est libre si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \neq -1.$$

1. Soit $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\mu_i + \lambda_i \sum_{k=1}^{n} \mu_k \right) x_i.$$

2. Dans le cas où $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = -1$, déterminer une relation de liaison pour la famille $(y_1, \dots, y_n)$.
3. Montrer que si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \neq -1$, alors $(y_1, \dots, y_n)$ est libre, puis conclure.

Famille Génératrice

Exercice 4 : Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, \dots, u_n \in E$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$v_k \coloneqq u_1 + \cdots + u_k.$$

1. Montrer que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre si et seulement si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ l'est.
2. Montrer que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ engendre E si et seulement si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ engendre E.

Base

Exercice 5 : Changement de base

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $u \coloneqq (1, 1, -1)$, $v \coloneqq (-1, 1, 1)$ et $w \coloneqq (1, -1, 1)$.

1. Montrer que (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner les coordonnées de $(2, 1, 3)$ dans cette base.

Cas des familles infinies

Exercice 6 : Famille des fonction polynôme-exponentielle

Pour tout entier naturel n et tout nombre complexe α, on définit la fonction $f_{n,\alpha}$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n,\alpha}(x) \coloneqq x^n \mathrm{e}^{\alpha x}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la famille $(f_{n,\alpha})_{(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times\mathbb{C}}$ est libre.

1. Montrer que la famille $(f_{n,0})_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, résoudre l'équation différentielle : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + \alpha y(x) = 0$.
3. Montrer par récurrence sur un majorant de $\deg P_1 + \cdots + \deg P_n$, que si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont n complexes deux à deux distincts et si
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_1(x)\mathrm{e}^{\alpha_1 x} + \cdots + P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha_n x} = 0$$
alors $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 0$.
4. Conclure.

Exercice 7 : $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-ev

On considère $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que la famille $(\ln p)_{p\in\mathcal{P}}$ est libre.

Dimension

Espace vectoriel de dimension finie

Exercice 8 : Centre de $\mathcal{L}(E)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le but de cet exercice est de montrer que le centre de $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec tous les endomorphismes est l'ensemble des homothéties.

1. Montrer que les homothéties sont dans le centre de $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit u un endomorphisme de E tel que
$$\forall x \in E, \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(x) = \lambda x.$$
Montrer que u est une homothétie.
3. Soit u un endomorphisme de E qui commute avec toutes les applications linéaires.
   (a) Soit $x \in E$. En considérant une symétrie par rapport à $\mathbb{K}x$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
   (b) Conclure.

Dimension d'un espace vectoriel

Existence et unicité en dimension finie

Exercice 9 : Base

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la famille
$$((2,0,\alpha),(2,\alpha,2),(\alpha,0,2))$$
soit une base de $\mathbb{R}^3$.
2. La famille
$$((1,0,2,1),(0,1,1,2),(2,0,1,1),(2,1,0,1))$$
est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 10 : Base de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ définie par
$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad P_k \coloneqq (1-X)^{n-k}X^k$$
est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 11 : Le Laplacien discret

Soit $n \geqslant 2$ et φ l'application de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ définie par
$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \varphi(P) \coloneqq P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Calculer $\deg[\varphi(P)]$ en fonction de $\deg P$.
3. Quel est le noyau de φ ?
4. Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$.

Exercice 12 : Formes linéaires et trace sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. On définit l'application ψ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^\star$, qui à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe l'application φ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ définie par
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi_A(X) \coloneqq \operatorname{tr}(AX).$$
Montrer que ψ est bien à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^\star$ puis qu'elle est linéaire.
2. Montrer que ψ est un isomorphisme. En déduire que si φ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une et une seule matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(X) = \operatorname{tr}(AX).$$
3. Montrer que si φ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors
$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(XY) = \varphi(YX)$$
si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(X) = \lambda \operatorname{tr}(X).$$

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Notion de rang

Exercice 13 : Rang et composition

Montrer qu'on ne change pas le rang d'une application linéaire en la composant par la droite par une application surjective ou par la gauche par une application injective.

Calcul de dimension et de rang, hyperplan

Somme de deux sous-espaces vectoriels

Exercice 14 : Dimension

Soit A et B deux sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. Montrer que $A \cap B \neq \{0\}$.

Exercice 15 : Supplémentaire

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose

$$e_1 \coloneqq (\lambda, \lambda, 1), \qquad e_2 \coloneqq (1, \lambda, 1) \qquad \text{et} \qquad e_3 \coloneqq (2, 1, 1).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que (e_1, e_2, e_3) soit libre.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $A \coloneqq \mathrm{Vect}(e_1)$ et $B \coloneqq \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ soient supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16 : Supplémentaire

Soit $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. On pose

$$F \coloneqq \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(x_k) = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et en déterminer un supplémentaire. *On pourra utiliser les polynômes de Lagrange.*

Exercice 17 : Supplémentaire commun

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et A et B deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension r. Le but de cet exercice est de montrer que A et B ont un supplémentaire commun dans E.

1. Montrer le résultat lorsque $n = r + 1$.
2. Plus généralement, montrer que si le résultat est vrai si $\dim A = \dim B = r + 1$, alors il est vrai si $\dim A = \dim B = r$.
3. Conclure.

Produit de deux sous-espaces vectoriels, $\mathcal{L}(E, F)$

Théorème du rang

Exercice 18 : Noyau et image en somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que

$$E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2.$$

Cette équivalence est-elle vraie en dimension infinie ?

Exercice 19 : Rang d'une somme d'applications linéaires

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux applications linéaires de E dans F.

1. Montrer que
$$|\mathrm{rg}\, f - \mathrm{rg}\, g| \leqslant \mathrm{rg}(f + g) \leqslant \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g.$$
2. On suppose dans cette question que $E = F$. Montrer que si $f \circ g = 0$ et $f + g$ est inversible, alors $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g = \dim E$.

Exercice 20 : Dimension du noyau et composition

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. En considérant la restriction de f à $\mathrm{Ker}\, g \circ f$, montrer que

$$\dim (\mathrm{Ker}\, g \circ f) \leqslant \dim (\mathrm{Ker}\, g) + \dim (\mathrm{Ker}\, f).$$

Exercice 21 : Endomorphisme f tel que $f^2 = 0$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}\, f \leqslant 2$.

Exercice 22 : Factorisation

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = h \circ g$ si et seulement si $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$.

Exercice 23 : Noyaux et images itérés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$K_n \coloneqq \operatorname{Ker} f^n \quad \text{et} \quad I_n \coloneqq \operatorname{Im} f^n.$$

1. (a) Montrer que la suite (K_n) est croissante au sens de l'inclusion et que la suite (I_n) est décroissante au sens de l'inclusion.
   (b) i. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_n = K_{n+1}$. Dans la suite, on note n_0 le plus petit entier tel que $K_{n_0} = K_{n_0+1}$.
   ii. Montrer que
   $$\forall n \geqslant n_0, \quad K_n = K_{n_0}.$$
   (c) i. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = I_{n+1}$. Dans la suite, on note n_1 le plus petit entier tel que $I_{n_1} = I_{n_1+1}$.
   ii. Montrer que
   $$\forall n \geqslant n_1, \quad I_n = I_{n_1}.$$
   (d) Montrer que $n_0 = n_1$. Dans la suite, on note r cette valeur commune.
2. (a) Montrer que $I_r \oplus K_r = E$.
   (b) Montrer que I_r et K_r sont stables par f, puis que la restriction de f à K_r est nilpotente et que la restriction de f à I_r est un automorphisme.
3. (a) Montrer que la suite de terme général $\dim I_n - \dim I_{n+1}$ est décroissante. *On pourra pour cela considérer l'application φ de I_n dans I_{n+1} qui à x associe $f(x)$.*
   (b) Énoncer et démontrer un résultat semblable pour la suite (K_n).

Hyperplan

Exercice 24 : Intersection d'hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Calculer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Exercice 25 : Bidual

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $E^{\star\star}$ le bidual de E, c'est-à-dire le dual du dual de E.

1. Montrer que E et $E^{\star\star}$ sont isomorphes.
2. Soit φ l'application de E dans $E^{\star\star}$ qui à x associe l'application φ_x de $E^\star$ dans $\mathbb{K}$ qui à ψ associe $\psi(x)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in E$, φ_x est une forme linéaire sur $E^\star$.
   (b) Montrer que φ est un isomorphisme.

Exercice 26 : Hyperplan de $\mathbb{K}[X]$

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que
$$H \coloneqq \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$$
est un hyperplan et en déterminer une base.

Chapitre 15

Analyse asymptotique

« Sans technique, un don n'est rien qu'une sale manie. »

— Georges Brassens (1921–1981)

« Deux intellectuels assis vont moins loin qu'une brute qui marche. »

— Michel Audiard (1920–1985)

15.1 Comparaison de suites

Dans ce chapitre, les suites sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

15.1.1 Suites équivalentes

Définition 15.1.1

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est *équivalente* à (v_n) lorsqu'il existe une suite (α_n) convergeant vers 1 et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que
$$\forall n \geqslant N, \quad u_n = \alpha_n v_n.$$
Si tel est le cas, on note
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$
La propriété « est équivalente à » est asymptotique.

Remarques

⇨ Si (u_n) est équivalente à (v_n) et que cette dernière admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors (u_n) admet la même limite. Cependant il est possible que deux suites admettent la même limite sans être équivalentes.

⇨ Il est possible qu'une suite (u_n) soit équivalente à une suite (v_n) sans qu'il n'existe de suite (α_n) convergeant vers 1 telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha_n v_n$.

Proposition 15.1.2

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) des suites.
- La relation d'équivalence est réflexive.
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n.$$
- La relation d'équivalence est transitive.
$$\left[u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \text{et} \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n\right] \quad \Longrightarrow \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n.$$
- La relation d'équivalence est symétrique.
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Longrightarrow \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n.$$

Autrement dit, la relation « est équivalente à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites.

Remarque

⇨ La relation étant symétrique, on dira désormais « les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes » plutôt que « la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) ».

Proposition 15.1.3

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Remarques

⇨ Si $a_0, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{C}$ avec $a_p \neq 0$, alors $a_p n^p + \cdots + a_1 n + a_0 \underset{n\to+\infty}{\sim} a_p n^p$. Si de plus $b_0, b_1, \ldots, b_q \in \mathbb{C}$ sont tels que $b_q \neq 0$, alors
$$\frac{a_p n^p + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \cdots + b_1 n + b_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_p}{b_q} \cdot n^{p-q}$$

⇨ Contrairement à ce qu'on pourrait être tenté de dire, on n'a pas toujours $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Exercices 1

⇨ Donner des équivalents simples des suites de terme général
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \qquad \sum_{k=0}^{n} a^k \quad \text{où } a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k!.$$

➯ On rappelle que la suite (H_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

diverge vers $+\infty$. Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Proposition 15.1.4

Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} l \iff u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l.$$

De plus, u_n est équivalent à 0 lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.

Remarque

➯ Si $l = 0$, dire que u_n est équivalent à 0 signifie que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang. Si vous obtenez un tel résultat, c'est sûrement que vous avez fait une erreur.

Proposition 15.1.5

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n.$$

— Alors, il existe un rang à partir duquel (u_n) et (v_n) s'annulent simultanément.
— Si de plus elles sont réelles, il existe un rang à partir duquel elles sont de même signe.

Proposition 15.1.6

— Soit (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) des suites telles que

$$a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n \quad \text{et} \quad c_n \underset{n \to +\infty}{\sim} d_n.$$

Alors

$$a_n c_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n d_n.$$

Si de plus (c_n) et (d_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang

$$\frac{a_n}{c_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{b_n}{d_n}.$$

— Soit (u_n) et (v_n) deux suites et $\alpha \in \mathbb{R}$. Si u_n^α et v_n^α ont un sens à partir d'un certain rang, alors

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n \implies u_n^\alpha \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n^\alpha.$$

Remarques

➯ Les autres opérations usuelles sur les équivalents conduisent le plus souvent à des résultats faux. En particulier, il est interdit de sommer, d'élever à une puissance dépendant de n ou de composer des équivalents.

Exercice 2

➯ Donner des équivalents simples de

$$\sqrt{n^4 + 2n^2 - 1} \quad \text{et} \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

Proposition 15.1.7

Soit (a_n), (b_n), (u_n) et (v_n) des suites réelles telles que

$$[\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant u_n \leqslant b_n], \qquad a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n \qquad \text{et} \qquad b_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n.$$

Alors
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

Remarque

⇨ *Comparaison série-intégrale.* Soit f une fonction monotone de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, telle que
$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$
On considère la suite (u_n) définie par
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n \coloneqq \sum_{k=1}^n f(k).$$
Alors, un encadrement de $f(k)$ par
$$\int_{k-1}^k f(t)\,\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$
permet de trouver simplement un équivalent de u_n. Cette technique essentielle est appelée technique de *comparaison série-intégrale.*

Exercice 3

⇨ Montrer que
$$\sum_{k=1}^n \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n.$$

Proposition 15.1.8: Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

15.1.2 Suite négligeable devant une autre

Définition 15.1.9

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) lorsqu'il existe une suite (ε_n) convergeant vers 0 et un rang $N\in\mathbb{N}$ tels que
$$\forall n\geqslant N,\quad u_n=\varepsilon_n v_n.$$
Si tel est le cas, on note
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right).$$
La propriété « est négligeable devant » est asymptotique.

Remarque

⇨ Si (u_n) est négligeable devant (v_n), il existe un rang à partir duquel u_n est nul dès que v_n est nul.

Proposition 15.1.10

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. Alors
$$\left[u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right) \quad\text{et}\quad v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(w_n\right)\right] \implies u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(w_n\right).$$

Proposition 15.1.11

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 4

⇨ Soit (u_n) une suite réelle divergeant vers $+\infty$. Démontrer qu'il existe une suite (v_n), négligeable devant (u_n) qui diverge aussi vers $+\infty$.

Proposition 15.1.12

— Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors
$$n^a \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(n^b\right) \iff a < b.$$
Autrement dit
$$\frac{1}{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^b}\right) \iff a > b.$$
— Soit $(\omega_a, \omega_b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Alors
$$\omega_a^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\omega_b^n\right) \iff |\omega_a| < |\omega_b|.$$
— Soit $\alpha, \beta > 0$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $|\omega| > 1$. Alors
$$(\ln n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(n^\beta\right), \qquad n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\omega^n\right), \qquad n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{\beta n}\right),$$
$$\omega^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(n!\right), \qquad \mathrm{e}^{\beta n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(n!\right).$$

Exercice 5

⇨ Comparer les suites suivantes, données par leur terme général.
$$\frac{n^2}{\ln n}, \qquad \mathrm{e}^n, \qquad n\sqrt{n}, \qquad n\ln^2 n, \qquad n^n.$$

Proposition 15.1.13

Soit (u_n) une suite. Alors
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(1\right) \iff u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Proposition 15.1.14

— Soit (u_n) une suite. Alors
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad \lambda \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n\right) + \mu \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n\right) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n\right).$$
— Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Alors
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(v_n\right) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n v_n\right).$$
— Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Alors
$$\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n\right) \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(v_n\right) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n v_n\right).$$

Remarque

⇨ La proposition précédente met en valeur le fait que la notation $\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n\right)$ doit être manipulée avec précaution. En effet
$$\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n\right) + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n\right) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n\right).$$
Cependant, on ne peut pas en déduire que
$$\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n\right) = 0.$$

Proposition 15.1.15

- Soit (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. Alors, une suite est négligeable devant (u_n) si et seulement si elle est négligeable devant (v_n).
- Soit (u_n) une suite et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Alors, une suite est négligeable devant (u_n) si et seulement si elle est négligeable devant (λu_n).

Proposition 15.1.16

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Longleftrightarrow \quad u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n).$$

15.1.3 Suite dominée par une autre

Définition 15.1.17

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est *dominée* par (v_n) lorsqu'il existe une suite bornée (B_n) et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n = B_n v_n.$$

Si tel est le cas, on note

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n).$$

La propriété « est dominée par » est asymptotique.

Proposition 15.1.18

- Soit (u_n) une suite. Alors
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(u_n).$$
- Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. Alors
$$\left[u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n) \quad \text{et} \quad v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(w_n)\right] \quad \Longrightarrow \quad u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(w_n).$$
De plus si dans l'hypothèse, l'un des O est un o, alors (u_n) est négligeable devant (w_n).

Proposition 15.1.19

Soit deux suites (u_n) et (v_n). Alors

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \quad \Longrightarrow \quad u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n).$$

Remarque

⇨ De même, s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda v_n$, alors

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n).$$

En particulier

$$\sqrt{n} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(n) \quad \text{et} \quad 2n^2 + 3n - 1 = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(n^2\right).$$

Proposition 15.1.20

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est bornée.}$$

Remarque

⇨ En particulier, si (u_n) est une suite, alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1) \iff (u_n) \text{ est bornée.}$$

Exercice 6

⇨ Parmi les suites de terme général suivantes, lesquelles sont des $\underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(n)$?

$$n\sin n, \qquad n\ln n, \qquad 10^9 n.$$

15.2 Comparaison de fonctions

15.2.1 Fonctions équivalentes

Définition 15.2.1

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ est *équivalent* à $g(x)$ en a lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a et une fonction α définie sur $\mathcal{D} \cap \mathcal{V}$ telle que

— $\forall x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{V}, \quad f(x) = \alpha(x)g(x)$.

— $\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$.

On note alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$

La propriété « est équivalent à » est locale en a.

Remarque

⇨ Si $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et que $g(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers a, alors $f(x)$ admet la même limite. Cependant il est possible que deux fonctions admettent la même limite sans être équivalentes.

Proposition 15.2.2

Soit $f, g, h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

— La relation d'équivalence est réflexive.

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x).$$

— La relation d'équivalence est transitive.

$$\left[f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)\right] \implies f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x).$$

— La relation d'équivalence est symétrique.

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \implies g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x).$$

Autrement dit, la relation « est équivalente à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies au voisinage de a.

Proposition 15.2.3

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

— Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1.$$

— Si $a \in \mathcal{D}$ et g ne s'annule pas au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, sauf en a, alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff \left[\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1 \quad \text{et} \quad f(a) = 0\right].$$

Remarques

➯ Soit f la fonction polynôme définie par $f(x) := \sum_{k=m}^{n} a_k x^k$.
— Si $a_m \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_m x^m$. En particulier

$$1 + x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad 3x + x^3 \underset{x\to 0}{\sim} 3x.$$

— Si $a_n \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} a_n x^n$. En particulier

$$1 + x^2 + 3x^3 \underset{x\to +\infty}{\sim} 3x^3.$$

On a évidemment le même équivalent en $-\infty$.

➯ Soit f une fonction définie au voisinage de 0.
— Si f est continue en 0 et $f(0) \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} f(0)$. En particulier

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad \cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1.$$

— Si f est dérivable en 0, $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} f'(0)\, x$. En particulier

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Exercice 7

➯ Montrer que $1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Proposition 15.2.4

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \neq 0$. Alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} l \quad \iff \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l.$$

Remarque

➯ $f(x)$ est équivalente à 0 en a si et seulement si la fonction f est identiquement nulle au voisinage de a. En pratique, si vous obtenez $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 0$, c'est surement que vous avez fait une erreur.

Proposition 15.2.5

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$

Alors, il existe un voisinage de a sur lequel $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe et s'annulent simultanément.

Remarque

➯ Supposons que

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$$

et que $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \in \mathbb{R}$.
— Si $l \neq 0$, on en déduit que

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l.$$

En particulier, si $a = \pm\infty$, le graphe de f admet la droite d'équation $y = l$ pour asymptote. Cependant, l'équivalent ne nous donne pas la position du graphe par rapport à cette asymptote. Si l'on souhaite la connaitre, on peut chercher un équivalent de $f(x) - l$; le signe de cet équivalent nous dira si le graphe de f est en dessous ou au dessus de l'asymptote au voisinage de a.

— Si $l = 0$, on en déduit que le graphe de f « colle » à celui de g au voisinage de a. Dans la suite, nous nous placerons dans le cas où $a = 0$.
— Dans le cas où $g(x) = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x.$$

La droite d'équation $y = \alpha x$ est alors tangente au graphe de f en 0. Si l'on souhaite connaitre la position du graphe de f par rapport à cette tangente, on peut chercher un équivalent de $f(x) - \alpha x$.

— Dans le cas où $g(x) = \alpha x^\beta$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, le graphe de f « colle » au graphe de αx^β au voisinage de 0. Comme pour le cas de la tangente, si on veut connaitre la position du graphe de f par rapport à celui de αx^β, on cherche un équivalent de $f(x) - \alpha x^\beta$ en 0.

Proposition 15.2.6

— Soit $f_1, g_1, f_2, g_2 : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que

$$f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x).$$

Alors

$$f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)g_2(x).$$

Si de plus, f_2 et g_2 ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf peut-être en a, alors

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}.$$

— Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions équivalentes en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)^\alpha$ et $g(x)^\alpha$ aient un sens au voisinage de a. Alors

$$f(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\alpha.$$

Remarques

⇨ Attention, il n'est pas possible d'ajouter des équivalents. Par exemple

$$1 + x \underset{x\to 0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad -1 \underset{x\to 0}{\sim} -1.$$

Pourtant $(1 + x) - 1 = x$ n'est pas équivalent à $1 - 1 = 0$ en 0.

⇨ De même, il n'est pas possible de composer des équivalents. Par exemple

$$1 + x \underset{x\to +\infty}{\sim} x.$$

Pourtant e^{1+x} n'est pas équivalent à e^x en $+\infty$. En effet, $\mathrm{e}^{x+1}/\mathrm{e}^x = \mathrm{e} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \mathrm{e} \neq 1$.

Exercices 8

⇨ Donner un équivalent en 0 de $\ln(1 + x)\sin x$.

⇨ Chercher la limite à droite en 0 de

$$\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-\cos x}}.$$

Proposition 15.2.7

Soit $f,\ g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$

— Soit $\overline{x}$ une fonction à valeurs dans $\mathcal{D}$, définie au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$, telle que $\overline{x}(t) \xrightarrow[t\to b]{} a$. Alors

$$f(\overline{x}(t)) \underset{t\to b}{\sim} g(\overline{x}(t)).$$

— Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. Alors

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n).$$

Exercice 9

⇨ Donner un équivalent en 0 de $\ln(1 + \tan x)$.

Proposition 15.2.8

Soit $e, f, g, h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que

$$[\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)], \qquad f(x) \underset{x\to a}{\sim} e(x) \qquad \text{et} \qquad h(x) \underset{x\to a}{\sim} e(x).$$

Alors

$$g(x) \underset{x\to a}{\sim} e(x).$$

15.2.2 Fonction négligeable devant une autre

Définition 15.2.9

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ est *négligeable* devant $g(x)$ en a lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a et une fonction ε définie sur $\mathcal{D} \cap \mathcal{V}$ telle que

- $\forall x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{V}, \quad f(x) = \varepsilon(x) g(x)$.
- $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

On note alors

$$f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left(g(x)\right).$$

La propriété « est négligeable devant » est locale en a.

Proposition 15.2.10

Soit $f, g, h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. La relation « est négligeable devant » est transitive.

$$\left[f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left(g(x)\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left(h(x)\right)\right] \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left(h(x)\right).$$

Proposition 15.2.11

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors

$$f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left(g(x)\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0.$$

- Si $a \in \mathcal{D}$ et g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf en a, alors

$$f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left(g(x)\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0 \quad \text{et} \quad f(a) = 0\right].$$

Proposition 15.2.12

Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

- On a

$$x^{\alpha_1} = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{\alpha_2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 > \alpha_2.$$

- De plus

$$x^{\alpha_1} = \underset{x\to +\infty}{\mathrm{o}}\left(x^{\alpha_2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 < \alpha_2.$$

Proposition 15.2.13

Soit $\alpha, \beta > 0$. Alors

$$(\ln x)^{\alpha} = \underset{x\to +\infty}{\mathrm{o}}\left(x^{\beta}\right) \quad \text{et} \quad x^{\alpha} = \underset{x\to +\infty}{\mathrm{o}}\left(\mathrm{e}^{\beta x}\right).$$

Proposition 15.2.14

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(1) \quad \iff \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0.$$

Proposition 15.2.15

— Soit g une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x)) + \mu \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x)) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x)).$$

— Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x)) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(f(x)g(x)).$$

— Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\underset{x \to a}{\mathrm{o}}(f(x)) \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x)) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(f(x)g(x)).$$

Proposition 15.2.16

— Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions équivalentes en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors, une fonction est négligeable devant f en a si et seulement si elle est négligeable devant g en a.
— Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors, une fonction est négligeable devant f en a si et seulement si elle est négligeable devant λf en a.

Proposition 15.2.17

Soit $f,\ g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que

$$f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x)).$$

— Soit $\overline{x}$ une fonction à valeurs dans $\mathcal{D}$, définie au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$, telle que $\overline{x}(t) \xrightarrow[t \to b]{} a$. Alors

$$f(\overline{x}(t)) = \underset{t \to b}{\mathrm{o}}(g(\overline{x}(t))).$$

— Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ telle que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$. Alors

$$f(u_n) = \underset{n \to +\infty}{\mathrm{o}}(g(u_n)).$$

Proposition 15.2.18

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \quad \iff \quad f(x) = g(x) + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x)).$$

Exercice 10

⇨ Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à x associe xe^x. Montrer que f est bijective, puis donner la limite et un équivalent de f^{-1} en $+\infty$.

15.2.3 Fonction dominée par une autre

Définition 15.2.19

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ est *dominée* par $g(x)$ en a lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a ainsi qu'une fonction B définie sur $\mathcal{D} \cap \mathcal{V}$ telle que

- $\forall x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{V}, \quad f(x) = B(x)g(x)$.
- B est bornée.

On note alors

$$f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x)).$$

La propriété « est dominée par » est locale en a.

Proposition 15.2.20

- Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(f(x)).$$

- Soit $f, g, h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\left[f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(h(x))\right] \implies f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(h(x)).$$

  De plus si dans l'hypothèse, l'un des O est un o, alors $f(x)$ est négligeable devant $h(x)$ au voisinage de a.

Proposition 15.2.21

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x)) \implies f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x)).$$

Remarque

⇨ De même, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \lambda g(x)$, alors

$$f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x)).$$

En particulier

$$x = \underset{x \to +\infty}{\mathrm{O}}(x \ln x) \quad \text{et} \quad 2x^3 - x^2 + 1 = \underset{x \to +\infty}{\mathrm{O}}\left(x^3\right).$$

Proposition 15.2.22

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors

$$f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x)) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \text{ est bornée au voisinage de } a.$$

- Si $a \in \mathbb{R}$ et g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf en a, alors

$$f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x)) \iff \left[\frac{f(x)}{g(x)} \text{ est bornée au voisinage de } a \quad \text{et} \quad f(a) = 0\right].$$

Remarque

⇨ En particulier, si f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors

$$f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(1) \iff f \text{ est bornée au voisinage de } a.$$

15.3 Développement limité

15.3.1 Définition, propriétés élémentaires

Définition 15.3.1

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un *développement limité* en a à l'ordre n lorsqu'il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} f(a+h) &= a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n). \end{aligned}$$

Remarque

⇨ Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

donc

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{}0} x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n).$$

Exercice 11

⇨ Montrer que $\mathrm{e}^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)$, puis que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$.

Proposition 15.3.2: Troncature d'un développement limité

Soit f une fonction admettant un développement limité en a à l'ordre n

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n).$$

Si $p \in [\![0,n]\!]$, alors f admet un développement limité en a à l'ordre p et

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{p} a_k h^k + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^p).$$

Proposition 15.3.3

Soit f une fonction admettant un développement limité en a à l'ordre n :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n)$$

Alors, les coefficients $a_0, \dots, a_n$ sont uniques ; on dit que $\sum_{k=0}^{n} a_k h^k$ est la *partie régulière* du développement limité.

Définition 15.3.4

Soit f une fonction définie au voisinage de a. On suppose qu'il existe un réel $\alpha \neq 0$ et $\omega \in \mathbb{N}$ tels que

$$f(a+h) = \alpha h^\omega + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^\omega).$$

Alors α et ω sont uniques ; on dit que αh^ω est la *partie principale* de f en a et que ω est l'*ordre* de cette partie principale. On a alors

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} \alpha h^\omega.$$

Remarque

⇨ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

alors $f(-x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$. Plus généralement, si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$

$$f(\alpha x^p) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k a_k x^{pk} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^{pn}).$$

Proposition 15.3.5

Soit f une fonction admettant un développement limité en 0 à l'ordre n

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n).$$

— Si f est paire, a_k est nul pour tout k impair.
— Si f est impaire, a_k est nul pour tout k pair.

15.3.2 Développement limité et propriétés locales

Proposition 15.3.6

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathcal{D}$.

— Alors f admet un développement limité en a à l'ordre 0 si et seulement si elle est continue en a. De plus, si tel est le cas
$$f(a+h) = f(a) + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(1).$$
— Alors f admet un développement limité en a à l'ordre 1 si et seulement si elle est dérivable en a. De plus, si tel est le cas
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h).$$

Remarques

⇨ Plus généralement, une fonction définie au voisinage de a admet un développement limité en a à l'ordre 0 si et seulement si elle admet une limite finie en a.

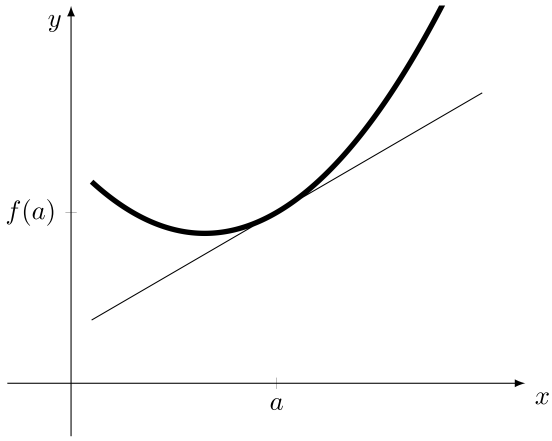
⇨ Pour déterminer la position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point a, il suffit de calculer la partie principale de $f(a+h) - [f(a) + f'(a)h]$. Supposons que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \alpha h^\omega + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^\omega)$$

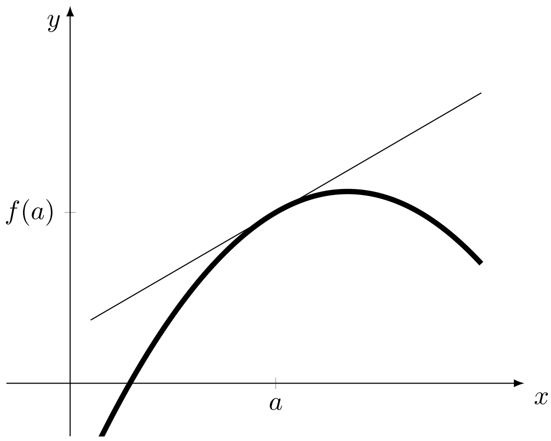
avec $\alpha \neq 0$ et $\omega \geqslant 2$. Alors

$$f(a+h) - [f(a) + f'(a)h] \underset{h \to 0}{\sim} \alpha h^\omega.$$

— *Si ω est pair*, le graphe de f est au-dessus de sa tangente au voisinage de a si $\alpha > 0$ et en dessous si $\alpha < 0$.

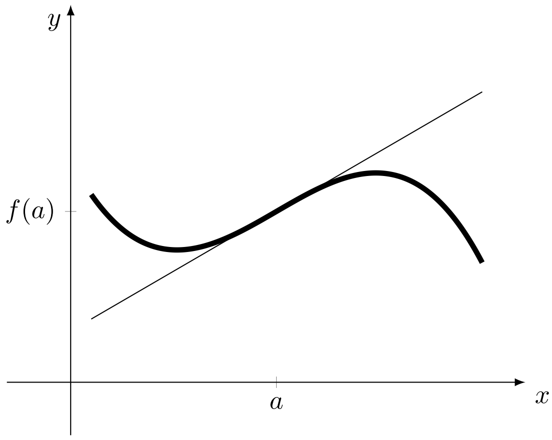


$\alpha > 0$ et ω pair



$\alpha < 0$ et ω pair

— *Si ω est impair*, le graphe de f traverse sa tangente en a. La courbe admet un point d'inflexion en a.



$\alpha < 0$ et ω impair

Exercice 12

⇨ Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$.

15.3.3 Intégration et existence d'un développement limité

Proposition 15.3.7

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I contenant a. On suppose que f admet un développement limité en a à l'ordre n

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^n).$$

Alors, si F est une primitive de f

$$F(a+h) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} h^{k+1} + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}\left(h^{n+1}\right).$$

Exercice 13

⇨ Donner un développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$. En déduire la limite de

$$n^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque

⇨ Il n'est pas possible de dériver un développement limité. En effet, il existe des fonctions admettant un développement limité en a à l'ordre n dont la dérivée n'admet pas de développement limité en a à l'ordre $n-1$.

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsque, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, f est dérivable n fois sur I. Les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le domaine sur lequel elles sont dérivables.

Proposition 15.3.8: Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I contenant a. Alors f admet un développement limité en a à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+\underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^n\right). \end{aligned}$$

15.3.4 Développements limités usuels

Proposition 15.3.9

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right) \\ \operatorname{ch} x &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right) \\ \operatorname{sh} x &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right) \\ \cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right) \\ \sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right) \end{aligned}$$

Proposition 15.3.10

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right) \\ \frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right) \\ (1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right) \\ &= 1+\binom{\alpha}{1}x+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right) \quad (\alpha\in\mathbb{R}) \\ \ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right) \end{aligned}$$

Exercice 14

⇨ Donner un développement limité en 0 à l'ordre n de

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

En déduire un développement limité à l'ordre $2n+1$ de $\operatorname{Arcsin} x$.

15.3.5 Opérations usuelles sur les développements limités

Proposition 15.3.11

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant un développement limité en a à l'ordre n

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n), \quad g(a+h) = \sum_{k=0}^{n} b_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité en a à l'ordre n et

$$\lambda f(a+h) + \mu g(a+h) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n).$$

Exercice 15

⇨ Donner un développement limité de $\cos x$ en $\pi/3$ à l'ordre 3.

Proposition 15.3.12

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant un développement limité en a à l'ordre n

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n) \quad \text{et} \quad g(a+h) = \sum_{k=0}^{n} b_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n).$$

Alors fg admet un développement limité en a à l'ordre n dont la partie régulière est obtenue en développant le produit des parties régulières précédentes et en ne gardant que les monômes de degrés inférieurs à n.

$$f(a+h)\, g(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n).$$

Exercices 16

⇨ Donner un développement limité de $\mathrm{e}^x/\sqrt{1+x}$ en 0 à l'ordre 2.

⇨ Donner un développement limité de $\mathrm{e}^x \cos x$ en 0 à l'ordre 2.

Proposition 15.3.13

Soit f une fonction admettant un développement limité en a à l'ordre n et $k \in \mathbb{N}$.

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{n} a_i h^i + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

Alors f^k admet un développement limité en a à l'ordre n dont la partie régulière est obtenue en développant la puissance k-ème de la partie régulière précédente et en ne gardant que les monômes de degrés inférieurs à n.

Exercice 17

⇨ Donner un développement limité de $\cos^3 x$ en 0 à l'ordre 4.

Proposition 15.3.14

Soit f et g deux fonctions admettant respectivement des développements limités à l'ordre n en a et $f(a)$.

$$\begin{aligned} f(a+u) &= f(a) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k u^k}_{P(u)} + \underset{u\to 0}{o}(u^n) \\ g(f(a)+v) &= \sum_{k=0}^{n} b_k v^k + \underset{v\to 0}{o}(v^n) \end{aligned}$$

Alors $g \circ f$ admet un développement limité en a à l'ordre n dont la partie régulière est obtenue en substituant $P(u)$ à v dans la partie régulière du développement limité de g et en ne gardant que les monômes de degrés inférieurs à n.

Exercice 18

⇨ Donner un développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$.

Proposition 15.3.15

Soit f une fonction admettant un développement limité en a à l'ordre n.

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n)$$

Si $a_0 \neq 0$, alors f ne s'annule pas au voisinage de a et $1/f$ admet un développement limité en a à l'ordre n.

Exercices 19

⇨ Donner un développement limité de $1/(\cos x)$ en 0 à l'ordre 4.

⇨ Donner un développement limité de $\tan x$ en 0 à l'ordre 5.

15.3.6 Réduction d'ordre

Remarques

⇨ *Réduction d'ordre pour le calcul du* DL *d'un produit* : On cherche un développement limité en 0 de $\mathrm{e}^x \sin x$. Comme

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x \sin x &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right)\\
&= x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)\\
&= x\left(1 + x + \frac{1}{3}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)\\
&= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)
\end{aligned}$$

On a ainsi obtenu un développement limité à l'ordre 3 comme produit d'un développement limité à l'ordre 3 et d'un développement limité dont l'ordre n'était que de 2. Ce phénomène apparaît dès que l'ordre de l'une des parties principales est non nul. Avant de calculer le développement limité d'un produit, on prendra donc soin de calculer les ordres auxquels il faudra effectuer le développement limité de chaque terme. Pour cela nous utiliserons la notation $\mathrm{DL}_{m,n}$ pour représenter un développement limité d'ordre n dont la partie principale est d'ordre m. Par exemple, si l'on souhaite obtenir un développement limité de $(\cos x - 1)\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 4, on remarque que

$$\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x).$$

Donc $\cos x - 1$ a une partie principale d'ordre 2, et $\ln(1+x)$ a une partie principale d'ordre 1. Donc

$$(\cos x - 1)\ln(1+x) = \mathrm{DL}_{2,n}\,\mathrm{DL}_{1,m} = \left(x^2\,\mathrm{DL}_{0,n-2}\right)\left(x\,\mathrm{DL}_{0,m-1}\right) = x^3\,\mathrm{DL}_{0,n-2}\,\mathrm{DL}_{0,m-1}.$$

Comme on souhaite un développement limité à l'ordre 4, il suffit d'obtenir un développement limité de $\mathrm{DL}_{0,n-2}\,\mathrm{DL}_{0,m-1}$ à l'ordre 1. On choisit donc n et m tels que $n-2=1$ et $m-1=1$, c'est-à-dire $n=3$ et $m=2$. On a alors

$$\begin{aligned}
(\cos x - 1)\ln(1+x) &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)\\
&= x^3\left(-\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right)\\
&= x^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right)\\
&= -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4).
\end{aligned}$$

⇨ *Réduction d'ordre pour le calcul du* DL *d'une puissance* f^k : Lorsque la partie principale de f en a est d'ordre non nul, il est utile d'effectuer un calcul d'ordre. Par exemple, si l'on souhaite obtenir un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\ln^4(1+x)$, on écrit

$$(\ln(1+x))^4 = (\mathrm{DL}_{1,n})^4 = (x\,\mathrm{DL}_{0,n-1})^4 = x^4\,\mathrm{DL}_{0,n-1}^4$$

Comme on souhaite un développement limité à l'ordre 5, il suffit d'obtenir un développement limité de $(\mathrm{DL}_{0,n-1})^4$ à l'ordre 1. On choisit donc n tel que $n-1=1$, soit $n=2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\ln^4(1+x) &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right)\right)^4 \\
&= x^4\left(1 - \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right)^4 \\
&= x^4\left(\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right) \\
&= x^4\left(1 - \binom{4}{1}\frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right) \\
&= x^4 - 2x^5 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

⇨ *Réduction d'ordre pour le calcul du* DL *d'une composée* $g\circ f$: Lorsque la partie principale de $f(a+u)-f(a)$ est d'ordre $\omega \geqslant 2$, il n'est pas nécessaire de pousser le développement limité de g jusqu'à l'ordre n. En effet, si f admet un développement limité à l'ordre n et si

$$g(f(a)+v) = \sum_{k=0}^{m} b_k v^k + \underset{v\to 0}{\mathrm{o}}(v^m)$$

est un développement limité de g à l'ordre m avec $\omega m \geqslant n$, ces développements suffisent pour obtenir un développement limité de $g\circ f$ à l'ordre n. Par exemple, si on souhaite un développement limité en 0 à l'ordre 4 de $\ln(\cos x)$, on écrit

$$\cos x = 1 \underbrace{- \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0}.$$

Comme la partie principale en 0 de $\cos x - 1$ est d'ordre 2, il suffit de faire un développement limité de ln en 1 à l'ordre 2.

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}\left(u^2\right)$$

Par composition

$$\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= \ln\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right)\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right)^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right) - \frac{1}{2}x^4\left(-\frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{4!}x^2}\right)^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2^3}\right)x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

⇨ *Développement limité avec des* O : Il est enfin possible de faire des développements limités avec des O. On dit qu'une fonction f admet un développement limité en a à la précision $\mathrm{O}(h^{n+1})$ lorsque

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \underset{h\to 0}{\mathrm{O}}\left(h^{n+1}\right).$$

Si f admet un tel développement limité, alors il admet un développement limité en a à l'ordre n et

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n).$$

La réciproque est fausse, mais si f admet un développement limité en a à l'ordre $n+1$

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + a_{n+1} h^{n+1} + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^{n+1}\right)$$

alors elle admet un développement limité en a à la précision $\mathrm{O}(h^{n+1})$ obtenu par troncature.

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \underset{h\to 0}{\mathrm{O}}\left(h^{n+1}\right).$$

Bref, un développement limité à la précision $\mathrm{O}(h^{n+1})$ nous donne plus d'informations qu'un développement limité à l'ordre n mais moins qu'un développement limité à l'ordre $n+1$. Comme le calcul d'un tel développement limité demande autant de calculs qu'un développement limité en a à l'ordre n, il est parfois avantageux de les utiliser. Nous verrons tout leur intérêt notamment lorsque nous aurons à montrer la convergence de séries. Notons au passage que les anglo-saxons utilisent par défaut des développements limités avec des O. Ce sont donc ces développements limités que vous donneront les logiciels de calcul formel. Notons que les opérations usuelles ont leur équivalent pour les développements limités avec des O.

Exercice 20

⇨ Donner un développement limité en 0 à la précision $\mathrm{O}(x^4)$ de $\sqrt{\cos x}$.

15.4 Développement asymptotique

15.4.1 Développement limité généralisé en $a \in \mathbb{R}$

Définition 15.4.1

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f admet un *développement limité généralisé* en a à la précision $\mathrm{o}(h^n)$ lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $b_p, \ldots, b_1, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f\left(a+h\right) = \frac{b_p}{h^p} + \cdots + \frac{b_1}{h} + a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^n\right).$$

Exercice 21

⇨ Donner un développement limité généralisé de $1/\sin x$ en 0 à la précision $\mathrm{o}(x)$.

15.4.2 Développement asymptotique au voisinage de $a \in \mathbb{R}$

Définition 15.4.2

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On appelle *développement asymptotique* de f en a à la précision $\mathrm{o}(f_n(h))$ toute écriture

$$f\left(a+h\right) = a_1 f_1(h) + \cdots + a_n f_n(h) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(f_n(h)\right)$$

où $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^*$ et

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad f_{k+1}(h) = \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(f_k(h)\right).$$

Exercices 22

⇨ Donner un développement asymptotique à 2 termes en 0 de $\sqrt{\ln\left(1+x\right)}$.

⇨ Simplifier, puis donner un équivalent en 0 de

$$\sin\left(\mathrm{Arcsin}(-1+x) + \frac{\pi}{2}\right).$$

En déduire un équivalent en 0 de $\mathrm{Arcsin}\left(-1+x\right) + \frac{\pi}{2}$ puis un développement asymptotique à deux termes de Arcsin en -1.

15.4.3 Développement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$

Définition 15.4.3

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On appelle *développement asymptotique* de f au voisinage de $+\infty$ à la précision $o(f_n(x))$ toute écriture

$$f(x) = a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x) + \underset{x\to+\infty}{o}(f_n(x))$$

où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^*$ et

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad f_{k+1}(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(f_k(x)).$$

Remarques

- ⇨ Pour avoir une éventuelle asymptote du graphe de f au voisinage de $+\infty$, il suffit de faire un développement asymptotique de $f(x)$ en $+\infty$. Supposons que

$$f(x) = ax + b + \underset{x\to+\infty}{o}(1)$$

alors f admet une asymptote d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$. Pour connaitre la position de la courbe par rapport à son asymptote, il suffit de trouver la partie principale de $f(x) - (ax + b)$ en $+\infty$.

- ⇨ En pratique, pour effectuer un développement asymptotique en $+\infty$, on pose

$$u := \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et on effectue un développement asymptotique de l'expression obtenue en 0.

Exercices 23

- ⇨ Donner un développement asymptotique à 2 termes de $\ln\left(x^3 \sin(1/x)\right)$ en $+\infty$.
- ⇨ Chercher une éventuelle asymptote à la fonction d'expression $\sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$ en $+\infty$. Donner la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
- ⇨ On rappelle que l'application f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à x associe xe^x est une bijection et que

$$f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x.$$

Donner un développement asymptotique à deux termes de f^{-1} en $+\infty$.

15.4.4 Développement asymptotique de suites

Définition 15.4.4

On appelle *développement asymptotique* de la suite (u_n) à la précision $o(v_{p,n})$ toute écriture

$$u_n = v_{1,n} + \cdots + v_{p,n} + \underset{n\to+\infty}{o}(v_{p,n})$$

où

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!], \quad v_{k+1,n} = \underset{n\to+\infty}{o}(v_{k,n}).$$

Exercice 24

- ⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution sur $]-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi[$. On note u_n cette solution. Donner un équivalent de u_n puis un développement asymptotique à 3 termes de cette suite.

15.5 Qcm

Comparaison de suites

Suites équivalentes

1. Un équivalent simple de la suite $u_n \coloneqq \sqrt{n^2+1} - n$ est

   ☐ **a.** $\dfrac{1}{2n}$ ☐ **b.** 0 ☐ **c.** 1 ☐ **d.** $\sqrt{n}$

2. Si (x_n) et (y_n) sont deux suites réelles telles que $x_n \sim n+1$ et $y_n \sim n$, alors

   ☐ **a.** $(x_n - y_n) \sim 0$ ☐ **b.** $(x_n - y_n) \sim 1$ ☐ **c.** $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

   ☐ **d.** on ne peut pas donner un équivalent de $(x_n - y_n)$

3. Soit $u_n \coloneqq \frac{e^{n+1}}{n+1}$. Un équivalent simple de u_n est

   ☐ **a.** e^n ☐ **b.** $\dfrac{e^n}{n}$ ☐ **c.** $\dfrac{e^n}{n+1}$ ☐ **d.** $\dfrac{e^{n+1}}{n}$

4. Soit $u_n \coloneqq \frac{\ln(2n)}{n}$. Alors u_n est équivalente à

   ☐ **a.** 0 ☐ **b.** $\dfrac{1}{n}$ ☐ **c.** $\dfrac{\ln n}{n}$ ☐ **d.** $\ln(2n)$

5. Laquelle des suites suivantes vérifie $u_{n+1} \sim u_n$?

   ☐ **a.** $n!$ ☐ **b.** 2^n ☐ **c.** n^n ☐ **d.** n^2

6. Soit (u_n) une suite réelle positive telle que $u_{n+2} \sim u_n$. Quelle condition est suffisante pour affirmer que $u_{n+1} \sim u_n$?

   ☐ **a.** u_n est minorée ☐ **b.** u_n est décroissante ☐ **c.** u_n est périodique ☐ **d.** n est pair

7. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Laquelle des suites suivantes est équivalente à (u_n) ?

   ☐ **a.** u_{n+1} ☐ **b.** $1 + u_n$ ☐ **c.** $2u_n$ ☐ **d.** $\sqrt{u_n}$

Suite négligeable devant une autre

1. Laquelle des suites suivantes n'est pas négligeable devant la suite $2n + \sqrt{n}$?

   ☐ **a.** $\sqrt{n}$ ☐ **b.** $\ln n$ ☐ **c.** n ☐ **d.** $\dfrac{1}{n}$

2. Comment se classent les suites $a_n \coloneqq 2^{n^2}$, $b_n \coloneqq n^{2^n}$ et $c_n \coloneqq 2^{n^n}$ pour la relation de négligeabilité ?

   ☐ **a.** $a_n \ll b_n \ll c_n$ ☐ **b.** $b_n \ll a_n \ll c_n$ ☐ **c.** $a_n \ll c_n \ll b_n$ ☐ **d.** $c_n \ll a_n \ll b_n$

3. Si $x_n \coloneqq 2^n$ et $y_n \coloneqq n^3$, alors on peut dire que

   ☐ **a.** $x_n = \underset{n\to+\infty}{o}(y_n)$ ☐ **b.** $y_n = \underset{n\to+\infty}{o}(x_n)$ ☐ **c.** x_n et y_n sont équivalentes ☐ **d.** x_n/y_n est bornée

4. Soit (x_n) et (y_n) deux suites strictement positives négligeables devant une suite strictement positive (u_n). Laquelle des suites suivantes n'est pas forcément négligeable devant la suite (u_n) ?

   ☐ **a.** $x_n + y_n$ ☐ **b.** $x_n y_n$ ☐ **c.** $x_n - y_n$ ☐ **d.** $\sqrt{x_n y_n}$

5. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Laquelle des suites suivantes est négligeable devant (u_n) ?

   ☐ **a.** $\dfrac{u_n}{2}$ ☐ **b.** $\sqrt{u_n}$ ☐ **c.** $\sqrt{n}$ ☐ **d.** u_{n-1}

6. Laquelle des propriétés suivantes permet de dire que la suite (u_n) converge ?

   ☐ **a.** $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 ☐ **b.** u_{n+1} est équivalent à u_n

   ☐ **c.** u_n est équivalente à 1 ☐ **d.** $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$

Suite dominée par une autre

Comparaison de fonctions

Fonctions équivalentes

Fonction négligeable devant une autre

Fonction dominée par une autre

Développement limité

Définition, propriétés élémentaires

1. Considérons la fonction polynomiale $P(x) := a + bx + cx^2 + dx^3$. Au voisinage de zéro, on a $P(x) = \mathrm{o}\left(x^2\right)$ si et seulement si

   ☐ **a.** $a = b = 0$ ☐ **b.** $a = b = c = 0$ ☐ **c.** $a = b = c = d = 0$ ☐ **d.** $c = d = 0$

Développement limité et propriétés locales

1. Lesquels des développements limités suivants montre que la fonction f est, au voisinage de 0, au-dessus de sa tangente en 0 d'équation $y = 1 - x$?

   ☐ **a.** $1 - x + x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$ ☐ **b.** $1 - x + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$
   ☐ **c.** $1 - x + \mathrm{o}\left(x\right)$ ☐ **d.** $1 - x - x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$

2. Lequel des développements limités suivants montre que la fonction f admet en 0 un point d'inflexion ?

   ☐ **a.** $f(x) = x + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ ☐ **b.** $f(x) = x + \mathrm{o}\left(x\right)$
   ☐ **c.** $f(x) = x - x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$ ☐ **d.** $f(x) = x - x^2 + x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$

Intégration et existence d'un développement limité

1. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \mathrm{o}(x^3)$, alors la valeur de $f^{(3)}(0)$ est

   ☐ **a.** $\dfrac{1}{2}$ ☐ **b.** 3 ☐ **c.** 9 ☐ **d.** 18

2. Laquelle des fonctions suivantes n'admet pas de développement limité d'ordre $n \geqslant 1$ en 1 ?

   ☐ **a.** $x \mapsto \sqrt{x}$ ☐ **b.** $x \mapsto \ln x$ ☐ **c.** $x \mapsto \sin x$ ☐ **d.** $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$

Développements limités usuels

1. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1 + x)^{\frac{3}{2}}$ est

   ☐ **a.** $1 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{15}{8}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ ☐ **b.** $1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$
   ☐ **c.** $1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{4}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ ☐ **d.** $1 + \dfrac{3}{2}x + \mathrm{o}\left(x^2\right)$

2. Parmi les $2n + 1$ coefficients du développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de $\sqrt{1 + x}$, combien sont positifs ?

   ☐ **a.** un seul ☐ **b.** n ☐ **c.** $n + 1$ ☐ **d.** tous

Opérations usuelles sur les développements limités

1. Si en 0 on a $f(x) = 1 + x + x^2 + \mathrm{o}(x^2)$ et $g(x) = 2x + \mathrm{o}(x)$ alors $f + g$ admet pour développement limité

   ☐ **a.** $1 + 3x + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ ☐ **b.** $1 + 3x + \mathrm{o}(x)$
   ☐ **c.** $1 + 3x + \mathrm{o}(x) + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ ☐ **d.** $1 + 3x + \mathrm{o}\left(x^{3/2}\right)$

2. Si $f(x) = 1 + x + x^2 + \mathrm{o}(x^2)$, alors $f^2(x)$ admet comme développement limité

   ☐ **a.** $1 + 2x + 2x^2 + \mathrm{o}(x^2)$ ☐ **b.** $1 + 2x + 3x^2 + \mathrm{o}(x^2)$
   ☐ **c.** $1 + 2x + 4x^2 + \mathrm{o}(x^2)$ ☐ **d.** $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 + \mathrm{o}(x^2)$

3. En 0, la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{1+x}-1$ est équivalente à

☐ **a.** $\dfrac{x}{3}$ ☐ **b.** $\sqrt[3]{x}$ ☐ **c.** x ☐ **d.** $3x$

4. Laquelle des fonctions suivantes n'est pas majorée par x^2 au voisinage de 0 ?

☐ **a.** $x \mapsto \ln\left(1+x^2\right)$ ☐ **b.** $x \mapsto \sqrt{1+x^2}-1$ ☐ **c.** $1-\cos(2x)$ ☐ **d.** $(\sin x)^2$

5. La limite en 0 de

$$\frac{\tan x - x}{\sin x - x}$$

vaut

☐ **a.** -2 ☐ **b.** 0 ☐ **c.** 1 ☐ **d.** $+\infty$

6. Au voisinage de 0, la fonction $f(x) = \cos(x) - 1 + ax^2$ est

☐ **a.** positive pour $a \geqslant 1/2$, négative pour $a < 1/2$
☐ **b.** positive pour $a > 1/2$, nulle pour $a = 1/2$, négative pour $a < 1/2$
☐ **c.** positive pour $a > 1/2$, négative pour $a \leqslant 1/2$
☐ **d.** positive pour $a \geqslant -1/2$, négative pour $a < -1/2$

Réduction d'ordre

1. Pour obtenir un développement limité à l'ordre 5 en 0 de

$$f : x \mapsto \frac{x^2 \cos x}{\sin x}$$

on a besoin

☐ **a.** du DL de cos à l'ordre 4 et du DL de sin à l'ordre 5
☐ **b.** du DL de cos à l'ordre 5 et du DL de sin à l'ordre 5
☐ **c.** du DL de cos à l'ordre 3 et du DL de sin à l'ordre 4
☐ **d.** du DL de cos à l'ordre 3 et du DL de sin à l'ordre 5

Développement asymptotique

Développement limité généralisé en $a \in \mathbb{R}$

Développement asymptotique au voisinage de $a \in \mathbb{R}$

Développement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$

Développement asymptotique de suites

1. Lequel des développements asymptotiques suivants permet de dire que e^{u_n} est équivalent à e^n ?

☐ **a.** $u_n = n + \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^n\right)$ ☐ **b.** $u_n = n + \mathrm{o}\left(n\right)$ ☐ **c.** $u_n = n + \mathrm{o}\left(1\right)$ ☐ **d.** $u_n = n + \ln n + \mathrm{o}\left(\ln n\right)$

15.6 Exercices

Comparaison de suites

Suites équivalentes

Exercice 1 : Équivalents et composition par ln

Soit (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes strictement positives.

1. On suppose que (u_n) et (v_n) tendent vers 0 ou $+\infty$ en $+\infty$. Montrer que
$$\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln v_n.$$
En déduire des équivalents simples de $\ln(n^2-1)$ et $\ln(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.
2. Que peut-on dire si (u_n) et (v_n) convergent vers 1 ?

Exercice 2 : Calcul d'équivalents

Donner un équivalent simple des suites de terme général

$$\textbf{a. } \ln(n+1)-\ln n, \qquad \textbf{b. } n(\sqrt[n]{3}-1), \qquad \textbf{c. } \sum_{k=1}^{n} k^{k^2}.$$

Exercice 3 : Équivalents

Soit (u_n) une suite réelle de limite nulle telle que
$$u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que si u_n est décroissante alors $u_n \sim 1/(2n)$.
2. Étudier le cas de la suite
$$u_n \coloneqq \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Suite négligeable devant une autre

Exercice 4 : Constante d'Euler

Soit (H_n) la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. En utilisant une intégrale, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$
2. En déduire que $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n)+1$.
3. Déterminer la limite, puis un équivalent de H_n.
4. Montrer que $u_n \coloneqq H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive. En déduire qu'il existe une constante (la constante d'Euler) γ telle que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1).$$

Exercice 5 : Suite définie implicitement

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) \coloneqq nx^{n+1} - (n+1)x^n - \frac{1}{2}.$$

1. Démontrer que f_n admet une unique racine positive, notée x_n.

2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x).$$
En déduire que la suite (x_n) est décroissante.
3. Montrer que
$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
4. Montrer que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad g(y) := \mathrm{e}^y(y-1) - \frac{1}{2}$$
possède une unique racine, notée γ, dans $]0, +\infty[$. Donner une valeur numérique de γ à 10^{-3} près.
5. Établir que, si α est une constante strictement positive, alors $(f_n(1+\frac{\alpha}{n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $g(\alpha)$.
6. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $f_n(1+\frac{\gamma+\varepsilon}{n})$ est ultimement positif, et que $f_n(1+\frac{\gamma-\varepsilon}{n})$ est ultimement négatif.
7. En déduire que
$$x_n = 1 + \frac{\gamma}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 6 : Une suite implicite

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs telle que $x_n^n \ln(x_n) = 1$ pour tout entier n.
2. Montrer que cette suite est décroissante et qu'elle tend vers 1.
3. Montrer que
$$x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{w(n)}{n}$$
où w est la fonction de Lambert, c'est-à-dire la fonction réciproque de $x \mapsto x\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}_+$.

Suite dominée par une autre

Comparaison de fonctions

Fonctions équivalentes

Exercice 7 : Composition d'équivalents

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$$
et que ces fonctions admettent une limite commune notée $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

1. On suppose dans cette question que f et g sont à valeurs strictement positives.
   (a) Montrer que si $l \neq 1$, alors
   $$\ln(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(g(x)).$$
   (b) Que pouvez-vous dire lorsque $l = 1$?
2. Parmi les équivalents suivants, lesquels sont systématiquement vrais ? (on pourra discuter selon les valeurs de l).
$$\textbf{a. } \operatorname{Arctan}(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \operatorname{Arctan}(g(x)), \qquad \textbf{b. } \mathrm{e}^{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{g(x)},$$
$$\textbf{c. } \sin(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sin(g(x)).$$

Fonction négligeable devant une autre

Fonction dominée par une autre

Développement limité

Définition, propriétés élémentaires

Exercice 8 : Existence de développement limité

1. $\sqrt{x}$ admet-elle un développement limité d'ordre $n \geqslant 1$ en 0 ?
2. À quels ordres $x^{\frac{13}{3}}$ admet-elle un développement limité en 0 ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. $|x|^n$ admet-elle un développement limité d'ordre n en 0 ?

Développement limité et propriétés locales

Intégration et existence d'un développement limité

Développements limités usuels

Exercice 9 : Fonction définie par morceaux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \cos\sqrt{|x|} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{ch}\sqrt{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

À quels ordres f admet-elle un développement limité en 0 ?

Opérations usuelles sur les développements limités

Exercice 10 : Calcul

Calculer les développements limités suivants.

a. $\mathrm{e}^{\cos x}$ en 0 à l'ordre 4, **b.** $\ln\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$ en 0 à l'ordre 7,

c. $\dfrac{1}{\cos x}$ en 0 à l'ordre 5, **d.** $\ln(1 + \operatorname{ch} x)$ en 0 à l'ordre 4,

e. $\mathrm{e}^{\operatorname{Arcsin} x}$ en 0 à l'ordre 4 **f.** $\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x)$ en 0 à l'ordre 3

g. $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)$ en 0 à l'ordre 2, **h.** $\operatorname{Arctan}(2\sin x)$ en $\pi/3$ à l'ordre 3.

i. $\ln(1+\sin x) - \sin(\ln(1+x))$ en 0 à l'ordre 5, **j.** $\ln(\tan x)$ en $\pi/4$ à l'ordre 3,

Exercice 11 : Développement limité de $\tan x$

1. Donner un développement limité de tan en 0 à l'ordre 1.
2. En exploitant la relation $\tan' x = 1 + \tan^2 x$, donner un développement limité de tan en 0 à l'ordre 3. Que peut on en déduire sur le graphe de f au voisinage de 0 ?
3. En déduire un développement limité de tan en 0 à l'ordre 5 puis à l'ordre 7.

Exercice 12 : Calcul

1. Donner le développement limité de
$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$$
en 0 à l'ordre 4.
2. Sur le même modèle, donner un développement limité de
$$\int_x^{\frac{1}{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$
en 1 à l'ordre 3.

Exercice 13 : Logarithme et exponentielle

Donner le développement limité en 0 à l'ordre $n+1$ de

$$\ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

Développement asymptotique

Développement limité généralisé en $a \in \mathbb{R}$

Exercice 14 : Calcul

Calculer les développements limités suivants.

a. $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ en 0 à l'ordre 3, **b.** $\dfrac{\operatorname{Arctan} x}{\operatorname{Arcsin} x}$ en 0 à l'ordre 4.

c. $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$ en 0 à l'ordre 3

Exercice 15 : Calcul de limites

Calculer les limites des expressions suivantes lorsqu'elles existent.

a. $(\tan x)^{\tan 2x}$ en $\dfrac{\pi}{4}$, **b.** $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ en 0,

c. $\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}{x}$ en 0, **d.** $\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$ en 1,

e. $\dfrac{1}{\sin^4 x}\left(\sin\dfrac{x}{1-x} - \dfrac{\sin x}{1-\sin x}\right)$ en 0

Exercice 16 : Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in [-\pi/2, \pi/2], \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

Développement asymptotique au voisinage de $a \in \mathbb{R}$

Exercice 17 : Développement asymptotique de Arcsin en -1

1. Montrer que
$$\forall x \in [0,1], \quad \operatorname{Arcsin}\sqrt{x} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1).$$
2. En déduire un développement asymptotique de Arcsin en -1 à la précision x^2.

Exercice 18 : Équivalent

Donner un équivalent des expressions suivantes.

a. $\ln(\operatorname{ch} x) + \operatorname{sh}^2 x$ en 0, **b.** $\dfrac{\cos x}{1-x} - 1$ en 0, **c.** $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ en π,

d. $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x+2}}$ en 1, **e.** $\dfrac{\cos x - x^x}{\mathrm{e}^x}$ en 0, **f.** $\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)$ en 0.

g. $\dfrac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}} - x}{x^x - 1}$ en 0.

Développement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$

Exercice 19 : Calcul

Calculer les développements asymptotiques suivants

a. $\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$ en $+\infty$ à 2 termes, **b.** $\ln\left(\sqrt{1+x}\right)$ en $+\infty$ à 2 termes.

Développement asymptotique de suites

Exercice 20 : Équivalent

Donner un équivalent des expressions suivantes

$$\textbf{a. } \frac{n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\tan\frac{\pi}{n}}, \qquad \textbf{b. } \frac{\ln(n^4+4)}{n+1}, \qquad \textbf{c. } 3+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\frac{6}{n},$$

$$\textbf{d. } \ln(n+2)-\ln(n+1), \qquad \textbf{e. } \cos\frac{1}{2^n}-\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}, \qquad \textbf{f. } (n+1)^{\frac{1}{n+1}}-n^{\frac{1}{n}},$$

$$\textbf{g. } \mathrm{e}^{\tan\frac{\pi}{n}}-1, \qquad \textbf{h. } \frac{\ln(n^2+2)-\ln(n^2+1)}{n^{\frac{n+2}{n}}}, \qquad \textbf{i. } \sqrt{n}^n+n^{\sqrt{n}}+n^{\frac{n}{2}}.$$

Exercice 21 : Développement asymptotique d'une suite

On considère la suite définie par

$$u_0 \coloneqq 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq \sqrt{n+u_n}.$$

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n-1} \leqslant u_n \leqslant 2\sqrt{n}.$$
2. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$, puis que
$$u_n = \sqrt{n}+\frac{1}{2}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1).$$
3. Prouver enfin que
$$u_n = \sqrt{n}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 22 : La formule de Stirling

Le but de cet exercice est calculer de calculer un équivalent de $n!$. On considère la suite u définie par

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n \coloneqq \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^n n!}.$$

1. Montrer que
$$\forall n \geqslant 1, \quad \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = n\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$
2. En déduire que
$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$$
3. En déduire que la suite de terme général
$$S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$$
est monotone à partir d'un certain rang. Montrer qu'il existe un rang à partir duquel
$$\ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) \leqslant \frac{1}{6k^2},$$
puis en déduire que (S_n) est convergente.
4. En déduire que la suite de terme général $\ln(u_n)$ est convergente.
5. En déduire l'existence d'un réel $a > 0$ tel que
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} a\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$
6. En utilisant les résultats de l'exercice sur les intégrales de Wallis (compléments d'analyse), montrer que $a = \sqrt{2\pi}$.

Chapitre 16

Matrices et applications linéaires

16.1 Matrice, vecteur et application linéaire

16.1.1 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 16.1.1

Soit $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x \in E$. On appelle *matrice* de x relativement à la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ la matrice colonne constituée des coordonnées de x relativement à la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Exercice 1

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\mathcal{B} \coloneqq (1, (X-\alpha), (X-\alpha)^2, \dots, (X-\alpha)^n)$. Donner la matrice de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

Proposition 16.1.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors, l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque

⇨ Dans le cas où $E \coloneqq \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}$ est sa base canonique, l'application Φ associe au vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ la matrice colonne

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Cet isomorphisme justifie l'identification souvent faite entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Cependant, lorsque E est différent de $\mathbb{K}^n$, on se gardera bien de confondre $x \in E$ avec la matrice colonne $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$.

Définition 16.1.3

Soit $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E. On appelle matrice de la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ relativement à la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p)$ la matrice à n lignes et p colonnes dont les vecteurs colonnes C_j sont les coordonnées des vecteurs x_j relativement à la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, la famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ des coefficients de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p)$ est caractérisée par

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

Exercice 2

⇨ Donner la matrice de la famille $((X+1)^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

16.1.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 16.1.4

Soit $\mathcal{B}_E := (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F := (f_1, \ldots, f_q)$ une base de F. Étant donné $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle *matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$* et on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)$ la matrice à q lignes et p colonnes de la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_p))$ relativement à la base $\mathcal{B}_F$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u) := \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(u(e_1), \ldots, u(e_p)).$$

Autrement dit, la famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ des coefficients de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)$ est caractérisée par

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{i,j} f_i.$$

Remarques

⇨ La matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)$ est parfois notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ ou $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(u)$.

⇨ Si $E = F$, on choisit le plus souvent $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$, bien que cela ne soit pas obligatoire. Dans ce cas on parle de la matrice de l'endomorphisme u relativement à la base $\mathcal{B}_E$. Cette matrice est notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(u)$.

⇨ Soit $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est scalaire si et seulement si u est une homothétie.
2. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ si et seulement si

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad u(e_k) = \lambda_k e_k.$$

3. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $E_k := \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure si et seulement si

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad u(E_k) \subset E_k.$$

Par exemple, si $E := \mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{B}$ est sa base canonique, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure si et seulement si

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad \deg(u(P)) \leqslant \deg P.$$

⇨ Soit p un projecteur de E, $A := \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id})$ et $B := \operatorname{Ker} p$. Puisque p est un projecteur, $E = A \oplus B$. Soit $(e_1, \ldots, e_q)$ une base de A et $(e_{q+1}, \ldots, e_n)$ une base de B. Alors $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Comme

$$\forall k \in [\![1, q]\!], \quad p(e_k) = e_k \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![q+1, n]\!], \quad p(e_k) = 0$$

on en déduit que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Exercices 3

⇨ Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de $\operatorname{Ker} \varphi$ ainsi qu'une base de $\operatorname{Im} \varphi$.

⇨ Calculer la matrice de l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$$

relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Proposition 16.1.5

Soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases respectives de E et F. Si on note $p := \dim E$ et $q := \dim F$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, il existe donc une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u) = A$.

Proposition 16.1.6

— Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $x \in E$. Si $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont des bases respectives de E et F, alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(x).$$

— Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Si $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ sont des bases respectives de E, F et G, alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_G \leftarrow \mathcal{B}_E}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_G \leftarrow \mathcal{B}_F}(v)\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u).$$

Remarque

⇨ Si $E := \mathbb{K}^p$, $F := \mathbb{K}^q$, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont leurs bases canoniques, et $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^q)$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u) = A$. On dit que c'est *l'application linéaire canoniquement associée à* A. En identifiant $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ (à la fois pour $n = p$ et $n = q$), pour tout $x \in \mathbb{K}^p$, $u(x) = Ax$. On a alors $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} A$, où le noyau et l'image de la matrice A ont été définis lors du premier chapitre sur les matrices.

Exercice 4

⇨ Retrouver le fait que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

Proposition 16.1.7

Soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases respectives des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)$ est inversible si et seulement si u est un isomorphisme. De plus, si tel est le cas

$$\left[\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)\right]^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E \leftarrow \mathcal{B}_F}\left(u^{-1}\right).$$

Exercice 5

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall i, j \in [\![1, n+1]\!], \quad a_{i,j} := \binom{j-1}{i-1}.$$

est inversible et calculer son inverse.

Proposition 16.1.8

Soit $\mathcal{B}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ est inversible si et seulement si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E.

Proposition 16.1.9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres.

Remarque

⇨ En conservant les mêmes notations, l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathrm{GL}(E) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

Exercice 6

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que les endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E sont les homothéties.

16.1.3 Matrice de passage, changement de base

Définition 16.1.10

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}' := (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle *matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$* et on note $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ la matrice de la famille $(e'_1, \ldots, e'_n)$ relativement à la base $\mathcal{B}$

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') := \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Proposition 16.1.11

— Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathcal{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E).$$

— Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont des bases de E, alors

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}'') = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')\, P(\mathcal{B}', \mathcal{B}'').$$

— Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est inversible et

$$[P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')]^{-1} = P(\mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

Exercice 7

⇨ Soit $E := \mathbb{K}^2$ et $\mathcal{B} := (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$. On pose $f_1 := (5, 3)$ et $f_2 := (3, 2)$. Montrer que $\mathcal{B}' := (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{K}^2$, puis calculer $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ et $P(\mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Proposition 16.1.12

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors pour toute matrice inversible $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, il existe une unique base $\mathcal{B}'$ de E telle que $A = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Proposition 16.1.13

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $x \in E$. Alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x) = P(\mathcal{B}', \mathcal{B})\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x).$$

Proposition 16.1.14

Soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_F \leftarrow \mathcal{B}'_E}(u) &= P(\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}_F)\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)\, P(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E) \\ &= [P(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F)]^{-1}\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)\, P(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E). \end{aligned}$$

Proposition 16.1.15

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) &= P(\mathcal{B}', \mathcal{B})\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\, P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \\ &= [P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')]^{-1}\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\, P(\mathcal{B}, \mathcal{B}'). \end{aligned}$$

16.1.4 Caractérisation des matrices inversibles

Proposition 16.1.16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

— A est inversible si et seulement si A est inversible à gauche, c'est-à-dire si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $BA = I_n$. Si tel est le cas, $B = A^{-1}$ et en particulier $AB = I_n$.

— A est inversible si et seulement si A est inversible à droite, c'est-à-dire si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$. Si tel est le cas, $B = A^{-1}$ et en particulier $BA = I_n$.

Proposition 16.1.17

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0 \quad \Longrightarrow \quad X = 0.$$

Remarque

⇨ Autrement dit, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si la famille de ses vecteurs colonne est libre. Comme A est inversible si et seulement si $A^\top$ l'est, on en déduit que A est inversible si et seulement si la famille de ses vecteurs ligne est libre.

Proposition 16.1.18

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = Y \quad \Longrightarrow \quad X = BY.$$

De plus, si tel est le cas, B est l'inverse de A.

Remarque

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les coefficients d'un système linéaire à n équations et n inconnues. Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que quels que soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = y_1 \\ \qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = y_n \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = b_{1,1}y_1 + b_{1,2}y_2 + \cdots + b_{1,n}y_n \\ \quad \vdots \\ x_n = b_{n,1}y_1 + b_{n,2}y_2 + \cdots + b_{n,n}y_n. \end{cases}$$

Alors, quels que soient $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$

$$\begin{cases} x_1 := b_{1,1}y_1 + b_{1,2}y_2 + \cdots + b_{1,n}y_n \\ \quad\vdots \\ x_n := b_{n,1}y_1 + b_{n,2}y_2 + \cdots + b_{n,n}y_n \end{cases}$$

est l'unique solution du système linéaire (S).

Exercices 8

⇨ Soit $n \geqslant 2$. Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

est inversible et calculer son inverse.

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$ et $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$. Résoudre le système

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{ij} z_j = b_i.$$

Proposition 16.1.19

Une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

est inversible si et seulement si

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k \neq 0.$$

Si tel est le cas

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

16.1.5 Rang d'une matrice

Définition 16.1.20

On définit le *rang* de $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, que l'on note $\operatorname{rg} A$, comme étant le rang de la famille de ses vecteurs colonne.

Exercice 9

⇨ Montrer que les matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les $XY^\top$ où $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$.

Proposition 16.1.21

— Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E. Alors

$$\operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_p) = \operatorname{rg}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p)).$$

— Soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases respectives de E et F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)\right).$$

Proposition 16.1.22

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\operatorname{rg}(A) = n$.

Proposition 16.1.23

— Soit $A \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors

$$\operatorname{rg}(AB) \leqslant \operatorname{rg}(A) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rg}(AB) \leqslant \operatorname{rg}(B).$$

— On ne change pas le rang d'une matrice si on la multiplie par la droite ou par la gauche par une matrice inversible.

Proposition 16.1.24

Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes transforment une matrice en une autre de même rang.

Proposition 16.1.25

Soit $E \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée à coefficients diagonaux de la forme

$$\begin{pmatrix} p_1 & \star & \cdots & & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & p_r & \star & \cdots & \star \\ & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{K}^*$. Alors $\operatorname{rg}(E) = r$.

Remarques

⇨ L'algorithme du pivot de Gauss permet de transformer toute matrice en une matrice échelonnée à pivots diagonaux et permet donc de calculer son rang.

⇨ Les matrices échelonnées par lignes et par colonnes ont aussi un rang égal au nombre de pivots qu'elles possèdent.

Exercices 10

⇨ Calculer le rang de $P_1 := X^2 + X + 1$, $P_2 := X^2 - X - 1$, $P_3 := X^2 + 3X + 2$.

⇨ Calculer le rang de

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

où

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

⇨ Calculer le rang de la famille $e_1 := (1, x, -1)$, $e_2 := (x, 1, x)$, $e_3 := (-1, x, 1)$ où $x \in \mathbb{R}$.

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

⇨ Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $F := \operatorname{Vect}(A, B)$. Déterminer une base puis une équation de F.

Proposition 16.1.26

— Les opérations élémentaires sur les lignes transforment une matrice en une matrice de même noyau.
— Les opérations élémentaires sur les colonnes transforment une matrice en une matrice de même image.

Remarque

⇨ Pour calculer une base de l'image d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, il suffit donc de réduire A en une matrice échelonnée par colonnes à l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes. Le nombre de colonnes non nulles est alors égal au rang de A et ces colonnes forment une base de $\operatorname{Im} A$.

Exercice 11

⇨ Calculer une base de $\operatorname{Im} A$ pour

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

16.2 Matrices équivalentes, matrices semblables

16.2.1 Matrices équivalentes

Définition 16.2.1

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On dit que A est *équivalente* à B lorsqu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tels que

$$A = QBP.$$

Proposition 16.2.2

La relation « est équivalente à » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

Remarque

⇨ Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes transforment une matrice en une matrice équivalente.

Proposition 16.2.3

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, $\mathcal{B}_E$ une base de E, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, $\mathcal{B}_F$ une base de F et u l'application linéaire de E dans F définie par

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u) = A.$$

Alors $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est équivalente à A si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}'_E$ de E et une base $\mathcal{B}'_F$ de F telles que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'_F \leftarrow \mathcal{B}'_E}(u) = B.$$

Proposition 16.2.4

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r. Alors A est équivalente à la matrice

$$J_r := \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & r & & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ r \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Remarques

⇨ En toute rigueur, une telle matrice devrait être notée $J_{r,q,p}$.

⇨ L'algorithme du pivot de Gauss permet le calcul effectif de $Q \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tels que $PAQ = J_r$.

Exercice 12

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & X & \longmapsto & XA \end{array}$$

Calculer le rang de φ en fonction de celui de A.

Proposition 16.2.5

Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Proposition 16.2.6

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors $A^\top$ et A ont même rang.

Remarques

⇨ Le rang de $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est donc égal à la fois au rang de la famille de ses vecteurs colonne et au rang de la famille de ses vecteurs ligne.

⇨ Attention, si $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ n'est pas une matrice carrée, A et $A^\top$ ont même rang mais elles ne sont pas équivalentes. En effet, elles n'ont pas les mêmes dimensions.

Définition 16.2.7

On appelle *matrice extraite* de $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ toute matrice obtenue en « supprimant » certaines lignes et certaines colonnes de A.

Exemple

⇨ Soit A et B les matrices

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{K}).$$

Alors B est une matrice extraite de A.

Proposition 16.2.8

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.
- Si B est une matrice extraite de A, alors $\mathrm{rg}(B) \leqslant \mathrm{rg}(A)$.
- Le rang de A est le plus grand entier r tel qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ extraite de A qui est inversible.

16.2.2 Matrices semblables

Définition 16.2.9

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *semblable* à B lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A = PBP^{-1}.$$

Proposition 16.2.10

La relation « est semblable à » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarques

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice scalaire, c'est la seule matrice semblable à elle-même.

⇨ Deux matrices semblables sont équivalentes. La réciproque est fausse.

⇨ Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & X & \longmapsto & PXP^{-1} \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres. En particulier, si $A = PBP^{-1}$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$. Plus généralement, si $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(A) = PQ(B)P^{-1}$.

Proposition 16.2.11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et u l'endomorphisme de E défini par

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = A.$$

Alors $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à A si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = B.$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *valeur propre* de u tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u, l'ensemble E_λ des $x \in E$ tels que $u(x) = \lambda x$ est appelé *espace propre* associé à la valeur propre λ et ses éléments sont appelés *vecteurs propres* de u associés à la valeur propre λ. Remarquons que $E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})$.

Exercices 13

⇨ Déterminer les valeurs propres d'un projecteur non trivial, c'est-à-dire différent de 0 et de Id.

⇨ Soit $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs propres non nuls d'un endomorphisme u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u, c'est-à-dire lorsqu'il existe une base $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad u(e_k) = \lambda_k e_k.$$

On a alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale. Dans la suite, on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A, c'est-à-dire l'unique endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = A$.

— *On commence par déterminer les valeurs propres de u.* Pour $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est valeur propre de } u &\iff \exists x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}, \quad u(x) = \lambda x \\
&\iff \exists x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}, \quad (u - \lambda \operatorname{Id})(x) = 0 \\
&\iff \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) \neq \{0\} \\
&\iff u - \lambda \operatorname{Id} \text{ n'est pas injective} \\
&\iff u - \lambda \operatorname{Id} \text{ n'est pas un isomorphisme} \\
&\iff A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible.}
\end{aligned}$$

Déterminer les valeurs propres de u revient donc à déterminer les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, ce qui se fait simplement en calculant le rang de $A - \lambda I_n$ par la méthode du pivot de Gauss.

— Ensuite, pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ de u, *on détermine une base de l'espace propre $E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})$.*

— Enfin, *on concatène les bases des espaces propres ainsi obtenus.* On obtient alors une famille $\mathcal{V} := (v_1, \dots, v_p)$ d'éléments de $\mathbb{K}^n$. On commence par démontrer que cette famille est libre. On a ensuite deux possibilités :

  — Dans le cas où $p = n$, $\mathcal{V}$ est une base de $\mathbb{K}^n$. En posant $P := P(\mathcal{B}, \mathcal{V})$ et $D := \mathcal{M}_{\mathcal{V}}(u)$, on a donc $A = PDP^{-1}$. D est une matrice diagonale, car les éléments de $\mathcal{V}$ sont des vecteurs propres de u. On a donc prouvé que A est diagonalisable.

  — Dans le cas où $p < n$, on peut montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.

Exercice 14

⇨ Montrer que la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

est semblable à une matrice diagonale D et déterminer une matrice $P \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

Proposition 16.2.12

Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Alors $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.

Définition 16.2.13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors la trace de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ de E choisie. On l'appelle *trace* de u et on la note $\mathrm{tr}(u)$.

Remarque

⇨ La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 15

⇨ Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Proposition 16.2.14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u).$$

16.3 Exercices

Matrices, vecteur et application linéaire

Matrice d'une famille de vecteurs

Matrice d'une application linéaire

Exercice 1 : Exemples

Écrire les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques.

$$\varphi_a : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y, 2x) \end{array} \qquad \varphi_b : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(1)+P''(1)) \end{array}$$

$$\varphi_c : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP + P' + P(1) \end{array}$$

Exercice 2 : Base, noyau et image

1. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est
$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice
$$A \coloneqq \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
Déterminer le rang de f, ainsi qu'une base de son noyau et de son image. Donner une équation de l'image.

Exercice 3 : Supplémentaire

On pose
$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
Les sous-espaces $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 4 : Exercice

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Ker} M^2$ et $\operatorname{Im} M = \operatorname{Im} M^2$.
2. En déduire que la première colonne et la dernière ligne de M sont nulles, puis dégager de tout cela une contradiction.

Exercice 5 : Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^2 = f^3$.

1. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f^2)$.
2. Montrer que si $\operatorname{rg}(f - \operatorname{Id}) = 2$, alors dans une certaine base de E, f a pour matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3. Plus généralement, montrer que dans une certaine base de E, f a pour matrice
$$0, \qquad I_3, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : Exercice

Soit $E := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables n fois quel que soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$\mathcal{B} := (\sin, \cos, \sinh, \cosh) \qquad \text{et} \qquad V := \operatorname{Vect} \mathcal{B}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de V.
2. Montrer que V est stable par dérivation.

On note D l'endomorphisme de V dans lui-même qui à f associe f' et M la matrice de D relativement à la base $\mathcal{B}$.

3. Déterminer M.
4. Montrer que D est un automorphisme de V et calculer la matrice de D^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

Matrice de passage, changement de base

Exercice 7 : Calcul de matrices

1. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad u(P) := P' + P.$$

   Écrire la matrice de u dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$ avec

$$\mathcal{B}_1 := ((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1))$$

$$\mathcal{B}_2 := ((3,1,4),(5,3,2),(1,-1,7))$$

Caractérisation des matrices inversibles

Exercice 8 : Calcul dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent.

Exercice 9 : Matrices à diagonale dominante

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients diagonaux dominants, c'est-à-dire telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Rang d'une matrice

Exercice 10 : Calcul de rang et d'inverse

Calculer les rangs des matrices suivantes et calculer leurs inverses quand il y a lieu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 11 : Exercice

1. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$X^\top X = 0 \quad \Longrightarrow \quad X = 0.$$

2. En déduire que pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\operatorname{Ker}\left(M^\top M\right) = \operatorname{Ker} M$, puis que $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}\left(M^\top M\right)$.

Matrices équivalentes, matrices semblables

Matrices équivalentes

Exercice 12 : Rang

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\operatorname{rg} B \leqslant \operatorname{rg} A \iff [\exists Q \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K}), \quad \exists P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad B = QAP].$$

Exercice 13 : Étude d'un système affine

Soit a, b, c trois réels deux à deux distincts.

1. Montrer que le système
$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ x + by + b^2 z = 0 \\ x + cy + c^2 z = 0 \end{cases}$$
est de Cramer.
2. Résoudre le système
$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^4 \\ x + by + b^2 z = b^4 \\ x + cy + c^2 z = c^4 \end{cases}$$

Matrices semblables

Exercice 14 : Réduction d'une matrice

Soit A la matrice
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de A.
2. Déterminer une matrice diagonale D semblable à A. En déduire un polynôme annulateur non nul de A.
3. Expliciter les suites u, v et w définies par la donnée de u_0, v_0, w_0 et la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} := \phantom{-2u_n + {}} 2v_n - w_n \\ v_{n+1} := 3u_n - 2v_n \\ w_{n+1} := -2u_n + 2v_n + w_n \end{cases}$$

Exercice 15 : Exercice

1. On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f a pour matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
2. On pose
$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que M est inversible et calculer son inverse.
   (b) Montrer que M est semblable à son inverse.

Exercice 16 : Matrices telles que $M^2 = 0$

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $M^2 = 0$.

Exercice 17 : Réduction des matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence n, c'est-à-dire telle que

$$A^n = 0 \quad \text{et} \quad A^{n-1} \neq 0.$$

Montrer que A est semblable aux matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 : Valeurs propres et de AB et BA

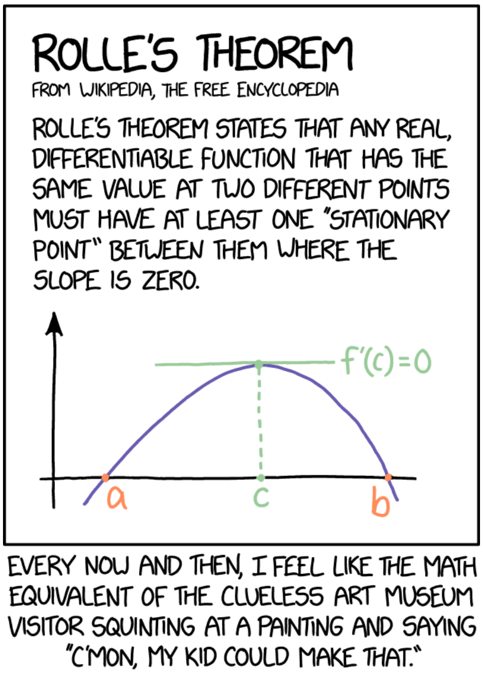
On appelle valeur propre d'une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tout réel λ tel que $X - \lambda I_n$ ne soit pas inversible. Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles.

Chapitre 17

Dérivation

« Le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite, à condition que les deux points soient bien en face l'un de l'autre. »

— Pierre Dac (1893–1975)



Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

17.1 Fonction dérivable, dérivées successives

17.1.1 Définition

Définition 17.1.1

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est *dérivable* en $x_0 \in \mathcal{D}$ lorsque le *taux d'accroissement*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 ; si tel est le cas, on note $f'(x_0)$ cette limite que l'on appelle *nombre dérivé* de f en x_0. La propriété « est dérivable en x_0 » est locale en x_0.

Remarques

⇨ Un changement de variable montre que f est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}$ si et seulement si

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie lorsque h tend vers 0.

⇨ Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}$, son graphe admet une tangente d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Cette tangente est horizontale si et seulement si $f'(x_0) = 0$. Lorsque le taux d'accroissement de f en x_0 tend vers $\pm\infty$, le graphe de f admet une tangente verticale.

Définition 17.1.2

— On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est *dérivable à gauche* en $x_0 \in \mathcal{D}$ lorsque le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 par la gauche ; si tel est le cas, on note $f'_g(x_0)$ cette limite que l'on appelle nombre dérivé à gauche de f en x_0. La propriété « est dérivable à gauche en x_0 » est locale à gauche, au sens large, en x_0.

— On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est *dérivable à droite* en $x_0 \in \mathcal{D}$ lorsque le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 par la droite ; si tel est le cas, on note $f'_d(x_0)$ cette limite que l'on appelle nombre dérivé à droite de f en x_0. La propriété « est dérivable à droite en x_0 » est locale à droite, au sens large, en x_0.

Proposition 17.1.3

Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}$ si et seulement si les objets ci-dessous susceptibles d'avoir un sens

$$f'_g(x_0) \quad \text{et} \quad f'_d(x_0)$$

existent et sont égaux. Si tel est le cas, $f'(x_0)$ est cette valeur commune.

Exercice 1

⇨ Étudier la dérivabilité des fonctions d'expression

$$|x| \quad \text{et} \quad \frac{x}{1 + |x|}$$

en 0.

Proposition 17.1.4

Une fonction dérivable en un point est continue en ce point.

Remarque

⇨ La réciproque de cette proposition est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0.

Proposition 17.1.5

Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}$ si et seulement si elle y admet un développement limité à l'ordre 1. Si tel est le cas

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h).$$

Définition 17.1.6

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$.

— On dit que f est *dérivable* lorsqu'elle est dérivable en tout point de $\mathcal{D}$.

— Si A est une partie de $\mathcal{D}$, on dit que f est *dérivable sur* A lorsque la restriction de f à A est dérivable.

Remarque

⇨ Si A est une partie de $\mathcal{D}$ et que f est dérivable en tout point de A, alors f est dérivable sur A. Cependant la réciproque est fausse. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) := |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

Proposition 17.1.7

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur un domaine *élémentaire* et $\mathcal{D} = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ la décomposition de $\mathcal{D}$ en composantes connexes. Alors f est dérivable sur $\mathcal{D}$ si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f est dérivable sur I_k.

Remarque

⇨ Une fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ si et seulement si elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Proposition 17.1.8

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

— Si f est dérivable sur $I \cap \,]a, +\infty[$, elle est dérivable en tout point de $I \cap \,]a, +\infty[$. De plus, en notant g la restriction de f à $I \cap \,]a, +\infty[$, on a

$$\forall x \in I \cap \,]a, +\infty[\,, \quad f'(x) = g'(x).$$

— Si f est dérivable sur $I \cap [a, +\infty[$, elle est dérivable à droite en a et en tout point de $I \cap \,]a, +\infty[$. De plus, en notant g la restriction de f à $I \cap [a, +\infty[$, on a

$$f_d'(a) = g'(a) \quad \text{et} \quad \forall x \in I \cap \,]a, +\infty[\,, \quad f'(x) = g'(x).$$

Exercice 2

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{a}{1+bx} & \text{si } x < 0 \\ \mathrm{e}^x \cos x & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

17.1.2 Théorèmes usuels

Proposition 17.1.9

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ deux fonctions dérivables en x_0.

— Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en x_0 et

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0).$$

— fg est dérivable en x_0 et

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0).$$

— Si $f(x_0) \neq 0$, alors f ne s'annule pas au voisinage de x_0 et $1/f$ est dérivable en x_0. De plus

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

— Si $g(x_0) \neq 0$, alors g ne s'annule pas au voisinage de x_0 et f/g est dérivable en x_0. De plus

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Proposition 17.1.10

Soit f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Exercice 3

⇨ Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{x+2}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

Proposition 17.1.11

Soit f une bijection continue d'un intervalle I sur un intervalle J et $y_0 \in J$. Si f est dérivable en $x_0 = f^{-1}(y_0)$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$. De plus, si tel est le cas

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)} \\ &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}.\end{aligned}$$

Proposition 17.1.12

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$.

— Alors $\overline{f}$ est dérivable en x_0 si et seulement si f l'est. De plus, si tel est le cas

$$\overline{f}\,'(x_0) = \overline{f'(x_0)}.$$

— De même, f est dérivable en x_0 si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. De plus, si tel est le cas

$$f'(x_0) = \mathrm{Re}(f)'(x_0) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)'(x_0).$$

— Enfin, si f est dérivable en x_0, il en est de même pour e^f et

$$\left(\mathrm{e}^f\right)'(x_0) = f'(x_0)\, \mathrm{e}^{f(x_0)}$$

17.1.3 Fonction dérivée, dérivées successives

Définition 17.1.13

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ une fonction. On note $\mathcal{D}_{f'}$ l'ensemble des $x \in \mathcal{D}$ en lesquels f est dérivable. On définit la *fonction dérivée* de f, notée f', par

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{f'} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}.$$

Définition 17.1.14

Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est une fonction, on définit par récurrence la *dérivée n-ième* de f de la manière suivante :

— On pose $f^{(0)} := f$.

— Si $n \in \mathbb{N}$, on définit $f^{(n+1)}$ comme étant la dérivée de $f^{(n)}$.

Si $x_0 \in \mathcal{D}$, on dit que f est dérivable n fois en x_0 lorsque $f^{(n)}$ est définie en x_0 ; cette notion est locale en x_0.

Remarques

⇨ On dit qu'une fonction est dérivable n fois lorsqu'elle est dérivable n fois en tout point de son domaine de définition.

⇨ Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$, et $A \subset \mathcal{D}$. On dit que f est dérivable n fois sur A lorsque la restriction de f à A est dérivable n fois.

Proposition 17.1.15

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ deux fonctions dérivables n fois.

— Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable n fois et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x).$$

— fg est dérivable n fois et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Cette formule est appelée formule de Leibniz.

— Si g ne s'annule pas, alors f/g est dérivable n fois.

Proposition 17.1.16

Si f et g sont deux fonctions dérivables n fois, alors $g \circ f$ est dérivable n fois.

Remarque

⇨ Si $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est dérivable n fois, alors la fonction $g : x \mapsto f(ax)$ est dérivable n fois et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax).$$

Exercices 4

⇨ Donner la dérivée n-ième des fonctions $x \mapsto x^2 f(x)$ et $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^x$.

⇨ Calculer la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto \cos^3 x$.

⇨ Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est bornée.

Proposition 17.1.17

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J, dérivable n fois sur I. Alors f^{-1} est dérivable n fois sur J si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad f'(x) \neq 0.$$

17.1.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 17.1.18

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ lorsqu'elle est dérivable n fois et sa dérivée n-ième est continue. On note $\mathcal{C}^n(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^n$.

Remarques

⇨ Les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ sont les fonctions continues.

⇨ Une fonction peut être dérivable sur $\mathbb{R}$ sans que sa dérivée soit continue. Par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'est pas continue en 0.

⇨ Si on note $\mathcal{D}^n$ l'ensemble des fonctions dérivables n fois, on a

$$\mathcal{C}^0 \supset \mathcal{D}^1 \supset \mathcal{C}^1 \supset \mathcal{D}^2 \supset \mathcal{C}^2 \cdots$$

On peut montrer que toutes ces inclusions sont strictes.

⇨ Si A est une partie de $\mathcal{D}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur A lorsque la restriction de f à A est de classe $\mathcal{C}^n$.

Exercice 5

⇨ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 17.1.19

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques

⇨ Une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si elle est dérivable n fois quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

⇨ Les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le domaine sur lequel elle sont dérivables.

Proposition 17.1.20

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.
- Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$.
- fg est de classe $\mathcal{C}^n$.
- Si g ne s'annule pas, alors f/g est de classe $\mathcal{C}^n$.

Proposition 17.1.21

Si $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

Définition 17.1.22

Soit f une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On dit que f est un $\mathcal{C}^n$-*difféomorphisme* de I sur J lorsque f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^n$.

Proposition 17.1.23

Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Une bijection f de classe $\mathcal{C}^n$ de l'intervalle I sur l'intervalle J est un $\mathcal{C}^n$-difféomorphisme si et seulement si f' ne s'annule pas.

Exercices 6

⇨ Soit f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à x associe xe^x. Montrer que f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme. Calculer un développement limité de f^{-1} en 0 à l'ordre 3.

⇨ Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^5(x) + f(x) + x = 0.$$

17.2 Théorème de Rolle et applications

17.2.1 Extrémum local

Définition 17.2.1

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $x_0 \in \mathcal{D}$. On dit que

— f présente un *maximum global* en x_0 lorsque

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

— f présente un *maximum local* en x_0 lorsque

$$\exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant f(x_0).$$

— f présente un *minimum global* en x_0 lorsque

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

— f présente un *minimum local* en x_0 lorsque

$$\exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant f(x_0).$$

Remarque

⇨ On peut indifféremment utiliser « maximums » ou « maxima » pour le pluriel de « maximum ». De même, on peut utiliser « minimums » ou « minima » pour le pluriel de « minimum ».

Exercice 7

⇨ Rechercher les extrémums de la fonction d'expression $|x(x-1)|$ sur $[0, 2]$.

Proposition 17.2.2

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un extrémum local en un point x_0 intérieur à $\mathcal{D}$. Si elle est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques

⇨ Attention, ce n'est pas parce que f' s'annule en x_0 que f y admet un extrémum local. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ a une dérivée qui s'annule en 0 mais n'admet pas d'extrémum local en ce point.

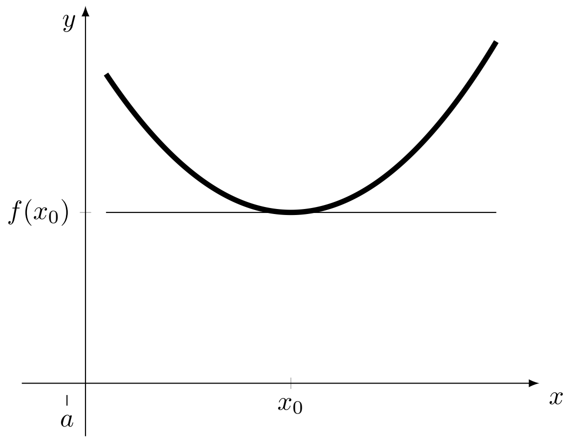
⇨ Les extrémums locaux d'une fonction f définie sur $\mathcal{D}$ sont donc à chercher parmi les bornes de $\mathcal{D}$, les points où f n'est pas dérivable et ceux où la dérivée de f est nulle.

⇨ Si $f'(x_0) = 0$ et f est assez régulière, un développement limité permet généralement de déterminer si f admet un maximum ou un minimum local en x_0. En effet, supposons que

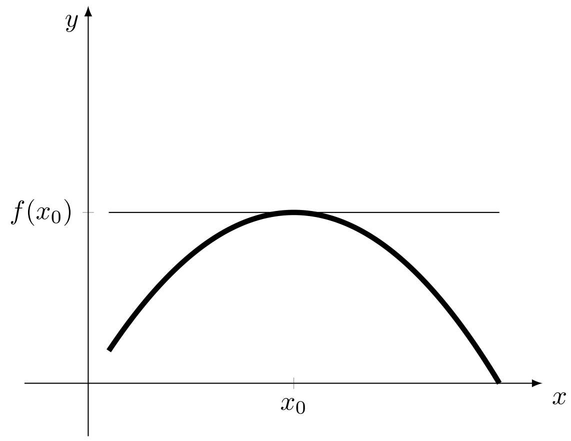
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h^\omega + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^\omega)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\omega \geqslant 2$.

— Supposons que ω est pair. Si $\alpha > 0$, alors f admet un minimum local en x_0. Si $\alpha < 0$, alors f admet un maximum local en x_0.

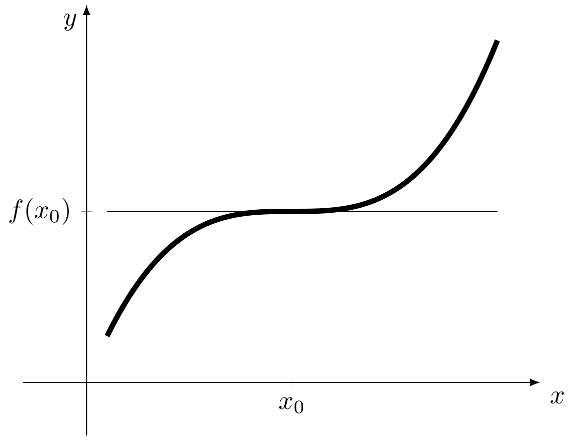


$\alpha > 0$ et ω pair



$\alpha < 0$ et ω pair

— Si ω est impair et que x_0 est intérieur à $\mathcal{D}$, f n'admet pas d'extrémum local en x_0.



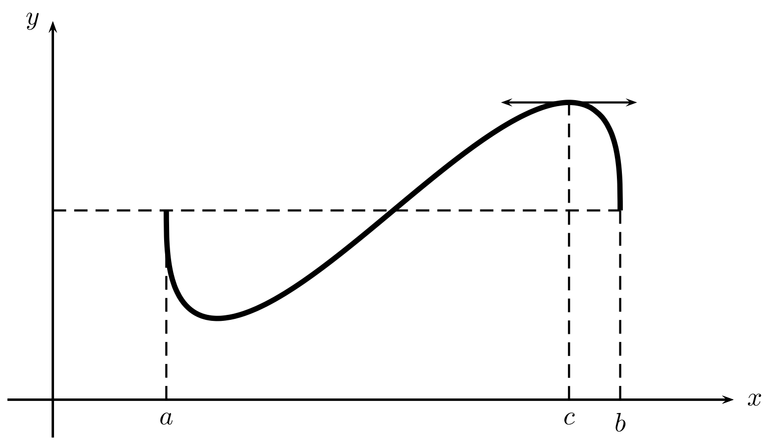
$\alpha > 0$ et ω impair

17.2.2 Théorème de Rolle, accroissements finis

Dans cette section, lorsqu'on considèrera un segment $[a, b]$, on supposera que $a < b$.

Théorème 17.2.3: Théorème de Rolle

Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Exercice 8

⇨ Soit f une fonction dérivable n fois sur l'intervalle I admettant $n+1$ zéros. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I. Retrouver le fait qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n admet au plus n racines réelles.

Remarque

⇨ Cette proposition est fausse si f est à valeurs complexes. Par exemple, si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

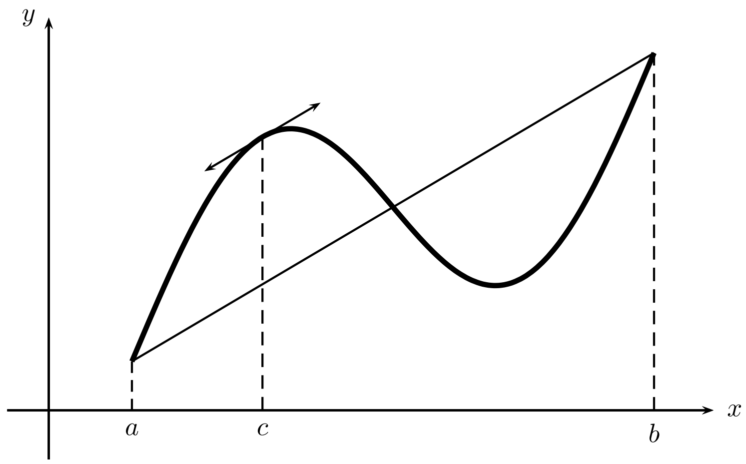
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f(0) = f(2\pi)$ mais f' ne s'annule pas.

Théorème 17.2.4: Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Remarque

⇨ Remarquons que le taux d'accroissement $(f(b) - f(a))/(b - a)$ est une grandeur invariante par échange de a et b. Par conséquent, si f est dérivable sur I, quels que soient $a, b \in I$ tels que $a \neq b$, il existe c strictement compris entre a et b tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

⇨ Puisque c est strictement compris entre a et b, il arrive qu'on l'écrive sous la forme

$$c = \theta a + (1 - \theta) b$$

avec $\theta \in]0, 1[$.

Proposition 17.2.5: Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in]a, b[\,, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M.$$

Alors

$$m\,(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M\,(b - a)\,.$$

Proposition 17.2.6: Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant M.$$

Alors

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x - y|\,.$$

Autrement dit, f est M-lipschitzienne.

Remarque

⇨ Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment est lipschitzienne.

17.2.3 Dérivation et monotonie

Proposition 17.2.7

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Alors

— f est croissante si et seulement si
$$\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0.$$
— f est décroissante si et seulement si
$$\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0.$$

Remarque

⇨ Ce théorème reste vrai lorsque f est continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I et que sa dérivée y est de signe constant. Par exemple, si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$\forall x > 0, \quad f'(x) \geqslant 0$$
alors f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercices 9

⇨ Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) := \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}.$$
⇨ Calculer
$$\inf_{x,y>0} \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

Proposition 17.2.8

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante si et seulement si
$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 0.$$

Exercice 10

⇨ Soit $\alpha > 0$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ définie sur un intervalle I est α-Hölderienne lorsqu'il existe $C \geqslant 0$ tel que
$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x-y|^{\alpha}.$$
Montrer que si $\alpha > 1$, alors f est constante.

Proposition 17.2.9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Alors f est strictement croissante si et seulement si

— $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0,$
— Il n'existe pas d'intervalle non trivial sur lequel f' est nulle.

Remarques

⇨ On rappelle qu'un intervalle non trivial est un intervalle qui contient au moins deux points.

⇨ Rappelons au passage qu'une fonction croissante qui n'est pas strictement croissante est constante sur un intervalle non trivial.

17.2.4 Théorème de la limite de la dérivée

Proposition 17.2.10

— Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et que
$$f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}]{} l \in \mathbb{K}.$$
Alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.

— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et que
$$f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}]{} \pm\infty.$$
Alors
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} \pm\infty.$$
Autrement dit, le graphe de f admet une demi-tangente verticale en x_0. En particulier, la fonction f n'est pas dérivable en x_0.

Exercices 11

⇨ Montrer que
$$\frac{\operatorname{Arcsin}(-1+h) + \frac{\pi}{2}}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} +\infty$$

⇨ Soit $f :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

17.3 Convexité

17.3.1 Définition, propriétés élémentaires

Proposition 17.3.1

Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Alors
$$« \ [x_1, x_2] \ » = \{tx_1 + (1-t)x_2 : t \in [0,1]\}.$$

Remarques

⇨ On en déduit qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si
$$\forall x, y \in I, \quad \forall t \in [0,1], \quad tx + (1-t)y \in I.$$

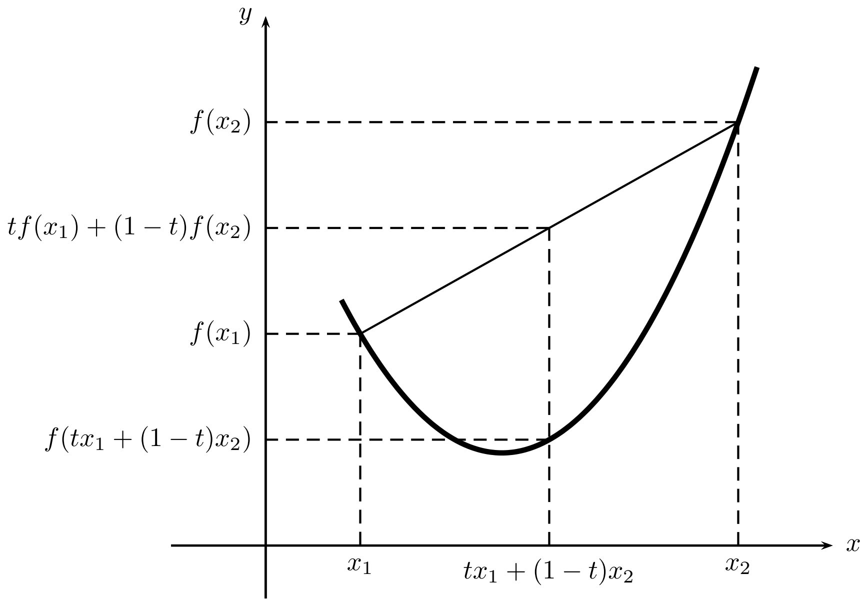
⇨ On dit qu'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est *affine* lorsqu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = ax + b.$$
Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est affine, alors
$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad \forall t \in [0,1], \quad \varphi(tx_1 + (1-t)x_2) = t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2).$$

⇨ Si I est un intervalle
$$\forall x_1, \ldots, x_n \in I, \quad \forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+, \quad t_1 + \cdots + t_n = 1 \quad \Longrightarrow \quad t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \in I.$$

Définition 17.3.2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle I. On dit que f est *convexe* lorsque

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad \forall t \in [0,1], \quad f\left(tx_1 + (1-t)\,x_2\right) \leqslant tf\left(x_1\right) + (1-t)\,f\left(x_2\right).$$



Remarques

⇨ Les fonctions affines sont convexes.

⇨ Une combinaison linéaire positive de fonctions convexes est convexe. Cependant, si f est une fonction convexe, en général, $-f$ ne l'est pas.

Exercice 12

⇨ Montrer que les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

Proposition 17.3.3: Inégalité de Jensen

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un intervalle I. Alors

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in I, \quad \forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+,$$

$$t_1 + \cdots + t_n = 1 \quad \Longrightarrow \quad f\left(t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n\right) \leqslant t_1 f\left(x_1\right) + \cdots + t_n f\left(x_n\right).$$

17.3.2 Convexité et dérivation

Proposition 17.3.4: Lemme des 3 pentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

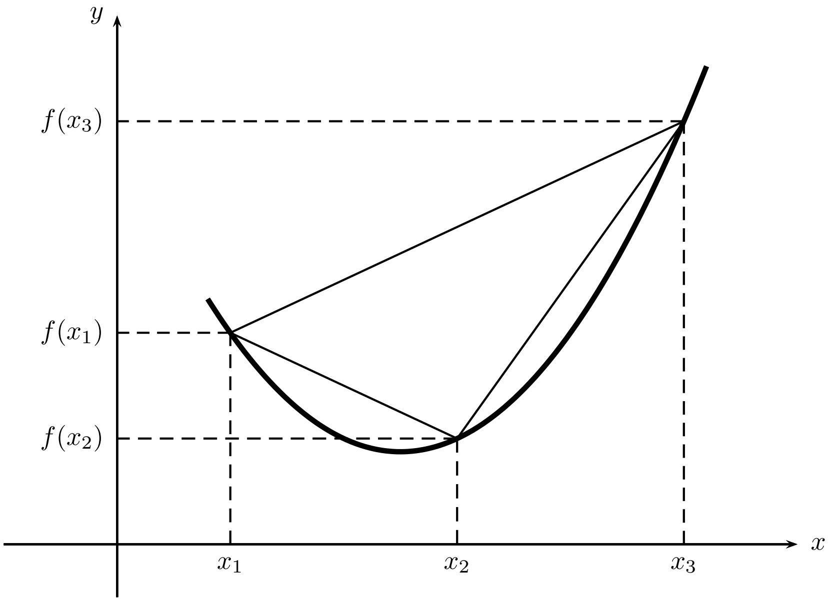
— Si f est convexe, quels que soient $x_1, x_2, x_3 \in I$ tels que $x_1 < x_2 < x_3$, on a

$$\frac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f\left(x_3\right) - f\left(x_1\right)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f\left(x_3\right) - f\left(x_2\right)}{x_3 - x_2}.$$

— Réciproquement, si quels que soient $x_1, x_2, x_3 \in I$ tels que $x_1 < x_2 < x_3$, on a

$$\frac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f\left(x_3\right) - f\left(x_2\right)}{x_3 - x_2},$$

alors f est convexe.



Exercice 13

⇨ Montrer que sur $\mathbb{R}$, une fonction convexe majorée est constante.

Proposition 17.3.5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Alors f est convexe si et seulement si, pour tout $x_0 \in I$, la fonction

$$\tau_{x_0} : \begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array}$$

est croissante.

Proposition 17.3.6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
- Alors f est dérivable à gauche et à droite en tout point intérieur à I.
- En particulier, f est continue en tout point intérieur à I.

Remarque

⇨ Remarquons qu'une fonction convexe peut très bien ne pas être dérivable en un point intérieur à I comme le montre l'exemple de la valeur absolue en 0. De même, une fonction convexe peut être discontinue aux bornes de son intervalle de définition comme le montre l'exemple de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Proposition 17.3.7

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un intervalle I. Si $x_0 \in I$ est un point en lequel f est dérivable, alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Autrement dit, le graphe de f est au-dessus de ses tangentes.

Proposition 17.3.8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Proposition 17.3.9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors f est convexe si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad f''(x) \geqslant 0.$$

Remarques

- La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto 1/x$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On dit qu'une fonction réelle définie sur un intervalle I est *concave* lorsque

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad \forall t \in [0,1], \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \geqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Une fonction f est concave si et seulement si $-f$ est convexe. On en déduit que toutes les propositions énoncées pour les fonctions convexes ont leur équivalent pour les fonctions concaves. En particulier, les fonctions concaves sont en dessous de leur tangentes et une fonction deux fois dérivable sur un intervalle est concave si et seulement si sa dérivée seconde est négative.

Exercices 14

- Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x, \qquad \forall x \in \left]-1, +\infty\right[, \quad \ln(1+x) \leqslant x$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi} \cdot x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

- Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

C'est l'inégalité arithmético-géométrique qui se démontre facilement pour $n = 2$.

17.4 Exercices

Fonction dérivable, dérivées successives

Définition

Exercice 1 : Dérivabilité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Que vaut

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a+h^2)}{h}.$$

Exercice 2 : Dérivabilité

1. Étudier la dérivabilité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

2. Donner le domaine de dérivabilité de la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) \coloneqq \frac{|x|}{1 + |x^2 - 1|}.$$

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \coloneqq \begin{cases} ax^3 + bx + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Suite

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$. Déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général

$$u_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Théorèmes usuels

Exercice 4 : Dérivabilité et symétries

1. Montrer que la dérivée d'une fonction dérivable paire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire.
2. Que dire de la dérivée d'une fonction dérivable impaire ? périodique ?

Fonction dérivée, dérivées successives

Exercice 5 : Calcul de dérivées n-ièmes

Calculer les dérivées à l'ordre n des fonctions d'expressions

$$\sin^5(x), \qquad x^2 \mathrm{e}^x, \qquad x^{n-1}\ln(x), \qquad x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Exercice 6 : Dérivabilité

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_α définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) \coloneqq \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Préciser les nombres α pour lesquels f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 : Dérivabilité

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad f_n(x) := \frac{\sin\left((2n+1)\,x\right)}{\sin x}.$$

1. Étudier le domaine de définition de f_n, sa parité, sa périodicité.
2. Montrer que f_n se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On pourra pour cela établir une relation entre f_{n+1} et f_n.

Exercice 8 : Dérivabilité

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et $a \in [0,1]$.

1. Montrer que la fonction

$$\tau_a : \begin{array}{ccc} [0,1] \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

   se prolonge par continuité en a.
2. Montrer que la fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Théorème de Rolle et applications

Extrémum local

Exercice 9 : Théorème de Darboux

Le but de cet exercice est de montrer que toute fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, alors que l'on sait bien qu'elle peut ne pas être continue. On se donne donc f une fonction dérivable sur un intervalle I, $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $y_0 \in$ « $[f'(a), f'(b)]$ ». On souhaite montrer qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f'(x_0) = y_0$.

1. Résoudre le problème lorsque $y_0 = 0$.
2. En déduire le cas général.

Exercice 10 : Théorème de la corde

Soit f une fonction continue et dérivable sur $[0,1]$ telle que

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad \text{et} \quad f'(1) = 0.$$

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

1. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que g est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$.
2. En remarquant que $g'(1) < 0$, montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $g'(c) = 0$ puis conclure.

Théorème de Rolle, accroissements finis

Exercice 11 : Application directe du théorème de Rolle

1. Soit f une fonction dérivable n fois sur un intervalle I. On suppose que f admet $n+1$ zéros distincts dans I. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est 1-périodique et admet n zéros sur l'intervalle $[0,1[$. Montrer que f' admet n zéros sur ce même intervalle.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Majorer le nombre de zéros de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) := P(x) - \ln x.$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction P_n sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) := \left(x^2 - 1\right)^n.$$
Montrer que $P_n^{(n)}$ admet n racines distinctes dans $]-1, 1[$.

Exercice 12 : Application récursive du théorème de Rolle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) := x^n \cos x.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f^{(k)}(0) = 0$.
2. En déduire qu'il existe $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 13 : Accroissements finis généralisés

Soit f et g deux fonctions réelles, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Exercice 14 : Taylor

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $a \in I$. Soit $x \in I$ distinct de a.

1. Montrer qu'il existe un unique réel A tel que la fonction
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(x) - \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + \frac{A}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\right] \end{array}$$
s'annule en a.

Dans la suite de l'exercice, A sera égal à cette valeur.

2. Montrer que φ est dérivable et simplifier $\varphi'(t)$.
3. En déduire qu'il existe $c \in I$ tel que
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$
Pourquoi est-ce encore vrai si $x = a$?
4. En déduire que s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$$
alors
$$\forall a, x \in I, \quad \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}\left|x-a\right|^{n+1}.$$

Dérivation et monotonie

Théorème de la limite de la dérivée

Exercice 15 : Une équation différentielle non linéaire

Rechercher les solutions réelles de l'équation différentielle $y' = |y|$.

Théorème de la limite de la dérivée

Exercice 16 : Limite de la dérivée

1. Quelle est la dérivée de $x \mapsto \ln|x|$ sur $\mathbb{R}^*$?
2. Montrer que la fonction
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \ln|x| \end{array}$$
est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 17 : Limite de la dérivée

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ une fonction telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que
$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = g\left(x^2\right).$$

Exercice 18 : Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} 0.$$
3. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Convexité

Définition, propriétés élémentaires

Exercice 19 : Intervalle

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Montrer que
$$I + J \coloneqq \{x + y : x \in I \quad \text{et} \quad y \in J\}$$
est un intervalle.

Exercice 20 : Opérations élémentaires sur les fonctions convexes

1. Étant donné une fonction f convexe sur $\mathbb{R}$ et une fonction g convexe et croissante sur $\mathbb{R}$, montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs strictement positives. Montrer que si $\ln(f)$ est convexe, alors f est convexe.

Exercice 21 : Bijection réciproque

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective convexe. Que dire de f^{-1} ?

Convexité et dérivation

Exercice 22 : Inégalités en vrac

1. Donner deux méthodes différentes pour montrer que quel que soit le réel x
$$e^x \geqslant 2e^{\frac{x}{2}} - 1.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0.$$
3. Soit $x \in]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$x^n - 1 \geqslant n\left(x^{\frac{n+1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

Exercice 23 : Fonctions convexes majorées

1. Soit f une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.
2. Donner un exemple de fonction convexe et majorée sur $]0,+\infty[$ et qui ne soit pas constante.

Exercice 24 : Moyenne arithmétique, harmonique et géométrique

Soit $x_1,\ldots,x_n$ n réels strictement positifs. On définit leurs moyennes arithmétique, géométrique et harmonique par

$$a \coloneqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad g \coloneqq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k},$$

$$\frac{1}{h} \coloneqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}.$$

Montrer que

$$h \leqslant g \leqslant a.$$

Exercice 25 : Inégalités de Hölder et Minkowski

Soit p et q deux réels strictement supérieurs à 1 tels que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Soit $x_1,\ldots,x_n$ et $y_1,\ldots,y_n$ des réels positifs.

1. Le but de cette question est de montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

   (a) Montrer que

$$\forall x,y\in\mathbb{R}_+, \quad xy \leqslant \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}.$$

   (b) Montrer le résultat demandé lorsque

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^p = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} y_k^q = 1.$$

   (c) En déduire le cas général
2. Montrer que

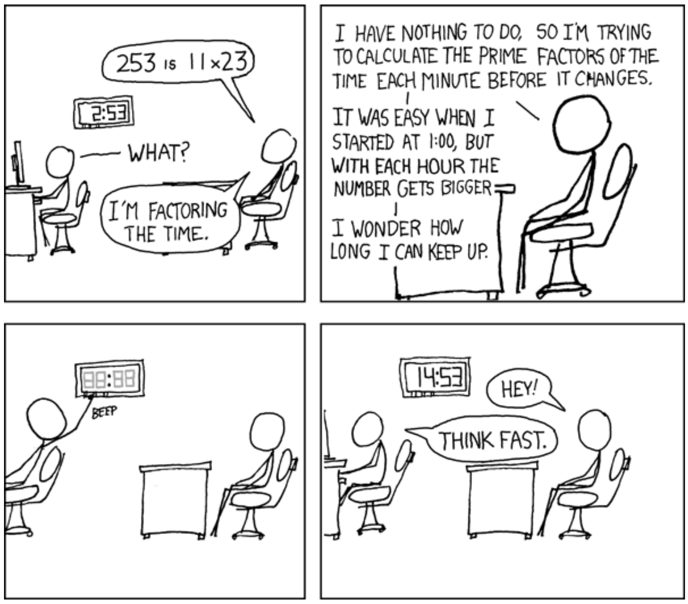
$$\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Chapitre 18

Arithmétique

« La Mathématique est la reine des sciences et l'Arithmétique est la reine des mathématiques. »

— Carl Friedrich Gauss (1777–1855)



18.1 Divisibilité, division euclidienne

18.1.1 Relation de divisibilité

Définition 18.1.1

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a *divise* b lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$.

Remarques

- Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a|b$. Alors $-a|b$, $a|-b$ et $-a|-b$. Autrement dit, lorsqu'on parle de divisibilité, le signe n'est pas significatif.
- Soit $a \in \mathbb{Z}$. Alors $a|1$ si et seulement si $a = \pm 1$.
- Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si $ac|bc$ et $c \neq 0$, alors $a|b$

Proposition 18.1.2

La relation de divisibilité

- est réflexive : $\forall a \in \mathbb{Z}, \quad a|a$.
- est transitive : $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad [a|b \quad \text{et} \quad b|c] \quad \Longrightarrow \quad a|c$.
- n'est pas antisymétrique. Cependant

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad [a|b \quad \text{et} \quad b|a] \quad \Longleftrightarrow \quad a = \pm b.$$

Remarques

- La relation de divisibilité n'étant pas antisymétrique sur $\mathbb{Z}$, ce n'est pas une relation d'ordre. Cependant, si $a, b \in \mathbb{N}$, on a
$$[a|b \quad \text{et} \quad b|a] \quad \Longleftrightarrow \quad a = b.$$
En particulier, la relation de divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.
- Quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, $1|n$ et $n|0$. En particulier, pour la relation de divisibilité, $\mathbb{N}$ admet 1 pour plus petit élément et 0 pour plus grand élément.
- Soit $a, b \in \mathbb{N}$. Si $a|b$ et $b \neq 0$, alors $a \leqslant b$.

Proposition 18.1.3

Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Alors

$$[a|b \quad \text{et} \quad a|c] \quad \Longrightarrow \quad a|\left(k_1 b + k_2 c\right).$$

Exercices 1

- Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?
  - Si a divise $b + c$, alors a divise b et c.
  - Si a et b divisent c, alors ab divise c.
- Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $n|n + 8$.

18.1.2 Congruence, division euclidienne

Définition 18.1.4

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est *congru* à b modulo m et on note

$$a \equiv b \quad [m]$$

lorsque $m|(a - b)$, c'est-à-dire lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + km$.

Remarque

- Si $m \in \mathbb{N}^*$, la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a \mathcal{R} b \quad \Longleftrightarrow \quad a \equiv b \; [m]$$

est une relation d'équivalence.

Proposition 18.1.5

Soit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$a_1 \equiv b_1 \quad [m] \quad \text{et} \quad a_2 \equiv b_2 \quad [m].$$

Alors, si $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 \equiv k_1 b_1 + k_2 b_2 \quad [m] \qquad a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \quad [m] \qquad \text{et} \qquad a_1^k \equiv b_1^k \quad [m].$$

Remarque

- Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors $a \equiv b\ [m] \iff an \equiv bn\ [mn]$.

Exercices 2

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 11 divise $3^{n+3} - 4^{4n+2}$.
- Trouver les $n \in \mathbb{N}$ tels que $10^n + 5^n + 1$ est un multiple de 3.
- Montrer qu'un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3. De même, montrer qu'un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9. Enfin, montrer qu'un nombre est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11.

Proposition 18.1.6

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$a = qb + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < b.$$

q est appelé *quotient* de la division euclidienne de a par b, r son *reste*.

Remarques

- Si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, le reste de la division euclidienne de a par b est l'unique élément r de $[\![0, b-1]\!]$ tel que $a \equiv r\ [b]$.
- Les langages Python et OCaml possèdent tous les deux une division entière et un opérateur « modulo ». Si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, la division entière s'obtient avec `a // b` en Python et avec `a / b` en OCaml. L'opérateur « modulo » s'obtient quant à lui avec `a % b` en Python et `a mod b` en OCaml. Si on note q la division entière de a par b et r le résultat de l'opérateur modulo, on aura toujours $a = qb + r$. En Python, ce sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b. C'est aussi le cas en OCaml lorsque $a \geqslant 0$. Cependant, lorsque $a < 0$, ce n'est plus le cas. Par exemple, la division entière de -7 par 2 renvoie -3 alors que le quotient de la division euclidienne de -7 par 2 est -4.
- Si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, on montre qu'il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = qb + r$ et $0 \leqslant r < |b|$. On peut donc ainsi étendre la définition de la division euclidienne au cas où $b \in \mathbb{Z}^*$. Mais en pratique, on effectuera toujours des divisions euclidiennes par des entiers strictement positifs.

Exercice 3

- Déterminer le reste de la division euclidienne de 4852^{203} par 5.

18.2 Pgcd, ppcm

18.2.1 Plus grand commun diviseur

Définition 18.2.1

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Il existe un unique entier positif p tel que
- $p|a$ et $p|b$
- $\forall q \in \mathbb{Z}, \quad [q|a \text{ et } q|b] \Longrightarrow q|p$

On l'appelle pgcd (*plus grand commun diviseur*) de a et de b et on le note $\operatorname{pgcd}(a, b)$ ou $a \wedge b$.

Remarques

- Si $a, b \in \mathbb{Z}$, les diviseurs de a et de b sont les diviseurs de $a \wedge b$.

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{N}$. Pour la relation d'ordre de divisibilité sur $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de a et de b n'est rien d'autre que l'ensemble des minorants de $\{a, b\}$. La définition précédente montre donc que cet ensemble admet un plus grand élément (au sens de la divisibilité) qui est $a \wedge b$. Autrement dit, au sens de la divisibilité, l'ensemble $\{a, b\}$ admet une borne inférieure qui est $a \wedge b$.

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{N}$. Si l'un des deux entiers est non nul, le pgcd de a et de b est le plus grand (au sens de l'ordre) diviseur commun de a et b.

Proposition 18.2.2

$$\begin{aligned}
\forall a \in \mathbb{Z}, &\quad a \wedge 0 = |a| \\
\forall a \in \mathbb{Z}, &\quad a \wedge 1 = 1 \\
\forall a, b \in \mathbb{Z}, &\quad a \wedge b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad [a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0]
\end{aligned}$$

Proposition 18.2.3

$$\begin{aligned}
\forall a, b \in \mathbb{Z}, &\quad a \wedge b = b \wedge a \\
\forall a, b \in \mathbb{Z}, &\quad a \wedge b = (-a) \wedge b = a \wedge (-b) = (-a) \wedge (-b) = |a| \wedge |b| \\
\forall a, b, k \in \mathbb{Z}, &\quad (ka) \wedge (kb) = |k| \, (a \wedge b)
\end{aligned}$$

Définition 18.2.4

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Il existe un unique entier positif p tel que
— $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad p | a_i$
— $\forall q \in \mathbb{Z}, \quad [\forall i \in [\![1, n]\!], \quad q | a_i] \Longrightarrow q | p$

On l'appelle pgcd (plus grand commun diviseur) de la famille $(a_1, \ldots, a_n)$ et on le note $\operatorname{pgcd}(a_1, \ldots, a_n)$ ou $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$.

Remarque

⇨ Le pgcd d'une famille d'entiers $(a_1, \ldots, a_n)$ ne dépend pas de l'ordre de ces derniers.

Proposition 18.2.5

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$. Alors

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = (a_1 \wedge \cdots \wedge a_p) \wedge (a_{p+1} \wedge \cdots \wedge a_n).$$

18.2.2 Algorithme d'Euclide

Proposition 18.2.6

Soit $a, b, k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$a \wedge b = a \wedge (b + ka) = (a + kb) \wedge b.$$

En particulier, si $b \in \mathbb{N}^*$ et r est le reste de la division euclidienne de a par b, on a

$$a \wedge b = b \wedge r.$$

Exercices 4

⇨ Calculer $105 \wedge 147$.

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $(3n+1) \wedge (2n)$, puis $(n^4 - 1) \wedge (n^6 - 1)$.

⇨ Soit (F_n) la suite, appelée suite de Fibonacci, définie par

$$F_0 \coloneqq 0, \quad F_1 \coloneqq 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} \coloneqq F_{n+1} + F_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \wedge F_{n+1} = 1$.

Remarque

⇨ Si $a, b \in \mathbb{N}$, l'algorithme suivant, appelé algorithme d'Euclide, calcule le pgcd de a et b.

```
def pgcd(a, b):
    """pgcd(a: int, b: int) -> int"""
    while b != 0:
        a, b = b, a % b
    return a
```

18.2.3 Relation de Bézout

Proposition 18.2.7

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$ua + vb = a \wedge b.$$

Exercices 5

⇨ Trouver une relation de Bézout pour 105 et 147.

⇨ Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_{n\wedge m}.$$

Définition 18.2.8

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a et b sont *premiers entre eux* lorsque $a \wedge b = 1$.

Remarque

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Puisque $a \wedge b$ est un diviseur commun à a et b, il existe $a', b' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = a'(a \wedge b)$ et $b = b'(a \wedge b)$. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors a' et b' sont premiers entre eux.

Exercice 6

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers premiers entre eux. Calculer $(a - b) \wedge (a + b)$.

Proposition 18.2.9

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$ua + vb = 1.$$

Exercice 7

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans le groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$ et on pose $\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Montrer que si $k \in \mathbb{Z}$, le groupe engendré par ω^k est égal à $\mathbb{U}_n$ si et seulement si k et n sont premiers entre eux.

Proposition 18.2.10

— Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$. Alors $a \wedge (bc) = 1$.

— Plus généralement, si $a \in \mathbb{Z}$ est premier avec chaque élément d'une famille d'entiers $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}$, alors a est premier avec leur produit.

— Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers premiers entre eux et $m, n \in \mathbb{N}$. Alors $a^m \wedge b^n = 1$.

Exercices 8

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers premiers entre eux. Montrer que $a + b$ et ab sont premiers entre eux.

⇨ Résoudre sur $\mathbb{Z}$ l'équation $2n \equiv 7\ [9]$.

Définition 18.2.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que $a \in \mathbb{Z}$ est inversible modulo n lorsqu'il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $ab \equiv 1\ [n]$.

Proposition 18.2.12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $a \in \mathbb{Z}$ est inversible modulo n si et seulement si $a \wedge n = 1$.

Proposition 18.2.13

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Alors il existe $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$u_1 a_1 + \cdots + u_n a_n = a_1 \wedge \ldots \wedge a_n.$$

Définition 18.2.14

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$.

— On dit que $a_1, \dots, a_n$ sont *deux à deux premiers entre eux* lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad i \neq j \Longrightarrow a_i \wedge a_j = 1.$$

— On dit que $a_1, \dots, a_n$ sont *premiers entre eux dans leur ensemble* lorsque

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = 1.$$

Remarque

⇨ Si les entiers $a_1, \dots, a_n$ sont deux à deux premiers entre eux, alors ils sont premiers entre eux dans leur ensemble. Cependant, la réciproque est fausse. Par exemple, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ et $a_3 = 6$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, mais ne sont pas deux à deux premiers entre eux.

Proposition 18.2.15

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Alors $a_1, \dots, a_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement si il existe $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$u_1 a_1 + \cdots + u_n a_n = 1.$$

Exercice 9

⇨ Trouver les solutions entières de l'équation

$$a^2 + b^2 = 3c^2.$$

18.2.4 Lemme de Gauss

Théorème 18.2.16

Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Alors

$$[a | bc \quad \text{et} \quad a \wedge b = 1] \quad \Longrightarrow \quad a | c.$$

Exercices 10

⇨ Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge c = 1$. Montrer que

$$(ab) \wedge c = b \wedge c.$$

⇨ Résoudre l'équation $105u + 147v = 21$ dans $\mathbb{Z}$.

⇨ Trois comètes passent régulièrement dans le ciel Shadok. La première, la comète Gabu, passe tous les 10 jours depuis le deuxième jour d'existence de leur planète. La seconde, la comète Zomeu passe tous les 21 jours depuis le cinquième jour d'existence de leur planète. Enfin, la comète Gibi passe tous les 6 jours depuis le troisième jour d'existence de leur planète. Est-il possible d'admirer les comètes Gabu et Zomeu le même jour dans le ciel Shadok ? Si oui, lesquels ? Même question pour les comètes Gabu et Gibi.

⇨ Soit $(G, \star)$ un groupe et $x \in G$ un élément d'ordre fini $n \in \mathbb{N}^*$. Étant donné $k \in \mathbb{Z}$, calculer l'ordre de x^k.

Remarque

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. On cherche les solutions entières de l'équation

$$(E) \qquad ua + vb = c$$

— Si $a \wedge b$ ne divise pas c, il n'y a aucune solution.

— Sinon, il existe $c' \in \mathbb{Z}$ tel que $c = c'(a \wedge b)$. En utilisant l'algorithme d'Euclide, on trouve $u_0', v_0' \in \mathbb{Z}$ tels que $u_0' a + v_0' b = a \wedge b$. On a donc $(c' u_0') a + (c' v_0') b = c$ ce qui nous donne une solution particulière à l'équation (E).

Soit $a', b' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = a'(a \wedge b)$ et $b = b'(a \wedge b)$. Alors a' et b' sont premiers entre eux. On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall u, v \in \mathbb{Z} \quad ua + vb = c \quad &\iff \quad ua + vb = (c'u'_0)a + (c'v'_0)b \\
&\iff \quad (u - c'u'_0)a = (c'v'_0 - v)b \\
&\iff \quad (u - c'u'_0)a' = (c'v'_0 - v)b' \quad (E')
\end{aligned}$$

Si le couple (u, v) est solution de (E'), on en déduit que b' divise $(u - c'u'_0)a'$. Or a' et b' sont premiers entre eux, donc d'après le lemme de Gauss, b' divise $u - c'u'_0$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $u = c'u'_0 + kb'$. En reportant cette égalité dans (E'), on trouve $v = c'v'_0 - ka'$. Réciproquement, on vérifie que de tels u et v sont bien solution de (E'). L'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\mathcal{S} = \{(c'u'_0 + kb', c'v'_0 - ka') \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Proposition 18.2.17

Soit $r \in \mathbb{Q}$.

— Alors, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$r = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad a \wedge b = 1.$$

Cette écriture est appelée *forme irréductible* de r.

— De plus, si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, $r = p/q$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $p = ka$ et $q = kb$.

Remarque

⇨ Si $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ est un polynôme à coefficients entiers et $r = p/q$ est une racine rationnelle de P, mise sous forme irréductible, alors $q | a_n$ et $p | a_0$. On a ainsi un moyen de trouver toutes les racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers.

Exercices 11

⇨ Rechercher les racines rationnelles de $P(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$. En déduire une factorisation de ce polynôme.

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sqrt{n}$ est soit entier, soit irrationnel.

Proposition 18.2.18

— Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On suppose que $a|c$, $b|c$ et $a \wedge b = 1$. Alors $ab|c$.

— Plus généralement si $a \in \mathbb{Z}$ est divisé par chaque élément d'une famille $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}$ d'entiers deux à deux premiers entre eux, alors il est divisé par leur produit.

18.2.5 Plus petit commun multiple

Définition 18.2.19

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Il existe un unique entier positif p tel que

— $a|p \quad \text{et} \quad b|p$

— $\forall q \in \mathbb{Z}, \quad [a|q \quad \text{et} \quad b|q] \Longrightarrow p|q$

On l'appelle ppcm (*plus petit commun multiple*) de a et de b et on le note $\operatorname{ppcm}(a, b)$ ou $a \vee b$.

Remarques

⇨ Si $a, b \in \mathbb{Z}$, les multiples de a et de b sont les multiples de $a \vee b$.

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{N}$. Pour la relation d'ordre de divisibilité sur $\mathbb{N}$, l'ensemble des multiples de a et de b n'est rien d'autre que l'ensemble des majorants de $\{a, b\}$. La définition précédente montre donc que cet ensemble admet un plus petit élément (au sens de la divisibilité) qui est $a \vee b$. Autrement dit, au sens de la divisibilité, l'ensemble $\{a, b\}$ admet une borne supérieure qui est $a \vee b$.

Proposition 18.2.20

$$\begin{aligned}
\forall a \in \mathbb{Z}, &\qquad a \vee 0 = 0\\
\forall a \in \mathbb{Z}, &\qquad a \vee 1 = |a|\\
\forall a, b \in \mathbb{Z}, &\qquad a \vee b = 0 \iff [a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0]
\end{aligned}$$

Remarque

⇨ Si $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a \vee b$ est, au sens de l'ordre, le plus petit multiple commun strictement positif de a et b.

Proposition 18.2.21

$$\begin{aligned}
\forall a, b \in \mathbb{Z}, &\qquad a \vee b = b \vee a\\
\forall a, b \in \mathbb{Z}, &\qquad a \vee b = (-a) \vee b = a \vee (-b) = (-a) \vee (-b) = |a| \vee |b|\\
\forall a, b, k \in \mathbb{Z}, &\qquad (ka) \vee (kb) = |k| (a \vee b)
\end{aligned}$$

Proposition 18.2.22

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.

— Si $a \wedge b = 1$, alors

$$a \vee b = |ab| .$$

— De manière générale

$$(a \wedge b)(a \vee b) = |ab| .$$

Remarque

⇨ On peut définir $a \vee b \vee c$ mais attention, en général, $(a \wedge b \wedge c)(a \vee b \vee c) \neq |abc|$.

Exercice 12

⇨ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $a \vee b = a + b - 1$.

18.3 Nombres premiers

18.3.1 Nombres premiers

Définition 18.3.1

On dit qu'un entier $p \geqslant 2$ est *premier* lorsque ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Remarques

⇨ Par convention, 1 n'est pas un nombre premier.

⇨ Un nombre $p \geqslant 2$ n'est pas premier si et seulement si il existe $a, b \geqslant 2$ tel que $p = ab$.

⇨ Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Pour montrer que p est premier, il suffit de montrer que k ne divise pas p pour tout entier k compris (au sens large) entre 2 et $\sqrt{p}$.

Exercices 13

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le n-ième nombre de Mersenne comme $M_n = 2^n - 1$. Montrer que si M_n est premier, alors n est premier. La réciproque est-elle vraie ?

⇨ Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5. Montrer que $24 | p^2 - 1$.

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe n nombres consécutifs non premiers

Proposition 18.3.2

Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{Z}$. Alors $p | n$ ou $p \wedge n = 1$.

Exercice 14

⇨ Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.
2. Montrer que
$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad (a+b)^p \equiv a^p + b^p \quad [p].$$

Proposition 18.3.3: Petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier et $m \in \mathbb{Z}$ un entier qui n'est pas un multiple de p. Alors
$$m^{p-1} \equiv 1 \ [p].$$

Proposition 18.3.4

Soit p un nombre premier.
— Si $a, b \in \mathbb{Z}$, alors
$$p|ab \iff [p|a \quad \text{ou} \quad p|b] \,.$$
— Plus généralement, p divise un produit si et seulement si il divise un de ses facteurs.

Proposition 18.3.5

Tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.

Remarque

⇨ Soit $n \geqslant 2$. On cherche l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Pour cela, on utilise le crible d'Ératosthène :

— On forme une table avec tous les entiers compris entre 2 et n.
— On raye tous les multiples de 2.
— On cherche le plus petit entier qui n'est pas rayé : c'est 3 et il est premier. On raye alors tous les multiples de 3.
— On cherche ensuite le plus petit entier qui n'est pas rayé (c'est 5). Il est premier car on a trouvé tous les nombres premiers strictement inférieurs à celui-ci et on a rayé tous leurs multiples. On raye alors tous les multiples de 5.
— On continue ainsi jusqu'à ce qu'on trouve un nombre premier dont le carré est strictement supérieur à n. Les nombres qui ne sont pas rayés sont les nombres premiers compris entre 2 et n.

Par exemple, si on cherche les nombres premiers inférieurs à 99, on trouve :

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Proposition 18.3.6

L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

Remarque

⇨ Cette démonstration est due à Euclide (325–265 avant J.C.).

18.3.2 Valuation p-adique, décomposition en facteurs premiers

Définition 18.3.7

Lorsque $n \in \mathbb{Z}^*$ et p est nombre premier, on appelle *valuation p-adique de n* et on note $\mathrm{Val}_p(n)$ le plus grand $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $p^\alpha | n$.

Remarques

⇨ Soit p et q deux nombres premiers. Alors

$$\mathrm{Val}_p(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

⇨ Si $n \in \mathbb{Z}^*$, il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers p tels que $\mathrm{Val}_p(n) > 0$.

Proposition 18.3.8

Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^*$ et $p \in \mathcal{P}$. Alors

$$\mathrm{Val}_p(n_1 n_2) = \mathrm{Val}_p(n_1) + \mathrm{Val}_p(n_2).$$

Remarques

⇨ Plus généralement, si p est un nombre premier, $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}^*$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$, alors

$$\mathrm{Val}_p\left(\prod_{k=1}^{r} n_k^{\alpha_k}\right) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \mathrm{Val}_p(n_k).$$

⇨ Si $n \in \mathbb{Z}^*$, certains auteurs définissent la valuation p-adique de n pour tout entier $p \geqslant 2$. Par exemple la valuation 10-adique de n est le plus grand entier $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que 10^α divise n, c'est-à-dire le nombre de 0 à la fin de l'écriture décimale de n. Remarquons cependant que si p n'est pas premier, la propriété de la proposition précédente n'est plus vérifiée.

Exercice 15

⇨ Montrer que $\sqrt[5]{4/3}$ est irrationnel.

Théorème 18.3.9: Factorisation première

Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. Alors, il existe $u \in \{-1, 1\}$, $p_1, \ldots, p_r$ des nombres premiers deux à deux distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$n = u \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}.$$

De plus, à permutation près des p_k, cette décomposition est unique.

Remarque

⇨ Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. On note $u \in \{1, -1\}$ le signe de n. Alors la factorisation première de n s'écrit

$$n = u \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\mathrm{Val}_p(n)},$$

ce produit ne comportant qu'un nombre fini de termes différents de 1.

Proposition 18.3.10

Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^*$. Alors

— $n_1 | n_2$ si et seulement si

$$\forall p \in \mathcal{P}, \quad \mathrm{Val}_p(n_1) \leqslant \mathrm{Val}_p(n_2).$$

— $n_1 = \pm n_2$ si et seulement si

$$\forall p \in \mathcal{P}, \quad \mathrm{Val}_p(n_1) = \mathrm{Val}_p(n_2).$$

Exercice 16

⇨ Si $n \in \mathbb{N}$ et p est un nombre premier, montrer que

$$\mathrm{Val}_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

En déduire le nombre de zéros à la fin de l'écriture décimale de 2023!.

Proposition 18.3.11

Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^*$. Alors, le pgcd et le ppcm de n_1 et n_2 sont donnés par les relations

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathcal{P}, \quad \mathrm{Val}_p(n_1 \wedge n_2) &= \min(\mathrm{Val}_p(n_1), \mathrm{Val}_p(n_2)) \\ \mathrm{Val}_p(n_1 \vee n_2) &= \max(\mathrm{Val}_p(n_1), \mathrm{Val}_p(n_2)). \end{aligned}$$

Exercice 17

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \wedge b = 1$ et ab est un carré parfait (ab est le carré d'un entier). Montrer que a et b sont des carrés parfaits.

18.3.3 Les grands problèmes d'arithmétique

— **Postulat de Bertrand**
Le postulat de Bertrand affirme que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors il existe un nombre premier p tel que $n < p \leqslant 2n$. Cette conjecture fut énoncée par Joseph Bertrand en 1845 et démontrée par Tchebychev en 1848. Bien que ce résultat soit aujourd'hui un théorème, le nom de postulat lui est resté associé.

— **Théorème de la progression arithmétique**
Ce théorème affirme que si a et b sont premiers entre eux, alors il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv a\ [b]$. On le doit à Dirichlet (1805–1859).

— **Théorème des nombres premiers**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit π_n comme le cardinal de l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Le théorème des nombres premiers affirme que

$$\pi_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln n}$$

Autrement dit, si l'on choisit au hasard un entier entre 1 et n, la probabilité pour qu'il soit premier est de l'ordre de $1/(\ln n)$. Remarquons que cette quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que les nombres premiers deviennent « de plus en plus rares » lorsqu'on avance parmi les entiers naturels. Ce théorème fut conjecturé de manière indépendante par Gauss et Legendre vers 1800. Il fut démontré par Hadamard et de la Vallée Poussin en 1896.

— **Grand (ou dernier) théorème de Fermat**
Il s'énonce ainsi :

> « Pour tout entier $n \geqslant 3$, il n'existe pas de triplet $(a, b, c) \in \mathbb{N}^{*3}$ tel que $a^n + b^n = c^n$. »

Contrairement au petit théorème, il s'agit d'un résultat extrêmement difficile, dont Fermat n'a pas publié de démonstration. Fermat n'a même jamais affirmé publiquement l'avoir démontré. Il a cependant écrit dans une marge du livre II des Oeuvres de Diophante : « J'ai découvert une démonstration merveilleuse, mais je n'ai pas la place de la mettre dans la marge ». Le livre et cette annotation ont été publiés après sa mort, par son fils. De nombreux mathématiciens ont tenté de le prouver et sont arrivés à des résultats partiels, notamment
— Fermat (1601–1665) le démontre pour $n = 4$.
— Euler (1707–1783) le démontre pour $n = 3$.
— Sophie Germain (1776–1831) apporte un résultat majeur ouvrant la porte à la démonstration du cas $n = 5$, démontré quelques années plus tard par Legendre (1752–1833).
— Kummer (1810–1893) le prouve pour tout $n \in [\![3, 99]\!]$.

En 1993, Andrew Wiles prouve un résultat sur les courbes elliptiques, résultat qui admet le grand théorème de Fermat pour corolaire. La démonstration initiale possède une erreur mais elle sera vite réparée. La conjecture de Fermat devient alors le théorème de Fermat-Wiles.

— **Nombres premiers jumeaux**
On dit qu'un couple $(p, q) \in \mathbb{N}$ est un couple de nombres premiers jumeaux lorsque $q = p + 2$. Par exemple $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$ sont des couples de nombres premiers jumeaux. On conjecture qu'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux. Bien que l'on pense que cette conjecture est vraie, elle n'a jamais été démontrée. En janvier 2016, le plus grand couple de nombres premiers jumeaux connu est $2\,996\,863\,034\,895 \times 2^{1\,290\,000} \pm 1$.

— **Conjecture de Goldbach**
En 1742, Goldbach (1690–1764) et Euler (1707–1783) énoncent

> « Tout entier pair supérieur ou égal à 4 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers. »

On pense que cette conjecture est vraie, mais aucune démonstration n'en a jamais été faite.

18.4 Exercices

Divisibilité, division euclidienne

Relation de divisibilité

Congruence, division euclidienne

Exercice 1 : Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv b\ [n]$. Montrer que

$$a^n \equiv b^n \ \left[n^2\right].$$

pgcd, ppcm

Plus grand commun diviseur

Algorithme d'Euclide

Exercice 2 : Divers calculs de pgcd

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Calculer

$$\textbf{a. } (a^3 + 3a^2 - 5) \wedge (a+2), \qquad \textbf{b. } (15a^2 + 8a + 6) \wedge (30a^2 + 21a + 13),$$
$$\textbf{c. } (a^4 + 3a^2 - a + 2) \wedge (a^2 + a + 1), \qquad \textbf{d. } (a^3 + a) \wedge (2a + 1),$$
$$\textbf{e. } (a-b)^3 \wedge (a^3 - b^3).$$

Relation de Bézout

Exercice 3 : Calculs des coefficients de Bézout

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes

$$\textbf{a. } 95x + 71y = 1, \qquad \textbf{b. } 24x - 15y = 3, \qquad \textbf{c. } 12x + 15y + 20z = 1.$$

Lemme de Gauss

Exercice 4 : Autour de la suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci par :

$$F_0 \coloneqq 0, \quad F_1 \coloneqq 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} \coloneqq F_{n+1} + F_n.$$

1. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$
En déduire que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
2. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad F_{n+p} = F_pF_{n+1} + F_{p-1}F_n.$$
En déduire que $F_n \wedge F_p = F_{n+p} \wedge F_p$.
3. Montrer que
$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad F_n \wedge F_p = F_{n \wedge p}.$$

Exercice 5 : Reste de la division euclidienne d'une puissance

Soit n un entier supérieur à 2 et $a \in \mathbb{Z}$, premier avec n. Pour tout entier k on note r_k le reste de la division euclidienne de a^k par n.

1. Montrer que la suite r est périodique. Pour cela on montrera dans l'ordre :
   (a) Il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tels que $k_1 < k_2$ et $a^{k_1} \equiv a^{k_2}\ [n]$.
   (b) Il existe $T \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^T \equiv 1\ [n]$.
   (c) Conclure.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de 3^{1998} par 5 ?
3. Montrer que 13 divise $3^{126} + 5^{126}$.

Exercice 6 : Le théorème chinois

On se donne $p_1, p_2 \in \mathbb{N}^*$ deux entiers premiers entre eux, et a_1 et $a_2 \in \mathbb{Z}$.

1. On souhaite montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que
$$n \equiv a_1 \quad [p_1] \qquad \text{et} \qquad n \equiv a_2 \quad [p_2].$$
   (a) Prouver l'existence d'un tel n lorsque $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$, puis lorsque $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$.
   (b) En déduire le cas général.
2. En déduire l'ensemble des solutions du système
$$n \equiv a_1 \quad [p_1] \qquad \text{et} \qquad n \equiv a_2 \quad [p_2].$$
3. Résoudre le système
$$n \equiv 3 \quad [21] \qquad \text{et} \qquad n \equiv 1 \quad [5].$$

Exercice 7 : Les pirates

Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui-ci reçoit 3 pièces.
Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces.
Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.
Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Exercice 8 : Ordre d'un produit

Soit $(G, \star)$ un groupe fini et x, y deux éléments de G d'ordres respectifs ω_x et $\omega_y \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $x \star y = y \star x$ et que $\omega_x \wedge \omega_y = 1$.

1. Montrer que $\mathrm{Gr}(x) \cap \mathrm{Gr}(y) = \{e\}$.
2. En déduire que xy est d'ordre $\omega_x \omega_y$.

Plus petit commun multiple

Exercice 9 : Calcul de ppcm

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Calculer
$$(a + b) \vee (a \wedge b).$$

Nombres premiers

Nombres premiers

Exercice 10 : Système de chiffrement RSA

On se donne deux nombres premiers p et q distincts, on pose $n := pq$ et on définit
$$\varphi(n) := \mathrm{Card}\{k \in [\![0, n-1]\!] \mid k \wedge n = 1\}.$$

1. Soit $c \in \mathbb{N}$ tel que $c \wedge \varphi(n) = 1$. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $cd \equiv 1 \ [\varphi(n)]$.
2. Montrer que $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.
3. Montrer que si $t \in \mathbb{Z}$, alors $t^{cd} \equiv t \quad [n]$.

Exercice 11 : Encadrement du n-ième nombre premier

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n-ième nombre premier.

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} \leqslant p_1 \cdots p_n + 1.$$
2. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n \leqslant 2^{2^n}.$$
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Montrer que pour x assez grand
$$\ln(\ln x) \leqslant \pi(x) \leqslant x.$$
   On démontrera le fait que pour $n \geqslant 3$, $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{n-1}} \geqslant 2^{2^n}$.

Exercice 12 : Cas particuliers du théorème de Dirichlet

1. (a) Montrer que tout entier naturel congru à 3 modulo 4 possède au moins un diviseur premier congru à 3 modulo 4.
   (b) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 5 modulo 6.

Le théorème de Dirichlet affirme que si a et b sont premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $ak+b$.

Exercice 13 : Pour les Toulousaings

Soit $a_1, \dots, a_{1789} \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{1789} a_k = 0$$

Montrer que

$$\sum_{k=1}^{1789} a_k^{37} \equiv 0 \ [399].$$

Valuation p-adique, décomposition en facteurs premiers

Exercice 14 : Divisibilité

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$a|b \iff a^2|b^2.$$

Chapitre 19

Intégration

19.1 Intégration

19.1.1 Fonction en escalier

Définition 19.1.1

On appelle *subdivision* du segment $[a,b]$ toute famille $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de réels telle que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Remarques

- On dit qu'une subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est *régulière* lorsque $x_{k+1} - x_k$ est indépendant de k. La subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $[a,b]$ définie par
$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad x_k \coloneqq a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$
est dite régulière de *pas* $(b-a)/n$.
- Se donner une subdivision de $[a,b]$ revient à se donner une partie finie de $[a,b]$ contenant a et b.

Définition 19.1.2

Soit $\tau_1 = (x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et $\tau_2 = (y_k)_{0\leqslant k\leqslant m}$ deux subdivisions d'un même segment $[a,b]$. On dit que τ_2 est *plus fine* que τ_1 lorsque tout élément de la famille τ_1 est un élément de la famille τ_2, c'est-à-dire lorsque

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \exists i \in [\![0,m]\!], \quad x_k = y_i.$$

Proposition 19.1.3

Soit τ_1 et τ_2 deux subdivisions d'un même segment $[a,b]$. Alors, il existe une subdivision plus fine que τ_1 et τ_2.

Définition 19.1.4

— Soit $[a,b]$ un segment. On dit qu'une fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{K}$ est une *fonction en escalier* sur $[a,b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\tau : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ du segment $[a,b]$ telle que φ est constante sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$:

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \exists c_k \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}[, \quad \varphi(x) = c_k.$$

— Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{K}$ est en escalier sur I lorsque sa restriction à tout segment $[a,b]$ de I est en escalier sur $[a,b]$.

Remarque

⇨ Une fonction en escalier sur un segment prend un nombre fini de valeurs. Une telle fonction est donc bornée.

⇨ Si on change la valeur d'une fonction en escalier en un nombre fini de points, elle reste en escalier.

Exercice 1

⇨ Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0, \quad \varphi(x) := \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

φ est-elle en escalier sur $\mathbb{R}_+^*$? Si on prolonge φ en 0 en posant $\varphi(0) = 0$, la nouvelle fonction est-elle en escalier sur $\mathbb{R}_+$?

Proposition 19.1.5

Soit I un intervalle.

— L'ensemble des fonctions en escalier sur I est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

— Si φ est une fonction en escalier sur I, il en est de même pour $|\varphi|$ et $\overline{\varphi}$.

19.1.2 Fonction continue par morceaux

Définition 19.1.6

— Soit $[a,b]$ un segment. On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est une fonction *continue par morceaux* sur $[a,b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\tau : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ du segment $[a,b]$ telle que :

  — Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$.

  — Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f admet une limite finie à droite (au sens strict) en x_k et à gauche (au sens strict) en x_{k+1}. Autrement dit, la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.

— Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur I lorsque sa restriction à tout segment $[a,b]$ de I est continue par morceaux sur $[a,b]$. On note $\mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

Remarques

⇨ Les fonctions en escalier ainsi que les fonctions continues sont continues par morceaux.

⇨ Si on change la valeur d'une fonction continue par morceaux en un nombre fini de points, elle reste continue par morceaux.

⇨ On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ définie sur une partie élémentaire $\mathcal{D} = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ est continue par morceaux lorsque sa restriction à chaque I_k est continue par morceaux.

Proposition 19.1.7

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$. Alors f est bornée sur $[a,b]$.

Proposition 19.1.8

Soit I un intervalle.

— L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

— Si f est une fonction continue par morceaux sur I, il en est de même pour $|f|$ et $\overline{f}$.

Proposition 19.1.9

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe une fonction en escalier φ définie sur $[a, b]$ telle que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon.$$

19.1.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Dans la suite de ce chapitre, si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, on définit

$$\text{« } [a_1, \ldots, a_n] \text{ »} \coloneqq [\min(a_1, \ldots, a_n), \max(a_1, \ldots, a_n)].$$

Définition 19.1.10

Il existe une unique famille $(I_{a,b})_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}$ d'applications de $\mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(\text{« } [a,b] \text{ »}, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, associant à $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(\text{« } [a,b] \text{ »}, \mathbb{K})$ le nombre $I_{a,b}(f) \in \mathbb{K}$ noté

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

et vérifiant les propriétés suivantes.

— Linéarité

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(\text{« } [a,b] \text{ »}, \mathbb{K}),$$

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

— Relation de Chasles

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(\text{« } [a,b,c] \text{ »}, \mathbb{K}),$$

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

— Positivité

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(\text{« } [a,b] \text{ »}, \mathbb{R}),$$

$$[(a \leqslant b) \quad \text{et} \quad (\forall x \in [a, b], \quad f(x) \geqslant 0)] \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

— Uniformité

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b z\,\mathrm{d}x = z(b - a).$$

Proposition 19.1.11

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Alors, pour tout $a, b \in I$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 19.1.12

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Alors, pour tout $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f(x))\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}\,(f(x))\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \overline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \int_a^b \overline{f(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Remarque

⇨ Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ une fonction continue par morceaux définie sur une partie élémentaire. Soit $\mathcal{D} = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ sa décomposition en composantes connexes. Alors, pour tout $a, b \in \mathcal{D}$, lorsqu'il existe un même $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $a, b \in I_k$, on peut définir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cependant, il n'est pas possible de définir une telle intégrale si a et b n'appartiennent pas au même I_k. Par exemple, si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) \coloneqq \frac{1}{x},$$

alors f est continue sur $\mathbb{R}^*$, mais l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

n'a aucun sens.

19.1.4 Positivité de l'intégrale

Proposition 19.1.13: Croissance de l'intégrale

Soit f et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux et $a, b \in I$. On suppose que

$$a \leqslant b \quad \text{et} \quad \forall x \in [a, b], \quad f(x) \leqslant g(x).$$

Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarques

⇨ Si f et $g : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues par morceaux et $a, b \in I$ sont tels que

$$a \geqslant b \quad \text{et} \quad \forall x \in \text{« } [a, b] \text{ »}, \quad f(x) \leqslant g(x),$$

alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Autrement dit, lorsque les bornes « ne sont pas dans le bon ordre », l'inégalité change de sens.

⇨ Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et $m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in [a, b], \quad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Alors

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\,(b-a)\,.$$

Exercices 2

⇨ Déterminer la limite, si elle existe, de la suite de terme général

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 \operatorname{Arcsin}^n x\,\mathrm{d}x.$$

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

En déduire que

$$\left| \pi - 4 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leqslant \frac{4}{2n+3}.$$

⇨ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite, si elle existe, de la suite de terme général

$$\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 19.1.14

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et $a, b \in I$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

est invariant par tout changement de la valeur de f en un nombre fini de points.

Remarque

⇨ Soit φ une fonction en escalier sur le segment $[a,b]$. Il existe donc une subdivision $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ et $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \forall x \in \,]x_k, x_{k+1}[\,, \quad \varphi(x) = c_k.$$

Alors

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x_{k+1} - x_k).$$

Proposition 19.1.15

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Si f est positive sur $[a,b]$ et s'il existe $x_0 \in [a,b]$ en lequel f est continue et $f(x_0) > 0$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

Proposition 19.1.16

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Si f est de signe constant sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

alors

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) = 0.$$

Exercices 3

⇨ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\int_0^1 P^2(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Montrer que $P = 0$.

⇨ Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

19.1.5 Inégalité triangulaire

Proposition 19.1.17: Inégalité triangulaire

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et $a, b \in I$. Si $a \leqslant b$, alors

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 4

⇨ Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) := \int_0^1 f(t) \sin(xt) \, \mathrm{d}t.$$

Montrer que g est lipschitzienne.

19.1.6 Somme de Riemann

Proposition 19.1.18

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Remarque

⇨ Si $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux, de même

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Exercices 5

⇨ Calculer la limite de la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2 + k^2}.$$

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Trouver un équivalent simple de

$$\sum_{k=0}^{n} k^\alpha.$$

19.2 Intégration et dérivation

19.2.1 Continuité et dérivabilité

Proposition 19.2.1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, $a \in I$ et F la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad F(x) := \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t.$$

On suppose qu'il existe un intervalle $J \subset I$ et un réel $M \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall x \in J, \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Alors F est M-lipschitzienne sur J.

Proposition 19.2.2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, $a \in I$ et F la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad F(x) := \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Alors F est continue sur I.

Proposition 19.2.3

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, $a \in I$ et F la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x_0 \in I$. Si f est continue en x_0, alors F est dérivable en x_0 et

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Remarque

⇨ Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et $a, b : J \to I$ deux fonctions dérivables. On définit la fonction g sur J par

$$\forall x \in J, \quad g(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors g est dérivable sur J et

$$\forall x \in J, \quad g'(x) = b'(x) f(b(x)) - a'(x) f(a(x)).$$

19.2.2 Primitive

Définition 19.2.4

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$. On appelle *primitive* de f toute fonction dérivable $F : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \qquad F'(x) = f(x).$$

Proposition 19.2.5

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors

— f admet une primitive.

— Si $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f, une fonction $G : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f si et seulement si il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall x \in I, \quad G(x) = F(x) + c.$$

Remarque

⇨ Si f est une fonction continue sur une partie élémentaire $\mathcal{D} = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ (où $I_1, \ldots, I_n$ sont les composantes connexes de $\mathcal{D}$), alors f admet une primitive. De plus, si $F : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est une primitive de f, une fonction $G : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est une primitive de f si et seulement si il existe $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \forall x \in I_k, \quad G(x) = F(x) + c_k.$$

19.2.3 Calcul d'intégrales

Théorème 19.2.6: Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue, $a, b \in I$ et F est une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Remarques

⇨ Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a, b \in I$. Alors

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

⇨ Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I et s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant M,$$

alors f est M-lipschitzienne. On retrouve donc l'inégalité des accroissements finis dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 6

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x, y \geqslant a$. Montrer que

$$\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}\right| \leqslant \frac{1}{na^{\frac{n-1}{n}}} \left|x - y\right|.$$

Proposition 19.2.7: Intégration par parties

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue, $g : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a, b \in I$. Alors, si F est une primitive de f

$$\int_a^b \overbrace{f(x)}^{\text{intègre}} \underbrace{g(x)}_{\text{dérive}} \,\mathrm{d}x = \left[F(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 7

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$I_n \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x.$$

Calculer I_n.

Proposition 19.2.8: Changement de variable

Soit $\overline{x} : I \to J$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $x_a, x_b \in J$ et $t_a, t_b \in I$ tels que $\overline{x}\left(t_a\right) = x_a$ et $\overline{x}\left(t_b\right) = x_b$ et $f : J \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Alors

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_a}^{t_b} f\left(\overline{x}(t)\right) \frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque

⇨ Cette proposition reste vraie lorsque f est continue par morceaux et $\overline{x}(t) = \alpha t + \beta$.

Exercices 8

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Calculer

$$\int_a^b \sqrt{\left(x-a\right)\left(b-x\right)}\,\mathrm{d}x.$$

⇨ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(x+y\right) = f(x) + f(y).$$

Montrer que f est linéaire.

Proposition 19.2.9

— Soit $a \geqslant 0$ et $f : [-a, a] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
  — Si f est paire

$$\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

  En particulier

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

  — Si f est impaire

$$\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

  En particulier

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, T-périodique. Alors

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

ne dépend pas du réel a.

19.2.4 Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral

Proposition 19.2.10: Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Si $a, b \in I$, alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t.$$

Exercices 9

⇨ Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

⇨ Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}.$$

Proposition 19.2.11: Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall t \in I, \quad \left| f^{(n+1)}(t) \right| \leqslant M.$$

Si $a, b \in I$, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} |b-a|^{n+1}.$$

Exercice 10

⇨ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sin x.$$

Intégration de développement limité

Proposition 19.2.12

Soit f et $g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle contenant 0. On suppose que g est de signe constant au voisinage à gauche de 0 et au voisinage à droite de 0. Si

$$f(x) = \underset{x \to 0}{\mathrm{o}} \left(g(x) \right),$$

alors

$$\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t = \underset{x \to 0}{\mathrm{o}} \left(\int_0^x g(t) \, \mathrm{d}t \right).$$

Proposition 19.2.13

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle contenant 0. On suppose que f admet un développement limité en 0 à l'ordre n

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}} \left(x^n \right).$$

Si F est une primitive de f, alors elle admet un développement limité en 0 à l'ordre $n+1$ donné par

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}} \left(x^{n+1}\right).$$

Proposition 19.2.14: Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur un intervalle contenant $a \in \mathbb{R}$. On suppose de plus que f est dérivable n fois en a. Alors f admet un développement limité en a à l'ordre n et

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}} (h^n).$$

19.3 Exercices

Intégration

Fonction en escalier

Fonction continue par morceaux

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Exercice 1 : Calcul de quelques intégrales

Calculer les intégrales suivantes

$$\textbf{a.}\ \int_0^1 \min(t, 1-2t^2)\,\mathrm{d}t, \qquad \textbf{b.}\ \int_0^1 |3t-1|\,\mathrm{d}t,$$

$$\textbf{c.}\ \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \mathrm{e}^{-\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{d.}\ \int_0^1 \sin\frac{\lfloor x\rfloor\pi}{4}\,\mathrm{d}x.$$

Positivité de l'intégrale

Exercice 2 : Calcul de limites

1. Calculer les limites des expressions suivantes lorsque n tend vers $+\infty$

$$\int_0^1 x^n\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,\mathrm{d}x.$$

2. Calculer la limite de

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2}\,\mathrm{d}x$$

lorsque a tend vers 0.

Exercice 3 : Calcul de limites

1. (a) Donner la limite, lorsque t tend vers 1 de

$$\frac{1}{\ln t}-\frac{1}{t\ln t}.$$

   (b) En déduire la limite lorsque x tend vers 1 de

$$\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

2. Donner la limite lorsque x tend vers 0 de

$$\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4 : Point fixe

Soit $f : [0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

Montrer qu'il existe $c\in[0,1]$ tel que $f(c)=c$.

Exercice 5 : Calcul de limite

Soit f une fonction continue sur le segment $[0,1]$ à valeurs strictement positives. Pour tout $\alpha>0$, on définit

$$I(\alpha) \coloneqq \left(\int_0^1 f^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

1. Montrer que $I(\alpha)$ converge vers la borne supérieure de f lorsque α tend vers $+\infty$.

2. Le but de cet question est de montrer que lorsque α tend vers 0, $I(\alpha)$ tend vers
$$\exp\left(\int_0^1 \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right).$$
   (a) On suppose dans cette question que $\forall x \in [0,1], \quad f(x) \geqslant 1$.
      i. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in [0,\eta], \quad 1+(1-\varepsilon)x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1+(1+\varepsilon)x.$$
      ii. En déduire qu'il existe $\eta' > 0$ tel que
$$\forall \alpha \in]0,\eta'], \quad 1+(1-\varepsilon)\alpha\ln(f(t)) \leqslant f^\alpha(t) \leqslant 1+(1+\varepsilon)\alpha\ln(f(t)).$$
      iii. Conclure
   (b) Montrer le cas général.

Inégalité triangulaire

Exercice 6 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On définit la fonction g d'expression
$$g(x) \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1+x\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g est définie sur $]-1,+\infty[$.
2. Montrer que g est décroissante.
3. Étant donné $a > -1$, montrer que g est lipschitzienne sur $[a,+\infty[$. En déduire que g est continue sur $]-1,+\infty[$.
4. Montrer que g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et que
$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad g'(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)\sin t}{(1+x\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 7 : Égalité dans l'inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. On suppose que
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$
Montrer que :

1. Si f est réelle, f garde un signe constant.
2. Si f est complexe, f garde un argument constant.

Exercice 8 : Inégalité sur une intégrale

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose
$$M \coloneqq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$
Montrer que
$$\left|\int_0^1 (f(x)+xf(1-x))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{3}{2}M.$$

Somme de Riemann

Exercice 9 : Calcul de limites

Étudier la convergence des suites de terme général
$$\textbf{a. } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \qquad \textbf{b. } n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}, \qquad \textbf{c. } \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k},$$
$$\textbf{d. } \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}, \qquad \textbf{e. } \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}.$$

Exercice 10 : Calcul de limites

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x^2 - \frac{1}{3}x^4 \leqslant \sin^2(x) \leqslant x^2.$$
2. En déduire la limite de la suite de terme général
$$\sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right).$$

Exercice 11 : Calcul de limites

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite de terme général
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right).$$

Intégration et dérivation

Continuité et dérivabilité

Exercice 12 : Fonction d'intégrale nulle

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On suppose que quels que soient a et b dans I
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
Montrer que f est nulle.

Exercice 13 : Inégalité de Gronwall

1. Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe un nombre réel k positif tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leqslant k\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que la fonction f est nulle.
2. Soit $c \in \mathbb{R}_+$, u et v deux applications continues et positives de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u(x) \leqslant c + \int_0^x u(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u(x) \leqslant c\exp\left(\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 14 : Étude de fonctions

Étudier le domaine de définition, les symétries, la monotonie et les limites aux bornes du domaine de définition des fonctions d'expressions
$$\textbf{a. } x \mapsto \int_1^{1+x^2} \ln(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \textbf{b. } x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)},$$
$$\textbf{c. } x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}, \qquad \textbf{d. } x \mapsto \int_x^{2x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Primitive

Exercice 15 : Calcul de primitives

Donner le domaine de définition et calculer les primitives suivantes :
$$\textbf{a. } \int \left(x^2+x+1\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{b. } \int \left(x^2-1\right)\cos x\,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{c. } \int x^3\ln x\,\mathrm{d}x,$$
$$\textbf{d. } \int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{e. } \int \sin x\cos^2 x\,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{f. } \int \sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x,$$
$$\textbf{g. } \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{h. } \int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{i. } I_n = \int \ln^n x\,\mathrm{d}x \quad (\text{pour } n \in \mathbb{N}).$$

Calcul d'intégrales

Exercice 16 : Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit I_n et J_n par

$$I_n \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$.
2. Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont positives et décroissantes. Calculer I_0 et I_1.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$
5. En déduire que
$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 17 : Lemme de Lebesgue

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1. En effectuant une intégration par parties, montrer que le résultat est vrai lorsque f est supposé $\mathcal{C}^1$.
2. Le but de cette question est de démontrer que le résultat est vrai dans le cas général.
   (a) Montrer que le résultat est vrai lorsque f est une fonction en escalier.
   (b) En déduire le cas général.

Exercice 18 : Calcul de $\zeta(2)$

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 tel que $P(0) = 0$ et
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi} P(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}.$$

On définit la suite (u_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

et on souhaite montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$.

2. On définit la fonction $h : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ par $h(0) \coloneqq -2$ et
$$\forall t \in]0, \pi], \quad h(t) \coloneqq \frac{\frac{1}{2\pi}t^2 - t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} h(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\,\mathrm{d}t.$$
3. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, puis que
$$\int_0^{\pi} h(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
et conclure.

Exercice 19 : Généralisation du lemme de Lebesgue

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue par morceaux et T-périodique. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\int_a^b f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer le résultat lorsque f est constante puis lorsque f est une fonction en escalier.
2. En déduire le résultat général.
3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. On définit la suite (u_n) par

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n \coloneqq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}f(1)\right).$$

   (a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{k+1}{n} - t\right) f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (b) En déduire que

$$u_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 20 : Limite différentielle

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f'(x) + f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Le but de cet exercice est de montrer que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

1. On note ε la fonction $\varepsilon \coloneqq f + f'$. Montrer que si a est un réel

$$f(x) = f(a)\mathrm{e}^{a-x} + \mathrm{e}^{-x}\int_a^x \varepsilon(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

2. Conclure.
3. Que dire si la condition de départ est changée en

$$f'(x) + \lambda f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

   où λ est un réel ?

Formules de Taylor

Exercice 21 : Suite

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$

$$|\mathrm{e}^x - 1 - x| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2}x^2.$$

2. En déduire la limite de la suite de terme général

$$u_n \coloneqq \left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{1}{n+k}}\right) - n.$$

Exercice 22 : Calcul numérique

Donner une majoration de l'erreur commise en prenant $x - \frac{x^2}{2}$ comme valeur approchée de $\ln(1 + x)$. En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Chapitre 20

Polynômes

20.1 Arithmétique des polynômes

20.1.1 Relation de divisibilité

Définition 20.1.1

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A divise B lorsqu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = PA$.

Remarques

⇨ Si $A, B \in \mathbb{K}[X]$ et $B \neq 0$, alors B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

⇨ Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $X - \alpha$ divise P si et seulement si α est une racine de P.

Proposition 20.1.2

La relation de divisibilité
- est réflexive : $\forall A \in \mathbb{K}[X], \quad A|A$.
- est transitive : $\forall A, B, C \in \mathbb{K}[X], \quad [A|B \quad \text{et} \quad B|C] \Longrightarrow A|C$.
- n'est pas antisymétrique. Cependant

$$\forall A, B \in \mathbb{K}[X], \quad [A|B \quad \text{et} \quad B|A] \quad \Longleftrightarrow \quad [\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad A = \lambda B].$$

Si tel est le cas, on dit que A et B sont *associés*.

Remarque

⇨ En particulier, si $A, B \in \mathbb{K}[X]$ sont unitaires ou nuls et si $A|B$ et $B|A$, alors $A = B$.

Proposition 20.1.3

Soit $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, alors

$$[A|B \quad \text{et} \quad A|C] \quad \Longrightarrow \quad A|\left(PB + QC\right).$$

Proposition 20.1.4

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$.
- Si $B \neq 0$, alors
$$A|B \quad \Longrightarrow \quad \deg A \leqslant \deg B.$$
- Si $A|B$ et $\deg A = \deg B$, alors A et B sont associés.

20.1.2 Plus grand commun diviseur

Définition 20.1.5

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Il existe un unique polynôme unitaire ou nul P tel que
- $P|A \quad \text{et} \quad P|B$.
- $\forall Q \in \mathbb{K}[X], \quad [Q|A \quad \text{et} \quad Q|B] \Longrightarrow Q|P$.

On l'appelle pgcd (plus grand commun diviseur) de A et de B et on le note $\operatorname{pgcd}(A, B)$, (A, B) ou $A \wedge B$.

Remarque

⇨ Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Si l'un des deux polynômes est non nul, le pgcd de A et B est le polynôme unitaire de plus grand degré qui divise A et B.

Proposition 20.1.6

$$\begin{aligned}
\forall A \in \mathbb{K}[X], &\qquad A \wedge 0 = A_u \\
\forall A \in \mathbb{K}[X], &\qquad A \wedge 1 = 1 \\
\forall A, B \in \mathbb{K}[X], &\qquad A \wedge B = 0 \Longleftrightarrow [A = 0 \quad \text{et} \quad B = 0]
\end{aligned}$$

Proposition 20.1.7

$$\begin{aligned}
\forall A, B \in \mathbb{K}[X], &\qquad A \wedge B = B \wedge A \\
\forall A, B \in \mathbb{K}[X], \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^*, &\qquad A \wedge B = (\lambda A) \wedge (\mu B) = A_u \wedge B_u \\
\forall A, B, P \in \mathbb{K}[X], &\qquad (PA) \wedge (PB) = P_u\,(A \wedge B)
\end{aligned}$$

Définition 20.1.8

Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{K}[X]$. Il existe un unique polynôme unitaire ou nul P tel que
- $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P|A_i$.
- $\forall Q \in \mathbb{K}[X], \quad [\forall i \in [\![1, n]\!], \quad Q|A_i] \Longrightarrow Q|P$.

On l'appelle pgcd (plus grand commun diviseur) de la famille $(A_1, \dots, A_n)$ et on le note $\operatorname{pgcd}(A_1, \dots, A_n)$, ou $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$.

Remarque

⇨ Le pgcd d'une famille $(A_1, \dots, A_n)$ de polynômes ne dépend pas de l'ordre de ces derniers.

Proposition 20.1.9

Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{K}[X]$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$. Alors

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n = (A_1 \wedge \dots \wedge A_p) \wedge (A_{p+1} \wedge \dots \wedge A_n).$$

20.1.3 Algorithme d'Euclide

Proposition 20.1.10

Soit $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$. Alors
$$A \wedge B = A \wedge (B + PA) = (A + PB) \wedge B.$$
En particulier, si $B \neq 0$ et R est le reste de la division euclidienne de A par B, on a
$$A \wedge B = B \wedge R.$$

Exercice 1

⇨ Calculer $A \wedge B$ où $A := X^4 - X^3 + X^2 + X - 2$ et $B := X^3 + X^2 - X - 1$.

20.1.4 Relation de Bézout

Proposition 20.1.11

Si $A, B \in \mathbb{K}[X]$, alors il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que
$$UA + VB = A \wedge B.$$

Remarques

⇨ Les polynômes U et V sont appelés polynômes de Bézout.

⇨ Le couple (U, V) n'est pas unique. En effet, si $(U_0, V_0) \in \mathbb{K}[X]^2$ est un couple de polynômes de Bézout, alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $(U_0 + PB, V_0 - PA)$ en est un autre.

Exercice 2

⇨ Calcul d'un couple de polynômes de Bézout pour $A = (X-1)^2$ et $B = (X+2)^2$.

Définition 20.1.12

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A et B sont premiers entre eux lorsque $A \wedge B = 1$.

Remarques

⇨ Si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ sont distincts, alors $(X - \alpha) \wedge (X - \beta) = 1$.

⇨ Deux polynômes premiers entre eux n'admettent aucune racine commune. Cependant, la réciproque est fausse. En effet, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $P := X^2 + 1$ n'admet aucune racine réelle, donc aucune racine commune avec lui-même. Pourtant $P \wedge P = P \neq 1$.

Exercice 3

⇨ Montrer que si A et B sont premiers entre eux, il en est de même pour $A - B$ et $A + B$.

Proposition 20.1.13

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Alors A et B sont premiers entre eux si et seulement si il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que
$$UA + VB = 1.$$

Proposition 20.1.14

— Soit $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A \wedge B = 1$ et $A \wedge C = 1$. Alors $A \wedge (BC) = 1$.
— Plus généralement, si $A \in \mathbb{K}[X]$ est premier avec chaque élément d'une famille de polynômes $B_1, \ldots, B_n \in \mathbb{K}[X]$, alors A est premier avec leur produit.
— Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes premiers entre eux et $m, n \in \mathbb{N}$. Alors $A^m \wedge B^n = 1$.

Définition 20.1.15

Soit $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{K}[X]$.
— On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux premiers entre eux lorsque
$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \wedge A_j = 1.$$

— On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble lorsque

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n = 1.$$

Remarque

⇨ Si les polynômes $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux premiers entre eux, alors ils sont premiers entre eux dans leur ensemble. Cependant, la réciproque est fausse. Par exemple, les polynômes $A_1 = (X-2)(X-3)$, $A_2 = (X-1)(X-3)$ et $A_3 = (X-1)(X-2)$ sont premiers entre eux dans leur ensemble mais ne sont pas deux à deux premiers entre eux.

Proposition 20.1.16

Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{K}[X]$. Alors $A_1, \dots, A_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement si il existe $U_1, \dots, U_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$U_1 A_1 + \cdots + U_n A_n = 1.$$

20.1.5 Lemme de Gauss

Proposition 20.1.17: Lemme de Gauss

Soit $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$[A|BC \quad \text{et} \quad A \wedge B = 1] \quad \Longrightarrow \quad A|C.$$

Remarque

⇨ Si $A, B \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux et le couple $(U_0, V_0) \in \mathbb{K}[X]^2$ est tel que $U_0 A + V_0 B = 1$, l'ensemble des couples de polynômes de Bézout pour A et B est

$$\{(U_0 + PB, V_0 - PA) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$

Proposition 20.1.18

— Soit $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $A|C$, $B|C$ et $A \wedge B = 1$. Alors $AB|C$.

— Plus généralement si $A \in \mathbb{K}[X]$ est divisé par chaque élément d'une famille $B_1, \dots, B_n \in \mathbb{K}[X]$ de polynômes deux à deux premiers entre eux, alors il est divisé par leur produit.

20.1.6 Plus petit commun multiple

Définition 20.1.19

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Il existe un unique polynôme unitaire ou nul P tel que

— $A|P \quad \text{et} \quad B|P$.

— $\forall Q \in \mathbb{K}[X], \quad [A|Q \quad \text{et} \quad B|Q] \Longrightarrow P|Q$.

On l'appelle ppcm (plus petit commun multiple) de A et de B et on le note $\operatorname{ppcm}(A, B)$, ou $A \vee B$.

Proposition 20.1.20

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathbb{K}[X], &\qquad A \vee 0 = 0 \\ \forall A \in \mathbb{K}[X], &\qquad A \vee 1 = A_u \\ \forall A, B \in \mathbb{K}[X], &\qquad A \vee B = 0 \Longleftrightarrow [A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0] \end{aligned}$$

Proposition 20.1.21

$$\begin{aligned} \forall A, B \in \mathbb{K}[X], &\qquad A \vee B = B \vee A \\ \forall A, B \in \mathbb{K}[X], \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^*, &\qquad A \vee B = (\lambda A) \vee (\mu B) = A_u \vee B_u \\ \forall A, B, P \in \mathbb{K}[X], &\qquad (PA) \vee (PB) = P_u (A \vee B) \end{aligned}$$

Proposition 20.1.22

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$.
- Si $A \wedge B = 1$, alors
$$A \vee B = (AB)_u\,.$$
- De manière générale
$$(A \wedge B)(A \vee B) = (AB)_u\,.$$

20.1.7 Polynôme irréductible

Définition 20.1.23

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 est irréductible lorsque ses seuls diviseurs sont les polynômes associés à 1 ou à P.

Remarques

- ⇨ Un polynôme P de degré supérieur ou égal à 1 est irréductible si et seulement si ses diviseurs sont de degré 0 ou de même degré que P.
- ⇨ Si $\alpha \in \mathbb{K}$, $P \coloneqq X - \alpha$ est irréductible. Plus généralement, les polynômes de degré 1 sont irréductibles.
- ⇨ Les polynômes de degré supérieur ou égal à 2 admettant une racine ne sont pas irréductibles.
- ⇨ Réciproquement, un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 2 ou 3 n'admettant aucune racine dans $\mathbb{K}$ est irréductible. En particulier, les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif sont irréductibles. Cependant, il existe des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ n'admettant aucune racine dans $\mathbb{K}$ et qui ne sont pas irréductibles. Par exemple le polynôme $P = (X^2+1)^2$ n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$ sans être irréductible.

Proposition 20.1.24

Soit P un polynôme irréductible et $A \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P|A$ ou $P \wedge A = 1$.

Proposition 20.1.25

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme irréductible.
- Si $A, B \in \mathbb{K}[X]$
$$P|AB \iff [P|A \quad \text{ou} \quad P|B]\,.$$
- Plus généralement, P divise un produit si et seulement si il divise un de ses facteurs.

Proposition 20.1.26

Tout polynôme non constant admet un diviseur irréductible.

Remarque

- ⇨ En particulier, un polynôme est associé à 1 si et seulement si il n'admet aucun diviseur irréductible.

Définition 20.1.27

Lorsque $A \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ et P est un polynôme unitaire irréductible, on appelle *valuation de P dans A* et on note $\operatorname{Val}_P(A)$ le plus grand $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $P^\alpha | A$.

Remarques

- ⇨ Soit P et Q sont deux polynômes unitaires irréductibles. Alors
$$\operatorname{Val}_P(Q) = \begin{cases} 1 & \text{si } P = Q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
- ⇨ Si $A \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, il n'existe qu'un nombre fini de polynômes unitaires irréductibles P tels que $\operatorname{Val}_P(A) > 0$.

Proposition 20.1.28

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ et P un polynôme unitaire irréductible. Alors

$$\mathrm{Val}_P\,(AB) = \mathrm{Val}_P(A) + \mathrm{Val}_P(B).$$

Remarque

⇨ Plus généralement, si P est un polynôme unitaire irréductible, $A_1, \ldots, A_r \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$, alors

$$\mathrm{Val}_P\left(\prod_{k=1}^{r} A_k^{\alpha_k}\right) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \mathrm{Val}_P\,(A_k)\,.$$

Théorème 20.1.29: Factorisation irréductible

Soit $A \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $P_1, \ldots, P_r$ des polynômes unitaires irréductibles deux à deux distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$A = \lambda \prod_{k=1}^{r} P_k^{\alpha_k}.$$

De plus, à permutation près des P_k, cette décomposition est unique.

Remarque

⇨ Soit $A \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. On note $\lambda \in \mathbb{K}^*$ le coefficient dominant de A. Alors la factorisation irréductible de A s'écrit

$$A = \lambda \prod_{P \in \mathcal{I}} P^{\mathrm{Val}_P(A)},$$

où $\mathcal{I}$ désigne l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. Ce produit ne contient qu'un nombre fini de termes différents de 1.

Proposition 20.1.30

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Alors
- $A|B$ si et seulement si

$$\forall P \in \mathcal{I}, \quad \mathrm{Val}_P(A) \leqslant \mathrm{Val}_P(B).$$

- A et B sont associés si et seulement si

$$\forall P \in \mathcal{I}, \quad \mathrm{Val}_P(A) = \mathrm{Val}_P(B).$$

Proposition 20.1.31

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Alors le pgcd et le ppcm de A et B sont donnés par les relations

$$\begin{aligned} \forall P \in \mathcal{I}, \quad \mathrm{Val}_P\,(A \wedge B) &= \min\left(\mathrm{Val}_P(A), \mathrm{Val}_P(B)\right), \\ \mathrm{Val}_P\,(A \vee B) &= \max\left(\mathrm{Val}_P(A), \mathrm{Val}_P(B)\right). \end{aligned}$$

20.1.8 Changement de corps

Définition 20.1.32

Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$. On définit le polynôme $\overline{P} \in \mathbb{C}[X]$ par

$$\overline{P} := \overline{a_0} + \overline{a_1} X + \cdots + \overline{a_n} X^n.$$

Remarque

⇨ Si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$, alors

$$\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z}).$$

Proposition 20.1.33

Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$.
- Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors

$$\begin{aligned} \overline{\lambda P + \mu Q} &= \overline{\lambda}\,\overline{P} + \overline{\mu}\,\overline{Q} \\ \overline{PQ} &= \overline{P}\,\overline{Q} \end{aligned}$$

- $\deg \overline{P} = \deg P$.

Proposition 20.1.34

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Alors

$$\overline{\overline{P}} = P \qquad \text{et} \qquad \left[P \in \mathbb{R}[X] \iff \overline{P} = P\right].$$

Si $\mathbb{L}$ est un corps, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, certaines notions que nous avons définies peuvent différer selon qu'on considère P comme un élément de $\mathbb{K}[X]$ ou comme un élément de $\mathbb{L}[X]$. Par exemple, si $P := X^2+1 \in \mathbb{R}[X]$, alors P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car c'est un polynôme de degré 2 qui n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$. Cependant, il n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$ car $P = (X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i})$. Nous allons voir cependant que les notions de division euclidienne, de divisibilité, de pgcd et de ppcm ne dépendent pas du corps.

Proposition 20.1.35

Soit $\mathbb{L}$ un corps, $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{L}$ et $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$. Alors, le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{L}[X]$ sont les mêmes que dans $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 20.1.36

Soit $\mathbb{L}$ un corps, $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{L}$ et $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Alors
- A divise B dans $\mathbb{L}[X]$ si et seulement si A divise B dans $\mathbb{K}[X]$.
- Le pgcd et le ppcm de A et B dans $\mathbb{L}[X]$ sont les mêmes que ceux dans $\mathbb{K}[X]$.

20.2 Racines d'un polynôme

20.2.1 Racine

Proposition 20.2.1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors α est une racine de P si et seulement si $X - \alpha$ divise P.

Remarque

⇨ Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ et $x = p/q$ est une racine rationnelle de P mise sous forme irréductible, alors $q | a_n$ et $p | a_0$. Cette relation nous permet de trouver les racines rationnelles de P. Par exemple, si $P = 2X^3 + 5X^2 + X - 3$ et p/q est une racine rationnelle de P mise sous forme irréductible, alors $q|2$ et $p|3$ donc $p \in \{-3, -1, 1, 3\}$ et $q \in \{1, 2\}$. Réciproquement, on constate que seul $-3/2$ est une racine de P. On peut donc factoriser P par $2X + 3$. On obtient $P = (2X + 3)\left(X^2 + X - 1\right)$, ce qui permet d'obtenir toutes les racines de P.

Définition 20.2.2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $\alpha \in \mathbb{K}$. On appelle *multiplicité* de α dans P le plus grand entier $\omega \in \mathbb{N}$ tel que $(X - \alpha)^\omega | P$.

Remarques

⇨ La multiplicité de α dans P sera parfois notée $\omega(\alpha, P)$.

⇨ L'entier $\omega \in \mathbb{N}$ est la multiplicité de α dans P si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - \alpha)^\omega Q \qquad \text{et} \qquad Q(\alpha) \neq 0.$$

⇨ L'élément α est une racine de P si et seulement si $\omega(\alpha, P) \geqslant 1$. Si α est une racine de P, on dit que c'est une *racine simple* lorsque $\omega(\alpha, P) = 1$ et que c'est une *racine double* lorsque $\omega(\alpha, P) = 2$.

⇨ L'élément α n'est pas une racine de P si et seulement si $\omega(\alpha, P) = 0$. On se permet donc parfois de dire que α est racine de P de multiplicité nulle pour signifier que α n'est pas racine de P.

⇨ La multiplicité de α dans P n'est rien d'autre que la valuation de $X - \alpha$ dans P.

Proposition 20.2.3

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $\alpha \in \mathbb{K}$. Si α est de multiplicité $\omega \geqslant 1$ dans P, alors α est de multiplicité $\omega - 1$ dans P'.

Proposition 20.2.4

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\omega \in \mathbb{N}$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.
— α est de multiplicité ω dans P.
— $P(\alpha) = 0, P'(\alpha) = 0, \ldots, P^{(\omega-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(\omega)}(\alpha) \neq 0$.

Exercice 4

⇨ Calculer la multiplicité de 1 dans $P \coloneqq X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$.

Proposition 20.2.5

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors la multiplicité de $\bar{\alpha}$ dans $\bar{P}$ est égale à celle de α dans P.

Remarque

⇨ En particulier, si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\overline{\alpha}$ est une racine de P et sa multiplicité dans P est la même que celle de α dans P.

Proposition 20.2.6

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P admet (au moins) r racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ deux à deux distinctes ayant des multiplicités respectives (au moins) égales à $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathbb{N}$. Alors, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que
$$P = (X - \alpha_1)^{\omega_1} \cdots (X - \alpha_r)^{\omega_r} Q.$$
En particulier $\omega_1 + \cdots + \omega_r \leqslant n$.

Proposition 20.2.7

Tout polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus n racines comptées avec leurs multiplicités.

Remarque

⇨ Un polynôme de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$ admettant au moins $n+1$ racines comptées avec leurs multiplicités est donc nul.

Définition 20.2.8

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$.
— On dit que P est *scindé* lorsqu'il admet exactement n racines comptées avec leurs multiplicités, c'est-à-dire lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ et $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathbb{N}^*$ tels que
$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{\omega_k}.$$
— On dit que P est *scindé simple* lorsqu'il admet exactement n racines simples, c'est-à-dire lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts tels que
$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k).$$

Remarques

- Un polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n est scindé si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que
$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k).$$
De plus, P est scindé simple si et seulement si les α_k sont deux à deux distincts.
- La notion de polynôme scindé dépend du corps considéré. Par exemple, le polynôme $P \coloneqq X^2 + 1$ est scindé (simple) sur $\mathbb{C}$ car $P = (X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i})$. Cependant, il n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, car il n'admet aucune racine réelle.

Proposition 20.2.9

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$.

— On suppose que P admet (au moins) r racines $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ deux à deux distinctes de multiplicités (au moins) $\omega_1, \dots, \omega_r \in \mathbb{N}$ telles que $\omega_1 + \cdots + \omega_r = n$. Alors P est scindé et en notant $\lambda \in \mathbb{K}^*$ le coefficient dominant de P, on a
$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{\omega_k}.$$
En particulier $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les seules racines de P et leurs multiplicités dans P sont $\omega_1, \dots, \omega_r$.

— On suppose que P admet (au moins) n racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distinctes. Alors P est scindé simple et en notant $\lambda \in \mathbb{K}^*$ le coefficient dominant de P, on a
$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k).$$
En particulier $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les seules racines de P et elles sont simples.

Exercice 5

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $X^n - 1$ sur $\mathbb{C}[X]$.

20.2.2 Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème 20.2.10: Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6

- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ est de degré supérieur ou égal à 1. Montrer que l'application $\tilde{P}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $P(z)$ est surjective.

Proposition 20.2.11

Les polynômes unitaires irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les $X - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

Remarques

- Soit P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$. Alors P divise Q si et seulement si toute racine de P est racine de Q et sa multiplicité dans P est inférieure ou égale à sa multiplicité dans Q.
- Dans $\mathbb{C}[X]$, deux polynômes non nuls sont premiers entre eux si et seulement si ils n'admettent aucune racine commune. Deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement si ils n'admettent aucune racine commune dans $\mathbb{C}$.
- Un polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé simple si et seulement si P et P' sont premiers entre eux.

Proposition 20.2.12: Factorisation irréductible dans $\mathbb{C}[X]$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul. Alors, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts, $\omega_1, \dots, \omega_r \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que
$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{\omega_k}.$$

De plus, à permutation près de (α_k, ω_k), cette décomposition est unique.

Remarques

- Les polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ sont donc scindés.
- En pratique, cette décomposition est équivalente à la recherche du coefficient dominant de P, de ses racines et de leurs multiplicités. Deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ sont donc égaux si et seulement si ils ont le même coefficient dominant et les mêmes racines avec les mêmes multiplicités.

Exercices 7

- Montrer que X^2+1 divise X^n+X si et seulement si $n \equiv 3\ [4]$.
- Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(X^n-1) \wedge (X^m-1) = X^{n\wedge m}-1$.

Proposition 20.2.13

Les polynômes unitaires irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les
- $X-\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- X^2+bX+c avec $\Delta = b^2-4c < 0$.

Proposition 20.2.14: Factorisation irréductible dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul. Alors, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, $\omega_1, \dots, \omega_r \in \mathbb{N}^*$, $(b_1, c_1), \dots, (b_s, c_s) \in \mathbb{R}^2$ deux à deux distincts tels que $\Delta_l = b_l^2 - 4c_l < 0$ pour tout $l \in [\![1, s]\!]$, $\omega'_1, \dots, \omega'_s \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tels que
$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{\omega_k} \prod_{l=1}^{s} \left(X^2+b_lX+c_l\right)^{\omega'_l}.$$
De plus, à permutation près des (α_k, ω_k) et des (b_l, c_l, ω'_l), cette décomposition est unique.

Remarque

- En pratique, si on a effectué la décomposition de $P \in \mathbb{R}[X]$ en produit de polynômes unitaires irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, il suffit de regrouper les racines conjuguées et de développer ces produits pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$. En effet, si $\alpha \in \mathbb{C}$
$$(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2 \in \mathbb{R}[X]$$
Cependant, il est parfois possible d'aboutir plus rapidement à la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ en utilisant les identités algébriques.

Exercices 8

- Factoriser X^6-1 et X^4+1 sur $\mathbb{R}[X]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser X^n-1 sur $\mathbb{R}[X]$.

20.2.3 Fonctions symétriques élémentaires

Soit $P \coloneqq X^3+aX^2+bX+c \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire scindé de degré 3 et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ ses racines comptées avec leurs multiplicités. Alors
$$\begin{aligned} P &= X^3+aX^2+bX+c \\ &= (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) \\ &= X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma \\ &= X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3. \end{aligned}$$
où $\sigma_1 \coloneqq \alpha+\beta+\gamma$, $\sigma_2 \coloneqq \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ et $\sigma_3 \coloneqq \alpha\beta\gamma$. Par unicité des coefficients de P, on a $\sigma_1 = -a$, $\sigma_2 = b$ et $\sigma_3 = -c$. Remarquons que σ_1, σ_2 et σ_3 sont des expressions symétriques en α, β, γ, c'est-à-dire qu'elles sont invariantes par permutation de ces 3 variables. On peut montrer que toute expression polynomiale symétrique en α, β, γ peut s'exprimer comme un polynôme en ces 3 quantités. Par exemple $\Sigma \coloneqq \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ est symétrique en α, β, γ et on remarque que
$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= (\alpha+\beta+\gamma)^2 \\ &= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) \\ &= \Sigma + 2\sigma_2 \end{aligned}$$

donc $\Sigma = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Ainsi, toute expression symétrique en les racines de P s'exprime en fonction des coefficients de P. Dans notre cas, on trouve $\Sigma = a^2 - 2b$.

Définition 20.2.15

Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. On définit les *polynômes symétriques élémentaires* en les $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ par

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\coloneqq \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \\ \sigma_2 &\coloneqq \sum_{i_1 < i_2} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \\ &\vdots \\ \sigma_n &\coloneqq \alpha_1 \cdots \alpha_n. \end{aligned}$$

Plus précisément, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$$\sigma_k \coloneqq \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k}.$$

Remarque

- ⇨ On peut montrer que tout polynôme symétrique en les $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ s'écrit comme un polynôme en les $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Cette propriété justifie leur appellation de polynômes symétriques *élémentaires*.

Proposition 20.2.16: Relations coefficients-racines, formules de Viète

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé de degré n. Alors il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\begin{aligned} P &= a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \\ &= a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k). \end{aligned}$$

Alors

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Exercices 9

- ⇨ Soit $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ les racines de $P \coloneqq 2X^3 + 3X^2 + X + 1$. Calculer

$$a \coloneqq \sum_{k=1}^{3} z_k^2, \qquad b \coloneqq \sum_{k=1}^{3} z_k^3, \qquad c \coloneqq \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{z_k}.$$

- ⇨ Montrer que si $n \geqslant 2$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle et le produit des racines n-ièmes de l'unité est égal à $(-1)^{n-1}$.

20.3 Exercices

Arithmétique des polynômes

Relation de divisibilité

Exercice 1 : Racines d'un polynôme

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
2. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation
$$(z^2 - 3z + 1)^2 = 3z^2 - 8z + 2.$$

Exercice 2 : Division euclidienne

1. Trouver le reste et le quotient de la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :
— $A \coloneqq X^3 - 2X + 1$ et $B \coloneqq X^2 - 1$
— $A \coloneqq X^4 - 2X^3 + 1$ et $B \coloneqq X + 1$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, trouver les restes de la division de $(X-3)^{2n} - (X-2)^n - 2$ par $(X-2)(X-3)$, puis par $(X-3)^3$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division du polynôme $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par $X^2 + 1$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver le reste de la division euclidienne de $X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$ par $(X+1)^2$.

Plus grand commun diviseur

Algorithme d'Euclide

Exercice 3 : Calculs de pgcd

1. Calculer le pgcd des polynômes $X^5 - 4X^4 + 6X^3 - 6X^2 + 5X - 2$ et $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$.
2. Soit p et q deux entiers naturels.
   (a) Calculer le reste de la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X^q - 1$.
   (b) En déduire le pgcd de $X^p - 1$ et $X^q - 1$.

Relation de Bézout

Exercice 4 : Calcul de coefficients

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ de polynômes de degrés strictement inférieurs à n tels que
$$(1-X)^n P(X) + X^n Q(X) = 1.$$
2. Montrer que
$$P(X) = Q(1-X) \quad \text{et} \quad Q(X) = P(1-X).$$
3. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que
$$(1-X)P'(X) - nP(X) = \lambda X^{n-1}.$$
4. En déduire les coefficients de P.

Exercice 5 : Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble

Soit $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose
$$B_k \coloneqq \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} A_i.$$

Montrer que $B_1, \ldots, B_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Lemme de Gauss

Plus petit commun multiple

Polynôme irréductible

Changement de corps

Exercice 6 : Factorisation sur $\mathbb{Q}[X]$

Soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ et P le polynôme

$$P \coloneqq a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n.$$

1. Montrer que si $r \coloneqq p/q$ (avec $p \wedge q = 1$) est racine de P, alors $q | a_n$ et $p | a_0$. Que dire si $a_n = 1$?
2. Montrer que si r est une racine de P, alors

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad p - mq | P(m).$$

3. En déduire la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes

$$X^3 - X - 1, \qquad 3X^3 - 2X^2 - 2X - 5,$$

$$6X^4 + 19X^3 - 7X^2 - 26X + 12.$$

Racines d'un polynôme

Racine

Exercice 7 : Racines doubles

Quelles sont les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles le polynôme

$$(X-1)^n - (X^n - 1)$$

admet une racine double ?

Exercice 8 : Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$

$$X^3 - 1, \qquad X^6 + 1 \quad \text{et} \quad X^8 + X^4 + 1.$$

Exercice 9 : Polynômes d'interpolation de Hermite

Soit n réels deux à deux distincts $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré strictement inférieur à $2n$ tel que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(\alpha_k) = a_k \quad \text{et} \quad P'(\alpha_k) = b_k.$$

Exercice 10 : Base de $\mathbb{R}_n[X]$ sans racines

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $\mathbb{R}_n[X]$ admette une base formée de polynômes sans racines réelles.

Exercice 11 : Polynôme scindé

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant.

1. Montrer que si P est scindé simple sur $\mathbb{R}$, alors P' est scindé simple sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Théorème fondamental de l'algèbre

Exercice 12 : Résolution d'une équation polynomiale

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(X^2) = P(X)P(X+1).$$

Fonctions symétriques élémentaires

Exercice 13 : Calculs trigonométriques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit le polynôme $P_n \in \mathbb{C}[X]$ par

$$P_n \coloneqq (X+1)^n - (X-1)^n.$$

1. Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, les valeurs de

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right).$$

Exercice 14 : Relations entre coefficients et racines

1. Soit p, q et r trois nombres complexes et a, b, c les trois racines du polynôme $P \coloneqq X^3 + pX^2 + qX + r$. Calculer en fonction de p, q et r l'expression $a^3b + a^3c + b^3c + b^3a + c^3a + c^3b$.
2. On considère le polynôme

$$P \coloneqq X^4 + pX^2 + qX + r.$$

avec $r \neq 0$. On note $x_1, \dots, x_4$ ses racines. Calculer les expressions suivantes en fonction de p, q et r :

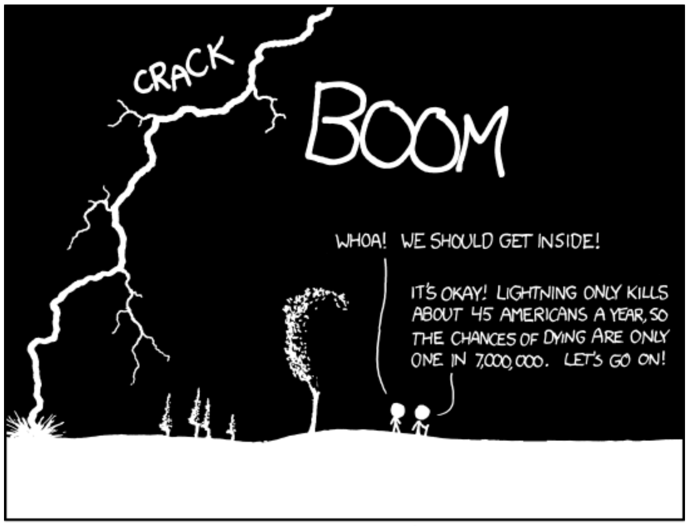
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2}.$$

Chapitre 21

Probabilités

« Il y a tellement de gens qui trouvent à travers le monde la seule femme qu'ils puissent aimer, que l'énorme fréquence de ces rencontres me rend sceptique, moi qui ai un certain respect du calcul des probabilités. »

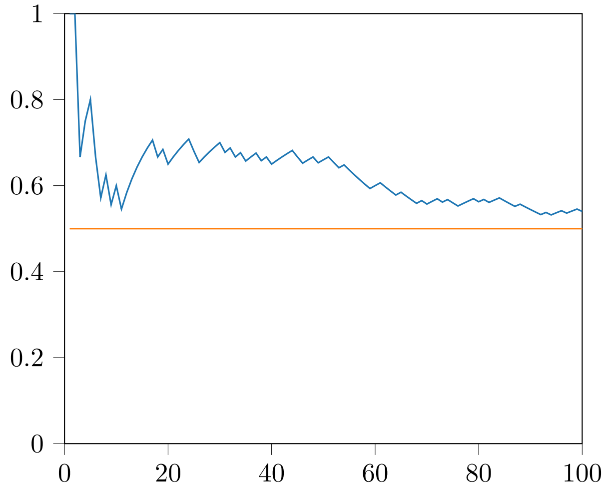
— Tristan Bernard (1866–1947)



THE ANNUAL DEATH RATE AMONG PEOPLE WHO KNOW THAT STATISTIC IS ONE IN SIX.

21.1 Espace probabilisé

La théorie des probabilités est la modélisation mathématique des phénomènes caractérisés par le hasard et l'incertitude. Considérons par exemple le jeu de « pile ou face ». Avant d'effectuer un lancer, nous savons que le résultat de cette expérience sera soit pile, soit face. Il est impossible de prévoir le résultat d'un unique lancer, mais si nous effectuons n lancers et que nous comptons le nombre n_P de fois où on a obtenu pile, on constate que la proportion n_P/n tend vers $1/2$ lorsque n tend vers l'infini.



En mathématiques, nous modélisons cette expérience en disant que l'univers des possibles est un ensemble $\Omega := \{P, F\}$ formé de deux éléments et que la probabilité de l'évènement $A := \{P\}$ est $1/2$, ce que l'on note

$$\mathbb{P}(\{P\}) = \frac{1}{2}.$$

Puisque le nombre n_F de fois où on a obtenu face vérifie $n_P + n_F = n$, on en déduit que la probabilité d'obtenir face est aussi de $1/2$, ce que l'on note de même $\mathbb{P}(\{F\}) = 1/2$.

Considérons maintenant un autre jeu de hasard : le lancer d'un dé à 6 faces. Dans ce cas, l'univers des possibles est $\Omega := [\![1, 6]\!]$. On constate que quel que soit $\omega \in \Omega$, si on lance le dé n fois et qu'on compte le nombre n_ω de fois où on a obtenu ω, la proportion n_ω/n tend vers $1/6$. On écrira

$$\forall \omega \in [\![1, 6]\!], \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{6}.$$

Si l'on s'intéresse au nombre n_P de fois où on a obtenu un nombre pair, c'est-à-dire au nombre de fois où on a obtenu 2, 4 ou 6, nous dirons que nous nous intéressons à l'évènement $A := \{2, 4, 6\}$. Bien entendu

$$\frac{n_P}{n} = \frac{n_2 + n_4 + n_6}{n} = \frac{n_2}{n} + \frac{n_4}{n} + \frac{n_6}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

On écrira

$$\mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \frac{1}{2}.$$

Nous remarquons que sur ces deux exemples, l'univers Ω est fini et que, quelle que soit la partie A de Ω, on a

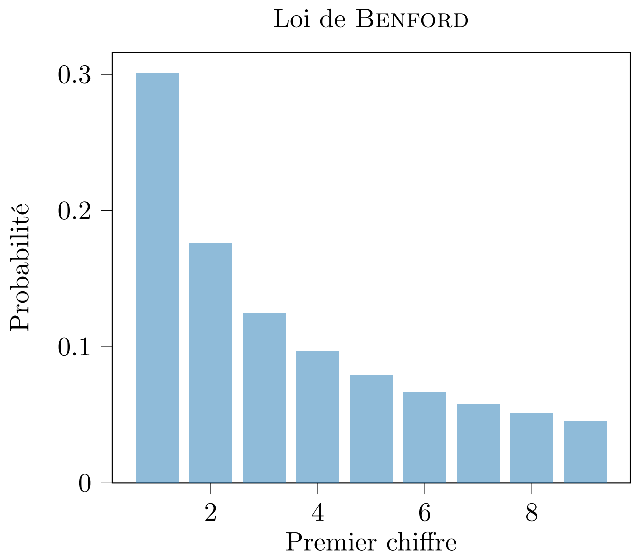
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}.$$

Nous dirons que la probabilité $\mathbb{P}$ est uniforme sur Ω.

Cependant, les probabilités ne sont pas toujours uniformes. On considère par exemple l'expérience qui consiste à avoir 2 enfants. Si on s'intéresse au sexe des enfants, il y a trois possibilités : on peut avoir deux filles, deux garçons ou une fille et un garçon. Nous modélisons cela en disant que l'univers des possibles est $\Omega := \{F, G, D\}$. L'expérience montre que la probabilité d'avoir deux filles est de $1/4$, celle d'avoir deux garçons est de $1/4$ et celle d'avoir une fille et un garçon est de $1/2$. Nous avons donc un exemple simple où la probabilité n'est pas uniforme.

En 1881, l'astronome Simon Newcomb se rend compte que les livres de tables de logarithmes sont plus abimés à certaines pages qu'à d'autres. Sa découverte suggère que les personnes ayant besoin de faire des applications numériques sont plus souvent confrontées à des nombres commençant par un 1, comme 1491 ou 1.602×10^{-19}, que par un 9, comme 987 ou 9.81. Soixante ans plus tard, Frank Benford, après avoir répertorié un très grand nombre de données, dont les longueurs des fleuves et les populations des villes, fait le même constat. Ici, l'univers des possibles est $\Omega := [\![1, 9]\!]$ et Benford postule que

$$\forall \omega \in [\![1, 9]\!], \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{\omega}\right).$$



On vérifie que

$$\begin{aligned}\sum_{\omega=1}^{9} \mathbb{P}(\{\omega\}) &= \sum_{\omega=1}^{9} \log_{10}\left(1+\frac{1}{\omega}\right) = \sum_{\omega=1}^{9} [\log_{10}(\omega+1) - \log_{10}(\omega)] \\ &= \log_{10}(10) - \log_{10}(1) = 1\end{aligned}$$

comme attendu pour une probabilité.

21.1.1 Espace probabilisé

Définition 21.1.1

Étant donné une expérience aléatoire, on appelle *univers des possibles* ou simplement *univers* tout ensemble fini Ω où chaque élément $\omega \in \Omega$ représente une *réalisation* de l'expérience.

Exemples

⇨ *Série de Pile ou Face.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à jeter n fois une pièce. Dans ce cas, l'univers des possibles est $\Omega := \{P, F\}^n$, la lettre P représentant le résultat pile et la lettre F représentant le résultat face. Par exemple, si $n = 3$, $\omega := (P, P, F)$ représente la réalisation de l'expérience où les deux premiers lancers donnent pile et le dernier lancer donne face.

⇨ *Répartition de n boules discernables dans p urnes discernables.* Soit $n, p \in \mathbb{N}$. On considère l'expérience qui consiste à répartir de manière aléatoire n boules discernables dans p urnes discernables. On choisit de numéroter les boules de 1 à n et les urnes de 1 à p. L'univers des possibles est donc $\Omega_D := [\![1, p]\!]^n$ et une réalisation $\omega \in \Omega$ de l'expérience est un n-uplet $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\omega_i \in [\![1, p]\!]$ est le numéro de l'urne dans laquelle on a placé la boule i.

⇨ *Répartition de n boules indiscernables dans p urnes discernables.* Soit $n, p \in \mathbb{N}$. On considère l'expérience qui consiste à répartir de manière aléatoire n boules indiscernables dans p urnes discernables. Une réalisation est caractérisée par le nombre de boules $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{N}$ que contient chaque urne. Comme on sait qu'il y a au total n boules, l'univers des possibles est donc

$$\Omega_I := \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p \mid x_1 + \dots + x_p = n\}.$$

Remarque

⇨ En première année, l'univers des possibles sera toujours un ensemble fini. Cette restriction nous empêchera de modéliser certaines expériences comme jouer à pile ou face jusqu'à obtenir pile. La théorie des probabilités sur un univers infini est plus délicate. C'est pourquoi vous ne l'aborderez qu'en seconde année.

Définition 21.1.2

Soit Ω l'univers des possibles.

— On appelle *évènement* toute partie de Ω. L'évènement Ω est appelé *évènement certain* et l'évènement

$\varnothing$ est appelé *évènement impossible.*
— On dit que deux évènements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont *disjoints*, ou *incompatibles*, lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Remarques

⇨ On dit que les évènements $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont incompatibles lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing.$$

⇨ On dit qu'un évènement A est *élémentaire* lorsqu'il ne contient qu'un résultat observable, c'est-à-dire lorsqu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $A = \{\omega\}$.

⇨ Si A et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont des évènements, on appelle
— évènement « A et B » l'évènement $A \cap B$.
— évènement « A ou B » l'évènement $A \cup B$.
— évènement « contraire de A » l'évènement $\bar{A} = \Omega \setminus A$.

Exercice 1

⇨ On considère l'expérience consistant à jeter n fois une pièce. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on considère l'évènement $F_k :=$ « Le résultat du k-ième lancer est face ». Exprimer, en fonction des F_k, les évènements suivants :
— $A :=$ « On n'obtient jamais pile au cours des n lancers ».
— $B :=$ « On obtient pile au moins une fois au cours des n lancers ».
— $C :=$ « On obtient deux faces consécutifs au cours des n lancers ».

Définition 21.1.3

Soit Ω l'univers des possibles. On dit que la famille d'évènements $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ forme un *système complet d'évènements* lorsque c'est une partition de Ω, c'est-à-dire lorsque

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad \text{et} \qquad [\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing].$$

Définition 21.1.4

On appelle *loi de probabilité*, *mesure de probabilité* ou plus simplement *probabilité* sur un univers Ω toute application

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}: & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}(A) \end{array}$$

telle que
— $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
— $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), \quad A \cap B = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ est appelé *espace probabilisé.*

Remarque

⇨ On dit que deux évènements A et B sont *équiprobables* lorsque $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

Définition 21.1.5

Soit Ω un ensemble fini non vide. On appelle *probabilité uniforme* sur Ω l'application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}.$$

Remarques

⇨ Lorsque Ω est muni d'une loi uniforme, les calculs de probabilité se ramènent à des problèmes de dénombrement.

⇨ Pour deux des trois exemples d'expérience aléatoire que nous avons donné en début de cours, la probabilité « naturelle » est la probabilité uniforme.
— *Série de Pile ou Face* : Si on considère l'expérience aléatoire qui consiste à jeter n fois une pièce équilibrée, c'est la probabilité uniforme qui est naturelle sur l'univers $\Omega := \{P, F\}^n$. Nous montrerons plus tard que cela revient à supposer que les résultats de chaque lancer ont autant de chance de donner pile que face, et que les lancers sont indépendants.

— *Répartition de n boules discernables dans p urnes discernables* : Si l'on souhaite répartir n boules discernables dans p urnes discernables, c'est encore la probabilité uniforme qui est naturelle sur $\Omega_D := [\![1, p]\!]^n$. Nous verrons que cela revient à supposer que chaque boule est placée de manière équiprobable dans les différentes urnes et que ces répartitions sont indépendantes les unes des autres.

Dans la suite de ce cours, $(\Omega, \mathbb{P})$ désignera un espace probabilisé.

Proposition 21.1.6

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varnothing) = 0, &\qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1, \\ \forall A \in \mathcal{P}(\Omega), &\qquad \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A), \\ \forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), &\qquad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B). \end{aligned}$$

Proposition 21.1.7

Une probabilité est une fonction *croissante*. Autrement dit

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), \quad A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B).$$

Proposition 21.1.8

Soit $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ une famille d'évènements incompatibles. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarques

⇨ Si $A_1, \dots, A_n$ est une famille d'évènements incompatibles, la réunion des A_i est parfois notée

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i.$$

⇨ Si $A_1, \dots, A_n$ sont quelconques, on a seulement

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

On dit que $\mathbb{P}$ est *sous-additive*.

Exercices 2

⇨ Une urne contient 20 boules, numérotées de 1 à 20 : 5 boules sont blanches, 5 sont rouges et 10 sont noires. On tire successivement 3 boules, avec remise à chaque tirage. Si on munit Ω de la probabilité uniforme, calculer la probabilité que le tirage soit :
— unicolore.
— tricolore.
— bicolore.

⇨ Une urne contient 8 boules, numérotées de 1 à 8 : 3 boules sont blanches et 5 sont noires. On en tire simultanément 4 boules. Si on munit Ω de la probabilité uniforme, avec quelle probabilité n'a-t-on tiré que des boules noires ?

Proposition 21.1.9: Formule du crible

Soit $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ une famille d'évènements. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right).$$

Remarque

⇨ Par exemple, pour $n = 3$, la formule du crible s'écrit

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - [\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)] + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Définition 21.1.10

— On appelle *distribution de probabilité* sur Ω toute famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs telle que

$$\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1.$$

— Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, on appelle *distribution de probabilité* de $\mathbb{P}$ la famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad p_\omega := \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

C'est une distribution de probabilité sur Ω.

Remarque

⇨ Si $\mathbb{P}$ désigne la probabilité uniforme sur l'univers Ω de cardinal n, alors quel que soit $\omega \in \Omega$, $p_\omega = 1/n$.

Exercice 3

⇨ Sur l'univers $\Omega := [\![0, n]\!]$, on définit la famille $(p_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ par

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad p_k := \alpha \binom{n}{k}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer α pour que $(p_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ soit une distribution de probabilité.

Proposition 21.1.11

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ la distribution de probabilité de $\mathbb{P}$. Alors

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega.$$

Remarques

⇨ Une probabilité est donc entièrement déterminée par sa distribution de probabilité.

⇨ Une probabilité est donc uniforme si et seulement si tous les évènements élémentaires sont équiprobables. Une erreur très classique en probabilités est de croire que la mesure de probabilité « naturelle » sur un univers est toujours la probabilité uniforme. Ce n'est pas toujours le cas. Cependant, lorsque ça l'est, un argument de symétrie permet souvent de s'en convaincre. Par exemple, si on lance un dé à 6 faces, les symétries du dé font que les valeurs obtenues sont équiprobables. La mesure de probabilité « naturelle » sur $\Omega := [\![1, 6]\!]$ est donc la probabilité uniforme.

Exercice 4

⇨ On lance un dé pipé à 6 faces qui donne « 1 » avec la probabilité $1/4$ et les autres faces avec une même probabilité p. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair ?

Proposition 21.1.12

Soit $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilité sur l'univers Ω. Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega.$$

21.1.2 Variable aléatoire

Définition 21.1.13

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle *variable aléatoire* à valeurs dans E toute application $X : \Omega \to E$.

Remarque

⇨ On dit qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ est réelle lorsque E est une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 21.1.14

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. Alors, pour toute partie A de E, on définit l'évènement

$$(X \in A) \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}.$$

Remarques

- Si $x \in E$, l'évènement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ est noté $(X = x)$.
- Si X est une variable aléatoire réelle et $a, b \in \mathbb{R}$, l'évènement $\{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) \leqslant b\}$ est noté $(a \leqslant X \leqslant b)$.
- L'évènement $(X \in A)$ est aussi noté $\{X \in A\}$ ou $[X \in A]$. La probabilité d'un tel évènement est notée $\mathbb{P}(X \in A)$.

Proposition 21.1.15

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Alors

$$(X \in A \cap B) = (X \in A) \cap (X \in B), \qquad (X \in A \cup B) = (X \in A) \cup (X \in B),$$

$$(X \in \bar{A}) = \overline{(X \in A)}.$$

Exercice 5

- Soit $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ une variable aléatoire à valeurs entières. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \leqslant n) - \mathbb{P}(X \leqslant n - 1).$$

Définition 21.1.16

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_X : & \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$, appelée *loi* de X.

Remarques

- La loi de X est entièrement déterminée par sa distribution de probabilité $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.
- Si $x \in E$ n'appartient pas à $X(\Omega)$, alors $\mathbb{P}(X = x) = 0$.
- En pratique, lorsqu'il nous sera demandé de déterminer la loi d'une variable aléatoire $X : \Omega \to E$, on commencera par déterminer un ensemble fini E' tel que $X(\Omega) \subset E'$ puis on calculera $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in E'$.
- Si $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ est un espace probabilisé, Ω_2 est un ensemble fini et F est une application de Ω_1 dans Ω_2, alors

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_2 : & \mathcal{P}(\Omega_2) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}_1(F \in A) \end{array}$$

  est une probabilité sur Ω_2, appelée *mesure image* de $\mathbb{P}_1$ par F.
- En reprenant les notations utilisées dans les exemples de répartition de n boules discernables/indiscernables dans p urnes discernables donnés plus haut, on considère la fonction d'oubli $F : \Omega_D \to \Omega_I$. À une répartition de boules numérotées et donc discernables, elle associe la répartition des boules indiscernables, où on a effacé le numéro des boules. Autrement dit, si $\omega \coloneqq (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_D$, alors $F(\omega) = (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega_I$ où

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad x_j = \operatorname{Card}\{i \in [\![1, n]\!] \mid \omega_i = j\}.$$

  La mesure de probabilité naturelle sur Ω_I est la mesure image par F de la probabilité uniforme sur Ω_D.

Exercice 6

- On lance successivement deux dés à 6 faces. On modélise cette expérience en choisissant $\Omega \coloneqq [\![1, 6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme. On note $A_1 : \Omega \to \mathbb{N}$ le résultat du premier dé et $A_2 : \Omega \to \mathbb{N}$ le résultat du second dé. Déterminer les lois de A_1, A_2 ainsi que la loi de la variable aléatoire $A_1 + A_2 : \Omega \to \mathbb{N}$ donnant la somme des deux nombres obtenus.

Proposition 21.1.17

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. Alors, pour toute partie A de E

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$$

Remarque

⇨ Étant donné que $\mathbb{P}(X = x)$ est nul pour tout x en dehors de l'ensemble fini $X(\Omega)$, cette somme est bien définie puisqu'elle ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls.

Définition 21.1.18

On dit que deux variables aléatoires $X, Y : \Omega \to E$ suivent la même loi lorsque

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A).$$

Si tel est le cas, on écrit $X \sim Y$.

Remarques

⇨ En pratique, pour montrer que X et Y suivent la même loi, il suffit de déterminer un ensemble fini E' tel que $X(\Omega) \subset E'$ et $Y(\Omega) \subset E'$, puis de montrer que

$$\forall a \in E', \quad \mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(Y = a).$$

⇨ Deux variables aléatoires qui suivent la même loi sont rarement égales. Par exemple, si A est un évènement de probabilité $1/2$, les variables aléatoires $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{\bar{A}}$ suivent la même loi sans être égales.

Proposition 21.1.19

Si $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire, $X(\Omega)$ est un ensemble fini que l'on note $\{x_1, \dots, x_n\}$. Alors, la famille des $(X = x_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ forme un système complet d'évènements.

Remarques

⇨ On utilisera souvent ce système complet d'évènements dans la formule des probabilités totales.

⇨ Cette proposition reste vraie si on remplace $X(\Omega)$ par une partie finie E' de E telle que $X(\Omega) \subset E'$.

Définition 21.1.20

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $f : E \to F$. On note $f(X)$ la variable aléatoire $f \circ X : \Omega \to F$.

Remarque

⇨ Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $f : E \to F$. Alors, pour tout $y \in F$

$$\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x)$$

Proposition 21.1.21

Soit $X, Y : \Omega \to E$ deux variables aléatoires et $f : E \to F$. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

21.1.3 Lois usuelles

Définition 21.1.22: Loi uniforme

Soit A un ensemble fini non vide. On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans A suit une *loi uniforme* sur A lorsque

$$\forall a \in A, \quad \mathbb{P}(X = a) = \frac{1}{\operatorname{Card} A}.$$

Si tel est le cas, on note $X \sim \mathcal{U}(A)$.

Remarque

- Si X suit une loi uniforme sur A, alors $X(\Omega) = A$.

Exercice 7

- Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![-2, 2]\!]$. Déterminer la loi de $X^2 + 1$.

Définition 21.1.23: Loi de Bernoulli

Soit $p \in [0, 1]$. On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1\}$ suit la *loi de Bernoulli* de paramètre p lorsque

$$\mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Si tel est le cas, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Remarques

- Si $p \in [0, 1]$, il est courant de poser $q \coloneqq 1 - p \in [0, 1]$.
- Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, alors $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
- Toute variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1\}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \coloneqq \mathbb{P}(X = 1)$. En particulier, si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est un évènement, alors $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \coloneqq \mathbb{P}(A)$.
- On dit qu'une variable aléatoire Y à valeurs dans $\{-1, 1\}$ suit une loi de Rademacher lorsque

$$\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

Exemple

- On considère l'expérience aléatoire d'un tir de penalty dans un match de foot. La variable aléatoire $X : \Omega \to \{0, 1\}$ décrit le résultat de ce tir : 1 si le penalty est réussi et 0 si le penalty est manqué. X suit donc une loi de Bernoulli dont le paramètre p est estimé, selon les joueurs, entre 70% et 90%.

Définition 21.1.24: Loi binomiale

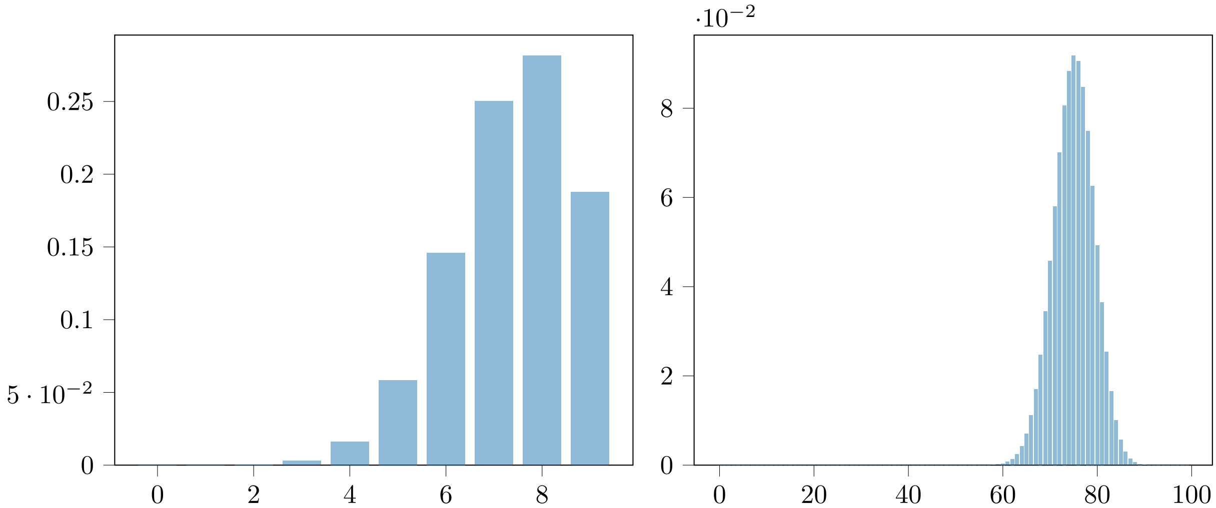
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$. On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ suit la *loi binomiale* de paramètre (n, p) lorsque

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Si tel est le cas, on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Remarques

- La loi binomiale $\mathcal{B}(1, p)$ n'est autre que la loi de Bernoulli de paramètre p.
- Si X suit une loi binomiale de paramètre (n, p) où $p \in]0, 1[$, alors $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.



Au début de ce chapitre, nous avons décrit des situations probabilistes en définissant proprement un univers Ω ainsi qu'une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω. Mais en avançant dans les exercices, nous nous sommes éloignés de l'univers Ω pour décrire désormais notre expérience à l'aide de variables aléatoires. C'est ce que nous ferons de plus en plus. La description de notre problème probabiliste se fera par la donnée d'une ou plusieurs variables aléatoires dont nous donnerons les lois, plutôt que de nous concentrer sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Cette abstraction nous sera très utile. Par exemple, si on lance un dé à 6 faces, on a envie de choisir $\Omega_1 = [\![1, 6]\!]$ muni de la probabilité uniforme. Mais si on lance deux fois le dé, l'univers $\Omega_2 = [\![1, 6]\!]^2$ muni de la loi uniforme semble plus approprié. Toute probabilité d'un évènement faisant intervenir les deux lancers de dés doit être calculée dans le cadre de l'univers Ω_2. Cependant Ω_1 nous suffit si on s'intéresse uniquement au premier lancer. Pour autant, doit-on changer d'univers à chaque fois qu'on change de question ? La réponse des probabilistes à ce problème consiste à négliger une bonne fois pour toutes l'univers Ω. Par exemple, si un exercice vous met dans la situation « On lance un dé à 6 faces et on note X la face obtenue », vous pouvez affirmer que X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$ sans évoquer l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.

Cependant, les mathématiciens se demandent souvent si les objets qu'ils manipulent existent bien. En prépa, c'est un problème que nous pourrons le plus souvent ignorer. Mais, lorsque l'on souhaite travailler avec la rigueur que nous permettent les mathématiques, il est important de démontrer que les espaces probabilisés dont nous parlons existent bien. De nombreux théorèmes, qui ne sont pas au programme de prépa, nous permettent de justifier l'existence de tels espaces. Par exemple, si E est un ensemble fini et $(p_x)_{x\in E}$ est une distribution de probabilités sur E, on peut montrer qu'il existe bien un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{P}(X = x) = p_x.$$

21.2 Dépendance des évènements

21.2.1 Probabilité conditionnelle

On se donne une expérience aléatoire associée à un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. Si on réalise n fois cette expérience aléatoire et qu'on compte le nombre de fois n_B où l'évènement B a été réalisé ainsi que le nombre de fois $n_{A\cap B}$ parmi ces réalisations où l'évènement A a aussi été réalisé, alors

$$\frac{n_{A\cap B}}{n_B} = \frac{n_{A\cap B}}{n} \cdot \frac{n}{n_B} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

On appelle ce nombre, probabilité de A sachant B.

Définition 21.2.1

Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un évènement de probabilité non nulle. Pour tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle *probabilité de A sachant B* le nombre

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Proposition 21.2.2

Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un évènement de probabilité non nulle. Alors l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_B : & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0, 1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}(A|B) \end{array}$$

est une probabilité sur Ω.

Remarque

⇨ Attention, bien qu'on écrive $\mathbb{P}(A|B)$, $A|B$ n'est pas un évènement. La notation $\mathbb{P}_B(A)$ protège contre cette erreur.

21.2.2 Formule des probabilités totales

Proposition 21.2.3: Formule des probabilités totales

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'évènements. Alors, pour tout évènement B

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i).$$

Remarques

- Dans cette formule, par convention, on remplacera $\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$ par 0 lorsque $\mathbb{P}(A_i) = 0$.
- C'est cette formule qui se cache derrière les arbres de probabilité utilisés dans le secondaire. Afin d'aborder des exercices plus complexes, il est important de ne plus recourir à ces arbres et d'utiliser directement la formule des probabilités totales.

Exercice 8

- Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules noires et $b \in \mathbb{N}^*$ boules blanches. On tire deux boules successivement sans remise. Avec quelle probabilité la deuxième boule tirée est-elle blanche ?

Proposition 21.2.4: Formule des probabilités composées

Soit $A_1, \ldots, A_n$ des évènements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Exercices 9

- Une urne contient $2n$ boules dont n noires et n blanches. On en tire 3 boules successivement. Avec quelle probabilité les tire-t-on dans l'ordre « noire, blanche, noire » si les tirages se font avec remise ? Et s'ils se font sans remise ?
- Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On y effectue m tirages successifs. À chaque tirage, la boule est choisie avec une probabilité uniforme sur toutes les boules présentes. Avant le tirage suivant, on replace dans l'urne la boule tirée et on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur. Pour tout $n \in [\![1, m]\!]$, on désigne par X_n le nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.
  1. Déterminer la loi de X_1, la loi de X_2.
  2. Calculer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$.
  3. En déduire, par récurrence, la loi de X_n.

21.2.3 Formule de Bayes

Proposition 21.2.5: Formule de Bayes

Soit A et B deux évènements de probabilité non nulle. Alors

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \cdot \mathbb{P}(B|A).$$

Remarque

- Si de plus $(C_1, \ldots, C_n)$ forme un système complet d'évènements

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_i)\mathbb{P}(B|C_i)} \cdot \mathbb{P}(B|A).$$

Exercice 10

- Un laboratoire pharmaceutique indique pour un test permettant de détecter une maladie, sa sensibilité α qui est la probabilité que le test soit positif si le sujet est malade, et sa spécificité β qui est la probabilité que le test soit négatif si le sujet est sain. Sachant qu'en moyenne il y a un malade sur 1000 personnes, calculer la probabilité pour que vous soyez un sujet sain alors que votre test est positif. Faites une application numérique pour $\alpha \coloneqq 98\%$ et $\beta \coloneqq 97\%$.

21.2.4 Indépendance

Définition 21.2.6

On dit que deux évènements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont *indépendants* lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Remarques

- Si A et B sont deux évènements tels que B est de probabilité non nulle, alors A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

⇨ Il est important de ne pas confondre les notions d'incompatibilité et d'indépendance. Notons d'ailleurs que la notion d'incompatibilité ne dépend pas de la loi de probabilité utilisée alors que la notion d'indépendance en dépend.

Proposition 21.2.7

Soit A et B deux évènements indépendants. Alors A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Remarque

⇨ On en déduit que si A et B sont indépendants, il en est de même pour $\bar{A}$ et B, ainsi que pour $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

Définition 21.2.8

On dit que les évènements $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont *mutuellement indépendants* lorsque, quel que soit $I \subset [\![1, n]\!]$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarques

⇨ Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. Autrement dit

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Cependant, comme le montre le prochain exercice, des évènements peuvent être deux à deux indépendants sans être mutuellement indépendants.

⇨ Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont mutuellement indépendants, alors $B_1 \in \{A_1, \bar{A}_1\}, \ldots, B_n \in \{A_n, \bar{A}_n\}$ sont mutuellement indépendants.

Exercice 11

⇨ On lance successivement deux dés équilibrés. On modélise cela en prenant $\Omega := [\![1, 6]\!]^2$ que l'on munit de la probabilité uniforme. On considère les évènements suivants :
— $A :=$ « Le premier dé est pair ».
— $B :=$ « Le second dé est impair ».
— $C :=$ « La somme des deux dés est paire ».
Sont-ils deux à deux indépendants ? Sont-ils mutuellement indépendants ?

Définition 21.2.9

— On dit que deux variables aléatoires $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ sont *indépendantes* lorsque quelles que soient les parties $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$, les évènements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.
— On dit que n variables aléatoires $X_1 : \Omega \to E_1, \ldots, X_n : \Omega \to E_n$ sont *mutuellement indépendantes* lorsque quelles que soient les parties $A_1 \in \mathcal{P}(E_1), \ldots, A_n \in \mathcal{P}(E_n)$, les évènements $(X_1 \in A_1), \ldots, (X_n \in A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont mutuellement indépendants.

Remarques

⇨ Si X et Y sont indépendantes, on note $X \perp\!\!\!\perp Y$.

⇨ Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont deux à deux indépendantes. Cependant, la réciproque est fausse. Lorsqu'on parle de variables aléatoires indépendantes sans plus de précision, il faut comprendre que les variables aléatoires sont mutuellement indépendantes.

Proposition 21.2.10

Soit $X_1 : \Omega \to E_1, \ldots, X_n : \Omega \to E_n$, n variables aléatoires. Alors, elles sont mutuellement indépendantes si et seulement si

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}((X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)) = \mathbb{P}(X = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

Remarque

⇨ Soit $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{P}(\Omega)$. Alors $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si et seulement si les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_1}, \ldots, \mathbb{1}_{A_n}$ sont mutuellement indépendantes.

Exercice 12

⇨ Soit X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que les évènements $(X = Y)$ et $(Y = Z)$ soient indépendants.

Proposition 21.2.11: Lemme des coalitions

— Soit $X_1 : \Omega \to E_1, \dots, X_n : \Omega \to E_n$, des variables aléatoires mutuellement indépendantes et

$$f : E_1 \times \cdots \times E_m \to F, \qquad g : E_{m+1} \times \cdots \times E_n \to G$$

deux fonctions. Alors, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m) : \Omega \to F$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n) : \Omega \to G$ sont indépendantes.

— Soit $A_1, \dots, A_n$ des évènements mutuellement indépendants. Si B est un évènement défini à partir des évènements $A_1, \dots, A_m$ et C est un évènement défini à partir des évènements $A_{m+1}, \dots, A_n$, alors B et C sont indépendants.

Remarques

⇨ Cet énoncé se généralise facilement à un nombre fini de coalitions et nous assure que les variables aléatoires et les évènements obtenus sont mutuellement indépendants.

⇨ Supposons que l'on lance n fois une pièce et que les n lancers sont indépendants. Si $p, q \in \mathbb{N}$ sont tels que $p+q = n$, alors la variable aléatoire Y donnant le nombre de pile lors des p premiers lancers est indépendante de la variable aléatoire Z donnant le nombre de pile lors des q derniers lancers.

Exercice 13

⇨ Soit $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on pose $Y_i \coloneqq X_i X_{i+1}$.

1. Montrer que les variables $Y_1, \dots, Y_{n-1}$ sont deux à deux indépendantes.
2. Sont-elles mutuellement indépendantes ?

21.2.5 Loi d'une somme

Proposition 21.2.12

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ deux variables aléatoires indépendantes. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k).$$

Remarque

⇨ Plus généralement, si $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ sont deux variables dont on ne fait aucune hypothèse d'indépendance

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = n - k)).$$

Proposition 21.2.13

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ deux variables aléatoires indépendantes. On suppose qu'il existe $p \in [0,1]$ et $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$. Alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

Proposition 21.2.14

Soit $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \{0,1\}$ des variables de Bernoulli mutuellement indépendantes de même paramètre $p \in [0,1]$. Alors

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p).$$

Exercice 14

⇨ Deux joueurs lancent une pièce de monnaie équilibrée n fois chacun. Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de fois pile. En déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.

21.3 Exercices

Espace probabilisé

Espace probabilisé

Exercice 1 : Exercice

Soit A et B deux évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Montrer que

$$\sqrt{\mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(A \cup B)} \leqslant \frac{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}{2}$$

et étudier les cas d'égalité.

Exercice 2 : Exercice

On permute aléatoirement les lettres du mot « Baobab ». Avec quelle probabilité le mot obtenu est-il encore « Baobab » ?

Exercice 3 : Exercice

Expliquer pourquoi, lorsqu'on lance 3 dés simultanément, on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9, alors que ces deux sommes peuvent être obtenues de 6 manières chacune.

Exercice 4 : Exercice

On lance 4 fois de suite un dé équilibré à 6 faces. Avec quelle probabilité obtient-on :

1. Au moins un 6.
2. Exactement un 6.
3. Au moins 2 faces identiques.

Exercice 5 : Exercice

Dans un lot de 20 yaourts, il y en a 3 qui ont dépassé la date de péremption. On extrait au hasard et simultanément 4 yaourts. Quelle est la probabilité qu'un seul de ces yaourts ait dépassé la date de péremption ?

Exercice 6 : Exercice

On place aléatoirement n boules indiscernables dans n urnes discernables. Calculer la probabilité qu'une seule urne soit vide.

Exercice 7 : Exercice

On lance n fois une pièce équilibrée. On appelle changement un lancer qui donne un résultat différent du précédent. Calculer pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$ la probabilité pour qu'il y ait k changements.

Variable aléatoire

Lois usuelles

Exercice 8 : Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, 6n]\!]$. Déterminer la loi de

$$\cos\left(\frac{X\pi}{3}\right).$$

Dépendance des évènements

Probabilité conditionnelle

Exercice 9 : Exercice

Un train contient n places numérotées et n voyageurs possèdent un billet. Le premier voyageur monte dans le train, mais il a oublié son billet et se place donc au hasard. Puis chaque personne s'installe à sa place si elle est libre et choisit une place libre au hasard sinon. Quelle est la probabilité que la dernière personne se trouve à sa place ?

Exercice 10 : Exercice

n personnes numérotées de 1 à n se transmettent dans cet ordre une information binaire. Chaque personne transforme l'information reçue en son contraire avec la probabilité $p \in]0,1[$ et la transmet fidèlement avec la probabilité $1-p$. Quelle est la probabilité que l'information correcte parvienne à la n-ième personne ?

Exercice 11 : Exercice

On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$ où l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis on réalise p tirages avec remise dans l'urne choisie.

1. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules blanches ?
2. Déterminer la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 12 : Exercice

Soit $\mathcal{G}$ un ensemble fixé de cardinal N et $\mathcal{M}$ une partie fixée de $\mathcal{G}$ de cardinal m. L'ensemble des parties de $\mathcal{G}$ est muni de la probabilité uniforme. On fixe $n \leqslant N$.

1. Soit $k \in [\![0, \min(n,m)]\!]$. Quelle est la probabilité p_k qu'une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{G}$ de cardinal n intersecte $\mathcal{M}$ selon un ensemble de cardinal k ?
2. Le cardinal moyen de l'intersection d'une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{G}$ de cardinal n avec $\mathcal{M}$ est donc
$$\sum_{k=0}^{\min(n,m)} kp_k.$$
Calculer ce nombre moyen.
3. Un étang contient N grenouilles. On cherche à estimer N. Pour cela, on commence par pêcher m grenouilles que l'on marque puis que l'on rejette à l'eau. Quelques jours plus tard, on pêche n grenouilles. Montrer que l'on peut estimer N.

Exercice 13 : Exercice

On considère une urne contenant n boules numérotées. Les nombres inscrits sur les boules sont des réels deux à deux distincts sur lesquels on ne sait rien de plus. On réalise un tirage sans remise dans l'urne avec l'objectif de déterminer le maximum M des nombres inscrits sur les boules. Comme on n'a pas le temps de tirer toutes les boules (disons que n est trop grand), on opte pour la stratégie suivante : on choisit un entier $p \in [\![1, n-1]\!]$, on tire p boules successivement et sans remise et on mémorise le maximum M_p que l'on a vu parmi ces p boules. On continue alors à tirer des boules, mais on s'arrête dès que l'on a trouvé un nombre supérieur à M_p.

1. Quelle est la probabilité $P_{n,p}$ que l'on trouve ainsi le maximum M.
2. Si $n = 4$, quelle valeur de p a-t-on intérêt à choisir ?
3. Soit $\alpha \in]0,1]$. On choisit p en fonction de n (on le notera donc p_n) de manière à ce que
$$\frac{p_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha.$$
(α représente donc asymptotiquement la proportion de boules que l'on commence par tirer). Montrer que P_{n,p_n} tend vers $-\alpha \ln(\alpha)$ lorsque $n \to +\infty$.
4. Quelle valeur de α a-t-on intérêt à choisir ?

Formule des probabilités totales

Exercice 14 : Monthy Hall

Dans une fête foraine, on vous propose le jeu suivant : trois verres opaques sont retournés devant vous, dont l'un seulement abrite une bille, et vous devez deviner lequel.

1. Quelle est la probabilité de deviner juste ?
2. Pris de pitié devant votre malchance à répétition, le maître du jeu décide de vous donner un coup de pouce. Après votre réponse, il vous indique, parmi les deux verres que vous n'avez pas désignés, une verre qui ne contient pas la bille et vous propose de revoir votre réponse. Préférez-vous confirmer votre réponse initiale ou la modifier ?

Exercice 15 : Exercice

Un horticulteur dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an. Pour chaque plante, la première année, la probabilité de donner une fleur rose est de $3/4$, celle de donner une fleur blanche est de $1/4$. Puis les années suivantes, pour tout entier naturel n non nul :

— Si l'année n, la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n+1$, elle donnera une fleur rose.

— Si l'année n, la plante a donné une fleur blanche, alors l'année $n+1$, elle donnera de façon équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche.

1. Quelle est la probabilité que la plante ne donne que des fleurs roses pendant les n premières années ?
2. Quelle est la probabilité que la plante ne donne que des fleurs blanches pendant les n premières années ?
3. On note p_n la probabilité de l'évènement « La plante a donné une fleur rose l'année n ». Calculer p_n, puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 16 : Urnes d'Ehrenfest

On considère deux urnes U_1 et U_2. Chaque urne contient une boule. À chaque étape, on choisit une boule au hasard et on la change d'urne. Pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note E_n^k l'évènement « Il y a k boules dans l'urne U_1 après l'étape n ». On note

$$a_n \coloneqq \mathbb{P}\left(E_n^0\right), \quad b_n \coloneqq \mathbb{P}\left(E_n^1\right), \quad c_n \coloneqq \mathbb{P}\left(E_n^2\right), \quad \text{et} \quad X_n \coloneqq (a_n, b_n, c_n)^\top.$$

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Calculer A^2 et A^3.
3. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 17 : Jinko

Jinko le chaton a trois passions dans la vie : Manger, Dormir et Jouer. On peut considérer qu'il pratique ces activités par tranches de 5 minutes.

— Après 5 minutes de repas, il continue de manger les 5 minutes suivantes avec une probabilité de $1/2$. Sinon, il se met à jouer.

— Après 5 minutes de sommeil, il continue de dormir les 5 minutes suivantes avec une probabilité de $3/4$. Sinon, il a faim au réveil et va manger.

— Après 5 minutes de jeu, soit il est en appétit et mange les 5 minutes suivantes avec une probabilité de $1/4$, soit il est fatigué et s'endort.

L'expérience que l'on considère est une journée de Jinko de $5(m+1)$ minutes. Sur la tranche d'indice 0 des 5 premières minutes de la journée, Jinko se lève et va petit-déjeuner. Pour tout $n \in [\![0, m]\!]$, on note $A_n : \Omega \to \{M, D, J\}$ la variable aléatoire donnant l'activité de Jinko sur la tranche de 5 minutes d'indice n de la journée. Pour tout $n \in [\![0, m]\!]$, on pose

$$X_n \coloneqq \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n = M) \\ \mathbb{P}(A_n = D) \\ \mathbb{P}(A_n = J) \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in [\![0, m-1]\!], \quad X_{n+1} = BX_n.$$

2. (a) Déterminer les valeurs propres de B, c'est-à-dire les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $B - \lambda I_3$ n'est pas inversible. On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ces valeurs et on pose $P \coloneqq (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$.
   (b) Montrer que $P(B) = 0$. En déduire une expression de B^n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire les limites de

$$\mathbb{P}(A_n = M), \qquad \mathbb{P}(A_n = D), \qquad \mathbb{P}(A_n = J)$$

   lorsque n tend vers $+\infty$.

Formule de Bayes

Exercice 18 : Exercice

On prend un dé au hasard parmi un lot de 100 dés dont on sait que 25 sont pipés : pour ces dés, la probabilité d'obtenir 6 est 1/2.

1. On lance le dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. Même question si l'on fait n lancers et que l'on obtient 6 à chaque fois.

Indépendance

Exercice 19 : Exercice

Un concours consiste à passer 3 épreuves indépendantes. On a 80% de chances de réussir l'épreuve 1, 60% pour l'épreuve 2 et 25% pour l'épreuve 3. On est reçu au concours si on réussit au moins deux épreuves sur trois (n'importe lesquelles). Quelle est la probabilité de réussir le concours ?

Exercice 20 : Exercice

On dispose d'un dé à quatre faces non pipé. On réalise n lancers indépendants. On note T l'évènement « Lors des n lancers, les quatre numéros sont sortis ». En utilisant la formule du crible, calculer la probabilité de T, puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 21 : Formule du crible

On lance un dé équilibré à 6 faces n fois de suite.

1. Calculer la probabilité de l'événement « La face i n'apparait jamais » pour tout $i \in [\![1,6]\!]$.
2. Calculer la probabilité de l'événement « Chacune des faces 1, 2 et 3 apparait au moins une fois ».

Exercice 22 : Secret santa

Les n convives ont tous posé un cadeau près du grand sapin. À minuit, on distribue au hasard un cadeau à chaque convive, éventuellement celui qu'il a apporté.

1. À combien estimez-vous la probabilité de l'événement E_n « Personne n'a reçu son propre cadeau » lorsque n est grand ?

On appelle *dérangement* de $[\![1,n]\!]$ toute permutation sans point fixe de $[\![1,n]\!]$. On notera D_n l'ensemble des dérangements de $[\![1,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, F_k l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ qui fixent k.

2. Montrer que
$$|D_n| = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
3. Calculer la probabilité de l'événement E_n de la première question, puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^x.$$

Loi d'une somme

Exercice 23 : Centre d'appels

Dans un centre d'appels, un employé effectue successivement n appels téléphoniques vers n correspondants distincts dont chacun décroche avec une probabilité $p \in [0,1]$.

1. Déterminer la loi du nombre N_1 de correspondants qui ont décroché.
2. L'employé rappelle plus tard les $n - N_1$ correspondants qui n'ont pas décroché lors de la première série d'appels. On note N_2 le nombre de correspondants qui ont décroché cette fois. Enfin, on pose $N := N_1 + N_2$. Cette variable aléatoire donne le nombre total de personnes qui ont été contactées avec succès.
   (a) Pour tout $k, i \in [\![0,n]\!]$, calculer $\mathbb{P}(N = k | N_1 = i)$.
   (b) En déduire la loi suivie par N.

Chapitre 22

Fractions rationnelles

22.1 Fraction rationnelle

22.1.1 Représentants d'une fraction rationnelle

Définition 22.1.1

Soit $\mathbb{K}$ un corps. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ étant intègre, on admet qu'il existe un unique corps noté $\mathbb{K}(X)$ et appelé *corps des fractions rationnelles*, possédant les propriétés suivantes :
- $\mathbb{K}[X]$ est un sous-anneau du corps $\mathbb{K}(X)$.
- Pour tout élément F de $\mathbb{K}(X)$, il existe un couple de polynômes (A, B) avec $B \neq 0$ tel que

$$F = \frac{A}{B}$$

Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés *fractions rationnelles* à coefficients sur le corps $\mathbb{K}$.

Remarque

⇨ Plus généralement, si A est un anneau intègre, il existe un unique corps $\mathbb{K}$ tel que :
- A est un sous-anneau de $\mathbb{K}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{K}$, il existe un couple $(a, b) \in A^2$ tel que $b \neq 0$ et $x = a/b$.

Ce corps est appelé *corps des fractions* de A. Le corps des fractions de $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Q}$, celui de $\mathbb{K}[X]$ est $\mathbb{K}(X)$.

Définition 22.1.2

Soit F une fraction rationnelle.

— On dit qu'un couple de polynômes (A, B) avec $B \neq 0$ est un *représentant* de F lorsque

$$F = \frac{A}{B}$$

— On dit que ce représentant est *irréductible* lorsque A et B sont premiers entre eux et qu'il est *unitaire* lorsque B est unitaire.

Exercice 1

⇨ Mettre sous forme irréductible les fractions rationnelles

$$\frac{X^2-1}{X^3-1} \quad \text{et} \quad \frac{X^2+X-2}{X^3-5X^2+8X-4}.$$

Proposition 22.1.3

Soit F une fraction rationnelle. Alors F admet un unique représentant irréductible unitaire (A, B). De plus :
— Les représentants de F sont les couples (QA, QB) où Q est un polynôme non nul.
— Les représentants irréductibles de F sont les couples $(\lambda A, \lambda B)$ où λ est un scalaire non nul.

22.1.2 Degré

Définition 22.1.4

Soit F une fraction rationnelle. L'entier relatif $\deg A - \deg B$ ne dépend pas de la représentation de F choisie ; on l'appelle *degré* de F.

Exemple

⇨ Par exemple

$$\deg\left(\frac{X+1}{X+2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \deg\left(\frac{X^2+1}{X^3+1}\right) = -1.$$

Proposition 22.1.5

Soit F et G deux fractions rationnelles.
— Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $\deg F \leqslant n$ et $\deg G \leqslant n$, alors

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \deg(\lambda F + \mu G) \leqslant n.$$

— $\deg FG = \deg F + \deg G$

22.1.3 Racines, pôles et substitution

Définition 22.1.6

Soit F une fraction rationnelle et (A, B) un représentant irréductible de F. On dit qu'un scalaire α est
— une *racine* de F lorsque α est racine de A. Dans ce cas on définit l'*ordre de multiplicité de la racine* α comme son ordre de multiplicité en tant que racine de A.
— un *pôle* de F lorsque α est racine de B. Dans ce cas on définit l'*ordre de multiplicité du pôle* α comme son ordre de multiplicité en tant que racine de B.

Exercice 2

⇨ Donner les racines et les pôles de la fraction rationnelle

$$F := \frac{X^2+X-2}{X^3-5X^2+8X-4}.$$

Définition 22.1.7

Soit F une fraction rationnelle sur le corps $\mathbb{K}$ et α un scalaire. Si α n'est pas un pôle de F, on définit $F(\alpha)$ par

$$F(\alpha) \coloneqq \frac{A(\alpha)}{B(\alpha)}$$

où (A, B) est un représentant de F tel que α ne soit pas racine de B.

Proposition 22.1.8

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, F_1 et F_2 deux fractions rationnelles n'admettant pas α pour pôle et λ, $\mu \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda F_1 + \mu F_2$ et $F_1 F_2$ n'admettent pas α pour pôle et

$$\begin{array}{rcl} (\lambda F_1 + \mu F_2)(\alpha) & = & \lambda F_1(\alpha) + \mu F_2(\alpha) \\ (F_1 F_2)(\alpha) & = & F_1(\alpha) F_2(\alpha) \end{array}$$

Définition 22.1.9

Soit F une fraction rationnelle. Si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des pôles de F, on définit la fonction rationnelle $\tilde{F} : \mathbb{K} \backslash \mathcal{P} \to \mathbb{K}$ par

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \mathcal{P}, \quad \tilde{F}(x) \coloneqq F(x)$$

22.1.4 Conjugaison sur $\mathbb{C}(X)$

Définition 22.1.10

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. On définit la fraction rationnelle $\overline{F}$ par

$$\overline{F} \coloneqq \frac{\overline{A}}{\overline{B}}$$

Proposition 22.1.11

Soit $F, G \in \mathbb{C}(X)$.
- Si λ, $\mu \in \mathbb{C}$, alors

$$\begin{array}{rcl} \overline{\lambda F + \mu G} & = & \overline{\lambda}\,\overline{F} + \overline{\mu}\,\overline{G} \\ \overline{FG} & = & \overline{F}\,\overline{G} \end{array}$$

- $\deg \overline{F} = \deg F$.

Proposition 22.1.12

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Alors

$$\overline{\overline{F}} = F \qquad \text{et} \qquad \left[F \in \mathbb{R}(X) \iff \overline{F} = F\right].$$

Proposition 22.1.13

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors
- α est racine de F d'ordre $\omega \in \mathbb{N}$ si et seulement si $\overline{\alpha}$ est racine de $\overline{F}$ d'ordre ω.
- α est pôle de F d'ordre $\omega \in \mathbb{N}$ si et seulement si $\overline{\alpha}$ est pôle de $\overline{F}$ d'ordre ω.

Remarque

⇨ En particulier, si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de $F \in \mathbb{R}(X)$, alors $\overline{\alpha}$ est une racine de F et son ordre relativement à F est le même que celui de α. De même, si α est un pôle de F, alors $\overline{\alpha}$ est un pôle de F et son ordre relativement à F est le même que celui de α.

22.2 Décomposition en éléments simples

22.2.1 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}(X)$

Définition 22.2.1

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Alors il existe un unique couple (E, G) constitué d'un polynôme E appelé *partie entière* de F, et d'une fraction rationnelle G de degré strictement négatif tel que

$$F = E + G$$

En pratique E s'obtient comme le quotient de la division euclidienne de A par B où (A, B) est un représentant de F.

Exercice 3

⇨ Calculer la partie entière de

$$F := \frac{X^3 + 2X^2 + 1}{X^2 + 1}.$$

Proposition 22.2.2: Décomposition en éléments simples

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On écrit F sous forme irréductible et on décompose son dénominateur en produit de polynômes irréductibles $P_1, \ldots, P_r$ deux à deux distincts

$$F = \frac{A}{B} = \frac{A}{\lambda \prod_{k=1}^{r} P_k^{\alpha_k}}.$$

Alors, il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ ainsi qu'une unique famille de polynômes $R_{k,l} \in \mathbb{K}[X]$ avec $k \in [\![1, r]\!]$ et $l \in [\![1, \alpha_k]\!]$ tels que

$$F = E + \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{\alpha_k} \frac{R_{k,l}}{P_k^l}$$

et $\deg R_{k,l} < \deg P_k$.

22.2.2 Cas où le dénominateur est scindé

Proposition 22.2.3

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On écrit F sous forme irréductible et on suppose que son dénominateur est scindé

$$F = \frac{A}{B} = \frac{A}{\lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{\omega_k}}.$$

Alors, il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ ainsi qu'une unique famille de scalaires $a_{k,l} \in \mathbb{K}$ avec $k \in [\![1, r]\!]$ et $l \in [\![1, \omega_k]\!]$ tels que

$$F = E + \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{\omega_k} \frac{a_{k,l}}{(X - \alpha_k)^l}.$$

Remarque

⇨ En reprenant les notations de la proposition ci-dessus, on dit que

$$\sum_{l=1}^{\omega_k} \frac{a_{k,l}}{(X - \alpha_k)^l}$$

est la *partie polaire* de F relative au pôle α_k.

Proposition 22.2.4

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle admettant $\alpha \in \mathbb{K}$ pour pôle simple

$$F = \frac{A}{B} = \frac{A}{(X - \alpha)C} \qquad \text{avec } C(\alpha) \neq 0.$$

Alors, la partie polaire relative au pôle α est

$$\frac{a}{X-\alpha}$$

où a est donné par les deux formules équivalentes

$$a = \frac{A(\alpha)}{C(\alpha)}, \qquad a = \frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}.$$

Exercices 4

⇨ Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

$$\frac{X+3}{(X-1)(X+2)}, \qquad \frac{1}{X^2+1}, \qquad \frac{1}{X^n-1}.$$

⇨ Calculer la dérivée n-ième de la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}, \quad f(x) := \frac{x+3}{(x-1)(x+2)}.$$

Proposition 22.2.5

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle admettant $\alpha \in \mathbb{K}$ pour pôle double

$$F = \frac{A}{B} = \frac{A}{(X-\alpha)^2 C} \qquad \text{avec } C(\alpha) \neq 0.$$

Alors, la partie polaire relative au pôle α est

$$\frac{a_1}{X-\alpha} + \frac{a_2}{(X-\alpha)^2}$$

où a_2 est donné par

$$a_2 = \frac{A(\alpha)}{C(\alpha)}.$$

Exercices 5

⇨ Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples

$$\frac{X+1}{X^2(X-1)}, \qquad \frac{X^2+X+3}{X(X-1)^3}.$$

⇨ Calculer la limite, si elle existe, de la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}.$$

Proposition 22.2.6

Soit P un polynôme scindé de $\mathbb{K}[X]$. On écrit

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-\alpha_k}.$$

Remarque

⇨ Si P un polynôme scindé de $\mathbb{K}[X]$. On écrit

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{\omega_k}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ sont deux à deux distincts et $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\omega_k}{X - \alpha_k}.$$

22.2.3 Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le dénominateur n'est pas scindé

Proposition 22.2.7

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$. On écrit F sous forme irréductible et on décompose son dénominateur en produit de polynômes irréductibles

$$F = \frac{A}{\lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{\omega_k} \prod_{l=1}^{s} (X^2 + b_l X + c_l)^{\omega'_l}}.$$

Alors, il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{R}[X]$, ainsi que des uniques familles $(a_{k,i})$, $(b_{l,j})$ et $(c_{l,j})$ de réels tels que

$$F = E + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{\omega_k} \frac{a_{k,i}}{(X - \alpha_k)^i} \right) + \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{\omega'_l} \frac{b_{l,j} X + c_{l,j}}{(X^2 + b_l X + c_l)^j} \right).$$

Remarque

⇨ Pour décomposer une fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$, il est possible d'effectuer sa décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ puis de regrouper les parties polaires ayant des pôles conjugués. Le plus souvent, on préfèrera cependant une décomposition directe dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 6

⇨ Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

$$\frac{1}{X(X^2+1)}, \qquad \frac{1}{X(X^2+X+1)}, \qquad \frac{X^2+2}{X^2(X^2+1)}$$

$$\frac{1}{X^4+1}, \qquad \frac{X^7+2}{(X^2+X+1)^3}, \qquad \frac{1}{X^{2n}-1}.$$

22.3 Primitive d'expression rationnelle

22.3.1 Fractions rationnelles

Exercice 7

⇨ Calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}, \qquad \int \frac{2x+1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}.$$

22.3.2 Fractions rationnelles en e^x

Pour ces fonctions, il suffit d'effectuer le changement de variable $u := \mathrm{e}^x$ pour se ramener au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle.

Exercice 8

⇨ Calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

22.3.3 Fractions rationnelles en $\cos x$, $\sin x$

Proposition 22.3.1: Règles de Bioche

Soit G une fraction rationnelle en $\cos x$, $\sin x$.

— Si $G(-x) = -G(x)$, il existe une fraction rationnelle F telle que
$$G(x) = F(\cos x)\sin x.$$
On est donc ramené, après le changement de variable $u = \cos x$, à un calcul de primitive d'une fraction rationnelle.

— Si $G(\pi - x) = -G(x)$, il existe une fraction rationnelle F telle que
$$G(x) = F(\sin x)\cos x.$$
On est donc ramené, après le changement de variable $u = \sin x$, à un calcul de primitive d'une fraction rationnelle.

— Si $G(\pi + x) = G(x)$, il existe une fraction rationnelle F telle que
$$G(x) = F(\tan x)\left(1 + \tan^2 x\right).$$
On est donc ramené, après le changement de variable $u = \tan x$, à un calcul de primitive d'une fraction rationnelle.

— Sinon, on effectue le changement de variable $u = \tan(x/2)$. En remarquant que
$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$
on est ramené à un calcul de primitive d'une fraction rationnelle.

Exercice 9

⇨ Calculer
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \cos(2x)}, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \sin(2x)}, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \cos x}.$$

22.3.4 Fractions rationnelles en $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$

Si $f(x)$ est une fraction rationnelle en $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$, alors c'est une fraction rationnelle en e^x. On peut donc calculer une primitive d'une telle fonction en posant $u := \mathrm{e}^x$.

Exercice 10

⇨ Calculer
$$\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x + 2}.$$

22.3.5 Fractions rationnelles en x et $\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$, en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Si f s'écrit
$$f(x) = F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$
où F est une fraction rationnelle à deux variables, le calcul d'une primitive de f se fait en effectuant le changement de variable
$$u := \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$
On a alors
$$x = \frac{du^n - b}{a - cu^n} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}x = G(u)\,\mathrm{d}u$$
où G est une fraction rationnelle. On est donc ramené au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle.

On souhaite désormais calculer une primitive d'une fonction f de la forme
$$f(x) = F\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$$
où F est une fraction rationnelle à deux variables.

— Si $aX^2 + bX + c$ admet une racine double réelle α (cas où $\Delta = 0$), on a $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\,|x - \alpha|$. L'expression est donc une fraction rationnelle sur chaque intervalle où $x - \alpha$ est de signe constant.

— Si $aX^2 + bX + c$ n'admet pas de racine réelle (cas où $\Delta < 0$), après mise sous forme canonique de $aX^2 + bX + c$ et changement de variable, on est ramené au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en $u, \sqrt{1 + u^2}$. Il suffit alors d'effectuer le changement de variable $u \coloneqq \operatorname{sh} v$ pour se ramener au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en $\operatorname{ch} v$, $\operatorname{sh} v$.

— Si $aX^2 + bX + c$ admet deux racines réelles (cas où $\Delta > 0$), après mise sous forme canonique de $aX^2 + bX + c$ et changement de variable, on est ramené au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en $u, \sqrt{1 - u^2}$ ou en $u, \sqrt{u^2 - 1}$. Dans le premier cas, on effectue le changement de variable $u \coloneqq \cos v$ alors que dans le second cas on effectue le changement de variable $u \coloneqq \pm \operatorname{ch} v$.

Exercice 11

⇨ Calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}, \qquad \int \operatorname{Arctan} \sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$

22.4 Exercices

Fraction rationnelle

Représentants d'une fraction rationnelle

Degré

Exercice 1 : Primitive

Montrer que la fraction rationnelle $F \coloneqq 1/X$ n'a pas de primitive dans $\mathbb{C}(X)$.

Racines, pôles et substitution

Exercice 2 : Valeurs prises par une fraction rationnelle

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle. On note $\mathcal{D}_F \coloneqq \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, où $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ sont les pôles de F, et on définit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_F & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & F(z). \end{array}$$

On suppose que F n'est pas constante. Montrer que $f(\mathcal{D}_F) = \mathbb{C}$ ou qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(\mathcal{D}_F) = \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$.

Conjugaison sur $\mathbb{C}(X)$

Décomposition en éléments simples

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}(X)$

Cas où le dénominateur est scindé

Exercice 3 : Décomposition en éléments simples

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ les fractions suivantes

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}, \qquad \frac{1}{(X-1)(X^n - 1)}.$$

Exercice 4 : Une somme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Exercice 5 : Une somme de série

Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{3k^2 - 1}{(k-1)^2 k^2 (k+1)^2}.$$

Exercice 6 : Décomposition en éléments simples

On considère la fraction

$$F \coloneqq \frac{1}{(X^3 - 1)^3}$$

que l'on souhaite décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$.

1. Calculer la partie polaire de F relative au pôle 1.
2. En étudiant les symétries de F, en déduire sa décomposition en éléments simples.

Exercice 7 : Autour de Chebyshev

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^n + \frac{1}{X^n} = P_n\left(X + \frac{1}{X}\right).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Décomposer $1/P_n$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 8 : Racines multiples de P'

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant.

1. On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}[X]$.
   (a) Calculer la décomposition en éléments simples de P'/P.
   (b) En déduire que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x)^2 \geqslant P(x)P''(x)$$
   avec égalité si et seulement si x est racine multiple de P.
   (c) Montrer que P' est scindé, puis montrer que toute racine multiple de P' est racine de P.
2. (a) Est-il vrai en général que toute racine multiple de P' est racine de P ?
   (b) Est-il vrai, sous l'hypothèse que P est scindé sur $\mathbb{R}$, que toute racine de P' est racine de P ?
3. On suppose que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x)^2 \geqslant P(x)P''(x).$$
   Montrer que P possède une racine réelle.

Exercice 9 : Théorème de Gauss-Lucas

1. Soit $P \in \mathbb{C}(X)$ non nul. Calculer la décomposition en éléments simples de $F := P'/P$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la valeur de
   $$\sum_{z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1-z}.$$
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant dont les racines sont $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$.
   (a) Montrer que pour toute racine $\alpha \in \mathbb{C}$ de P', il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \geqslant 0$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = 1$ et
   $$\alpha = \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_r z_r.$$
   (b) Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 10 : Calcul de dérivées n-ièmes

Calculer la dérivée n-ième de

$$x \mapsto \ln(x^2 - x + 2).$$

Exercice 11 : Majoration d'une dérivée n-ième

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\mathrm{Arctan}^{(n)} x\right| \leqslant (n-1)!.$$

Exercice 12 : Dérivée n-ième

On pose

$$R := \frac{1}{X^2+1}.$$

1. Décomposer R en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$, puis calculer $R^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$R^{(n)} = \frac{(-1)^n (n+1)!}{(X^2+1)^{n+1}} \prod_{k=1}^{n} \left(X - \mathrm{cotan}\, \frac{k\pi}{n+1}\right).$$

Cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et le dénominateur n'est pas scindé

Exercice 13 : Décomposition en éléments simples

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions suivantes

$$\frac{10X^3}{(X^2+1)(X^2-4)},\qquad \frac{X^4+1}{X^4+X^2+1},\qquad \frac{X^3-1}{(X-1)(X-2)(X-3)},$$
$$\frac{X^2}{(X^2+X+1)^2},\qquad \frac{(X^2+4)^2}{(X^2+1)(X^2-2)^2}.$$

Primitive d'expression rationnelle

Fractions rationnelles

Exercice 14 : Primitives de fractions rationnelles

Calculer, sur un domaine $\mathcal{D}$ que l'on précisera, les primitives des fonctions dont les expressions sont

$$\frac{1}{x^4-1},\qquad \frac{x^2}{x^3-1},\qquad \frac{x}{x^4+1}.$$

Fractions rationnelles en e^x

Fractions rationnelles en $\cos x$***,*** $\sin x$

Exercice 15 : Primitives de fractions rationnelles en $\cos, \sin$

Calculer sur un domaine $\mathcal{D}$ que l'on précisera les primitives des fonctions dont les expressions sont

$$\frac{1}{\cos x \sin^3 x},\qquad \frac{1}{\sin x+\cos x}.$$

Fractions rationnelles en $\operatorname{ch} x$***,*** $\operatorname{sh} x$

Fractions rationnelles en x ***et*** $\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$***, en*** x ***et*** $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Exercice 16 : Calcul de primitives

Calculer sur un domaine $\mathcal{D}$ que l'on précisera, les primitives des fonctions dont les expressions sont

$$\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},\qquad \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}.$$

Exercice 17 : Une intégrale impropre

Calculer la limite lorsque x tend vers $\pi/2$ par la gauche de

$$\int_0^x \sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t.$$

Chapitre 23

Séries

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

23.1 Série

23.1.1 Série

Définition 23.1.1

Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On appelle *série de terme général* u_n et on note $\sum u_n$ la suite (S_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Le terme S_n est appelé *somme partielle d'indice* n de la série.

Définition 23.1.2

On dit qu'une série $\sum u_n$ *converge* lorsque la suite de ses sommes partielles converge. Si c'est le cas, sa limite $l \in \mathbb{K}$ est appelée *somme* de la série. On la note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Dans le cas contraire, on dit qu'elle *diverge*.

Remarques

- ⇨ Si on change un nombre fini de termes de la suite (u_n), on ne change pas la nature de la série $\sum u_n$. Par contre, si elle converge, cela peut changer sa somme.
- ⇨ Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Exercice 1

⇨ Montrer que la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

converge et calculer sa somme.

Définition 23.1.3

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On définit la suite (R_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n := \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Le terme R_n est appelé *reste d'indice n* de la série.

Remarque

⇨ La suite (R_n) des restes converge vers 0.

Proposition 23.1.4

Soit $\sum u_n$ une série. Si elle est convergente, alors

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Par contraposée, si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, la série $\sum u_n$ est divergente. On dit qu'elle diverge *grossièrement*.

Remarque

⇨ Il est possible qu'une série diverge sans diverger grossièrement. Par exemple, si (u_n) est la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

alors, la série associée diverge alors que la suite (u_n) converge vers 0.

Proposition 23.1.5

La suite (u_n) et la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

Remarque

⇨ Si (u_n) est une suite, la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ est appelée *dérivée* de la suite (u_n). Par sommation télescopique

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k).$$

L'étude de la suite (u_n) se ramène donc à l'étude de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

Proposition 23.1.6

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors, la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Remarques

⇨ Attention, il est possible que la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ soit convergente sans que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ le soient. Avant d'écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

il faudra donc toujours vérifier que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ soient convergentes. Un tel oubli pourrait conduire à écrire des horreurs comme

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 &= \sum_{n=0}^{+\infty}(1+(-1)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 1 + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1). \end{aligned}$$

La dernière expression n'a en effet aucun sens car les deux séries sont grossièrement divergentes.

⇨ Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.

Proposition 23.1.7

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors la série

$$\sum z^n$$

converge si et seulement si $|z| < 1$. Si tel est le cas, sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Exercice 2

⇨ Soit (F_n) la suite de Fibonacci définie par

$$F_0 \coloneqq 0, \quad F_1 \coloneqq 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} \coloneqq F_{n+1} + F_n.$$

Démontrer l'existence puis calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{2^n}.$$

Proposition 23.1.8

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors la série

$$\sum \frac{z^n}{n!}$$

est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.$$

Exercice 3

⇨ Établir l'existence et calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!}.$$

23.1.2 Série à termes positifs

Définition 23.1.9

On dit qu'une série réelle $\sum u_n$ est à termes positifs lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 0.$$

Remarques

⇨ La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est croissante. Réciproquement, si (u_n) est une suite croissante, sa suite dérivée $(u_{n+1} - u_n)$ est une suite à termes positifs.

⇨ Puisque la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, les théorèmes de convergence sur les séries à termes positifs s'appliquent même si la série est à termes positifs à partir d'un certain rang. Bien entendu, des théorèmes similaires aux théorèmes que nous allons énoncer existent pour les séries à termes négatifs. Les théorèmes que nous allons énoncer dans cette section sont donc utiles pour étudier les séries de signe constant à partir d'un certain rang.

Proposition 23.1.10

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Proposition 23.1.11: Série de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, la série

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque

⇨ En particulier, la série harmonique (H_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

diverge. Une comparaison série intégrale permet de montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Exercices 4

⇨ Montrer que la série

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge et donner un équivalent de son reste.

⇨ Prouver la divergence et donner un équivalent des sommes partielles de la série

$$\sum \frac{1}{n \ln n}.$$

Proposition 23.1.12

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.$$

— Si la série $\sum v_n$ converge, alors il en est de même pour $\sum u_n$.
— Si la série $\sum u_n$ diverge, alors il en est de même pour $\sum v_n$.

Exercices 5

⇨ Donner la nature des séries

$$\sum \frac{\sin^2 n}{n^3}, \qquad \sum \frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{\sqrt{n}}.$$

⇨ Soit $r \in \mathbb{R}_+$. Déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{r^n}{n}$$

en fonction de r.

Proposition 23.1.13

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$$

et que la série $\sum v_n$ est convergente. Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Remarque

⇨ En particulier, pour des séries à termes positifs, si

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$$

et si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 6

⇨ Déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}.$$

Proposition 23.1.14

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles. On suppose que $\sum v_n$ est à termes positifs et que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

Alors la série $\sum u_n$ est à termes positifs à partir d'un certain rang et les deux séries sont de même nature.

Exercices 7

⇨ Établir la nature des séries suivantes

$$\sum \frac{1}{3n+1}, \qquad \sum \tan\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \sum \frac{1}{2^n - n}.$$

⇨ Donner la nature des séries

$$\sum \ln\left(\tan\frac{\pi n}{4n+1}\right), \qquad \sum \left[(\operatorname{th} n)^{\frac{1}{n}} - 1\right].$$

⇨ Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1).$$

La constante $\gamma \approx 0.577$ est appelée constante d'Euler.

23.1.3 Série absolument convergente

Définition 23.1.15

Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de $\mathbb{K}$. Si la série à termes positifs

$$\sum |u_n|$$

converge, alors la série $\sum u_n$ converge. On dit dans ce cas que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente*.

Remarque

⇨ Une série convergente qui n'est pas absolument convergente est appelée série *semi-convergente*.

Exercice 8

⇨ Montrer que la série

$$\sum \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$$

est convergente.

Proposition 23.1.16

Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\sum v_n$ une série à termes positifs telle que

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n).$$

Si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Remarque

⇨ En particulier, si (v_n) est une suite positive, si

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$$

et si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Proposition 23.1.17: Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de $\mathbb{K}$ ne s'annulant pas. On suppose que

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Alors
- Si $\omega < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
- Si $\omega > 1$, la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Remarque

⇨ Si $\omega = 1$, la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure. Dans ce cas, il peut être intéressant d'effectuer une comparaison avec une série de Riemann.

Exercices 9

⇨ Déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{n^4}{3^n}.$$

⇨ Soit $z \in \mathbb{C}$. Retrouver le fait que la série

$$\sum \frac{z^n}{n!}$$

est convergente.

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la série

$$\sum \left[\frac{n^2+2}{n^2+2n+1} - \left(a + \frac{b}{n}\right)\right]$$

soit convergente.

23.1.4 Série semi-convergente

Théorème 23.1.18: Théorème des séries alternées

Soit (u_n) une suite à termes positifs, décroissante et convergeant vers 0. Alors la série

$$\sum (-1)^n u_n$$

converge. De plus, si (R_n) est la suite des restes définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$ et $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

Remarques

⇨ La série

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

est convergente, mais n'est pas absolument convergente.

⇨ Les séries alternées permettent de construire des suites (u_n) et (v_n) qui sont équivalentes en $+\infty$ mais qui ne sont pas de même nature. Par exemple, si on définit les suites (u_n) et (v_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

alors (u_n) et (v_n) sont équivalentes en $+\infty$ bien que $\sum u_n$ soit convergente et que $\sum v_n$ soit divergente.

Exercices 10

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série
$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$
soit convergente.

⇨ Soit $\alpha > 0$. Discuter, selon α, de la nature de la série
$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

23.2 Exercices

Série

Série

Exercice 1 : Exercice

Établir la convergence et calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+2)n!}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(5n+1)}{3^n n!}.$$

Exercice 2 : Exercice

Soit (u_n) une suite positive décroissante tendant vers 0. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

On pourra considérer la suite de terme général $s_{2n} - s_n$. La réciproque est-elle vraie ?

Série à termes positifs

Exercice 3 : Exercice

Soit (u_n) une suite réelle positive, décroissante.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum 2^n u_{2^n}$ converge.
2. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de
$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}.$$

Série absolument convergente

Exercice 4 : Exercice

Déterminer la nature des séries suivantes.

$$\sum \frac{\ln(n)}{n^2}, \qquad \sum \frac{n!}{n^n}, \qquad \sum \left[\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right],$$
$$\sum \frac{1}{\binom{2n}{n}}, \qquad \sum \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}.$$

Exercice 5 : Exercice

Montrer que la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$$

converge vers un réel non nul.

Exercice 6 : Exercice

Donner la nature de la série de terme général
$$\frac{n^{2\lambda}}{\lambda^n + \ln n}$$
suivant $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 : Exercice

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Donner la nature de
$$\sum \left(\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[2]{n^2+an+b}\right).$$

Exercice 8 : Exercice

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on pose
$$S_r(x) \coloneqq \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}.$$

1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la somme $S_r(x)$ est-elle définie ?
2. Calculer $(1-x)S_{r+1}(x)$.
3. En déduire la valeur de $S_r(x)$.

Exercice 9 : Exercice

Montrer qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que
$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} = n + \frac{1}{2}\ln^2 n + l + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)\,.$$

Série semi-convergente

Exercice 10 : Exercice

On définit les suites (u_n) et (v_n) par
$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n \coloneqq \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n \coloneqq \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

1. Montrer que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$
2. Montrer que $\sum u_n$ converge et que $\sum v_n$ diverge.

Exercice 11 : Exercice

Déterminer les suites réelles (v_n) telles que pour toute suite réelle positive (u_n)
$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n v_n \text{ converge}\,.$$

Chapitre 24

Espaces euclidiens

24.1 Produit scalaire

24.1.1 Produit scalaire

Définition 24.1.1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit qu'une application

$$\langle .|. \rangle : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x|y \rangle \end{array}$$

est un *produit scalaire* lorsqu'elle est

— *bilinéaire*

$$\forall x,y,z \in E, \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \qquad \begin{array}{l} \langle x|\lambda y + \mu z\rangle = \lambda \langle x|y\rangle + \mu \langle x|z\rangle \\ \langle \lambda x + \mu y|z\rangle = \lambda \langle x|z\rangle + \mu \langle y|z\rangle \end{array}$$

— *symétrique*

$$\forall x,y \in E, \quad \langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$$

— *positive*

$$\forall x \in E, \quad \langle x|x\rangle \geqslant 0$$

— *définie*

$$\forall x \in E, \quad \langle x|x\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

On appelle espace *préhilbertien réel* tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Remarques

⇨ Le produit scalaire $\langle x|y\rangle$ est parfois noté $\langle x,y\rangle$, $(x|y)$, (x,y) ou $x \cdot y$.

⇨ Le caractère symétrique du produit scalaire fait qu'il suffit de montrer la linéarité par rapport à l'une des variables pour en déduire la bilinéarité.

⇨ Quel que soit $x \in E$, $\langle x|0\rangle = 0$ et $\langle 0|x\rangle = 0$.

Exercices 1

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $\langle .|. \rangle$ définie par

$$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle \coloneqq \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

⇨ On pose $E \coloneqq \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'application $\langle .|. \rangle$ définie par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \langle P|Q \rangle \coloneqq \int_0^1 P(x)Q(x) \, \mathrm{d}x$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

⇨ On pose $E \coloneqq \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $\langle .|. \rangle$ définie par

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R}), \quad \langle A|B \rangle \coloneqq \operatorname{tr}\left(A^\top B\right)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$.

24.1.2 Norme

Définition 24.1.2

Soit $x \in E$. On définit la *norme* de x, notée $\|x\|$, par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}.$$

On dit que x est *normé* lorsque $\|x\| = 1$.

Remarque

⇨ Le plus souvent, il sera préférable de travailler avec $\|x\|^2 = \langle x|x \rangle$ qu'avec $\|x\|$.

Proposition 24.1.3

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad & \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \\ \forall x \in E, \qquad & \|x\| = 0 \quad \iff \quad x = 0. \end{aligned}$$

Remarque

⇨ Si $x \in E$ est un vecteur non nul, il y a exactement deux vecteurs normés colinéaires à x

$$\frac{x}{\|x\|} \qquad \text{et} \qquad -\frac{x}{\|x\|}.$$

Proposition 24.1.4: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $x, y \in E$. Alors

$$|\langle x|y \rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\| \, .$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires. Plus précisément

— $\langle x|y \rangle = \|x\| \, \|y\|$ si et seulement si il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$.

— $\langle x|y \rangle = -\|x\| \, \|y\|$ si et seulement si il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $y = -\lambda x$ ou $x = -\lambda y$.

Remarques

⇨ En particulier, avec le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

⇨ L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'adapte au cas où $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique positive quelconque, même lorsque cette dernière n'est pas définie. Si $x, y \in E$, on a alors

$$|\varphi(x,y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)}.$$

Cependant, la condition d'égalité n'est plus valide.

Exercice 2

⇨ Montrer que

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leqslant 1 \Longrightarrow |x+y+z| \leqslant \sqrt{\frac{11}{6}}$$

Si on suppose que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leqslant 1$, à quelle condition a-t-on $|x+y+z| = \sqrt{11/6}$?

Proposition 24.1.5: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit f, g deux fonctions réelles continues sur l'intervalle I et $a, b \in I$. Si $a \leqslant b$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$[\forall x \in [a,b], \quad f(x) = \lambda g(x)] \quad \text{ou} \quad [\forall x \in [a,b], \quad g(x) = \lambda f(x)].$$

Remarque

⇨ Cette inégalité reste vraie si f et g sont des fonctions continues par morceaux. Cependant, dans ce cas, la condition d'égalité n'est plus valide.

Exercices 3

⇨ Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs strictement positives. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right) \geqslant (b-a)^2.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que cette inégalité soit une égalité.

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a \leqslant b$. Montrer que

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

Proposition 24.1.6: Inégalité triangulaire

Soit $x, y \in E$.

— Alors

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si x et y sont positivement liés, c'est-à-dire si et seulement si il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$.

— De plus

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\| \quad \text{et} \quad \|x+y\| \geqslant \|x\| - \|y\|.$$

Proposition 24.1.7

L'identité suivante est appelée identité du parallélogramme

$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Remarques

⇨ Dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

⇨ Les identités suivantes sont appelées identités de polarisation.

$$\begin{aligned}\forall x,y\in E,\quad \langle x|y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)-\|x-y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right).\end{aligned}$$

Exercices 4

⇨ Soit $x,y\in E$ deux vecteurs distincts de normes inférieures ou égales à 1. Montrer que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|<1.$$

⇨ Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x\in E$, $\langle u(x)|x\rangle=0$. Montrer que

$$\forall x,y\in E,\quad \langle u(x)|y\rangle=-\langle x|u(y)\rangle.$$

24.1.3 Notion d'orthogonalité

Définition 24.1.8

— Soit $x,y\in E$. On dit que x et y sont *orthogonaux* lorsque $\langle x|y\rangle=0$.
— Soit A et B deux parties de E. On dit que A et B sont *orthogonales* lorsque

$$\forall a\in A,\quad \forall b\in B,\quad \langle a|b\rangle=0.$$

Remarque

⇨ Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Définition 24.1.9

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

— On dit que cette famille est *orthogonale* lorsque

$$\forall i,j\in I,\quad i\neq j\quad\Longrightarrow\quad \langle x_i|x_j\rangle=0.$$

— On dit que cette famille est *orthonormée* lorsque

$$\forall i,j\in I,\quad \langle x_i|x_j\rangle=\delta_{i,j}:=\begin{cases}0 & \text{si } i\neq j\\ 1 & \text{si } i=j.\end{cases}$$

Remarque

⇨ Sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, la base canonique est orthonormée.

Proposition 24.1.10

Toute famille orthogonale ne contenant aucun vecteur nul est libre.

Remarque

⇨ En particulier, toute famille orthonormée est libre.

Exercice 5

⇨ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues, 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. On définit sur E le produit scalaire

$$\forall f,g\in E,\quad \langle f|g\rangle:=\int_0^{2\pi}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction s_k par $s_k(x):=\sin(kx)$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, la fonction c_k par $c_k(x):=\cos(kx)$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la famille $(c_0,s_1,c_1,\dots,s_n,c_n)$ est orthogonale.

Proposition 24.1.11: Pythagore

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale. Alors

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 .$$

Remarque

⇨ Si x et y sont deux vecteurs de E, alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si et seulement si x et y sont orthogonaux. C'est le théorème de Pythagore.

Définition 24.1.12

Soit A une partie de E. On appelle *orthogonal de* A et on note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de A

$$A^\perp \coloneqq \{x \in E \mid \forall a \in A, \quad \langle a|x\rangle = 0\}.$$

En particulier A et $A^\perp$ sont orthogonaux.

Remarques

⇨ $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.

⇨ Si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.

Proposition 24.1.13

Soit A une partie de E.

— $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

— $A^\perp = (\operatorname{Vect} A)^\perp$.

Remarque

⇨ Si F est un sous-espace vectoriel de E, F et $F^\perp$ sont en somme directe.

Exercice 6

⇨ Soit $E \coloneqq \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f|g\rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

On pose $F \coloneqq \{f \in E \mid \forall x \in [0,1], \quad f(x) = 0\}$. Calculer $F^\perp$, puis $F \oplus F^\perp$.

24.2 Espace euclidien

Définition 24.2.1

On appelle *espace euclidien* tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Remarque

⇨ Dans la suite de ce chapitre, excepté dans la section sur la minimisation de la distance à un sous-espace vectoriel, E désignera un espace euclidien.

24.2.1 Supplémentaire orthogonal

Proposition 24.2.2

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors

$$E = F \oplus F^\perp.$$

De plus, $F^\perp$ est l'unique supplémentaire de F orthogonal à F ; on l'appelle le *supplémentaire orthogonal* de F.

Remarque

⇨ Lorsque E n'est pas de dimension finie, la somme $F + F^\perp$ reste directe, mais elle n'est pas toujours égale à E.

Exercice 7

⇨ On considère $E := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle .|. \rangle$ défini par

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle A|B \rangle := \operatorname{tr}\left(A^\top B\right).$$

Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 24.2.3

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors

$$\dim E = \dim F + \dim F^\perp.$$

Proposition 24.2.4

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors

$$\left(F^\perp\right)^\perp = F.$$

24.2.2 Base orthonormée

Proposition 24.2.5

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si $(f_1, \ldots, f_p)$ une base orthonormée de F et $(g_1, \ldots, g_q)$ est une base orthonormée de $F^\perp$, alors $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une base orthonormée de E.

Proposition 24.2.6

Tout espace euclidien admet une base orthonormée.

Proposition 24.2.7: Théorème de la base incomplète

On peut compléter toute famille orthonormée de E en une base orthonormée de E.

Proposition 24.2.8

Soit $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors, pour tout $x \in E$

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k|x \rangle \, e_k.$$

Remarques

⇨ Le calcul des coordonnées de $x \in E$ dans une base orthonormée se fait donc en effectuant des produits scalaires.

⇨ En termes de base duale, la proposition précédente s'énonce

$$\forall x \in E, \quad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad e_k^\star(x) = \langle e_k|x \rangle.$$

Proposition 24.2.9

Soit $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

— Soit $x, y \in E$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$. Alors

$$\langle x|y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Autrement dit, si $X := \mathcal{M}_\mathcal{B}(x)$ et $Y := \mathcal{M}_\mathcal{B}(y)$

$$\langle x|y \rangle = X^\top Y.$$

En particulier

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = X^\top X.$$

— Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E et $M \coloneqq \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors

$$M^\top M = (\langle x_i | x_j \rangle)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Proposition 24.2.10

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E de dimension n et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. On pose $M \coloneqq \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$. Alors $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base orthonormée de E si et seulement si

$$M^\top M = I_n.$$

24.2.3 Projecteur orthogonal

Dans cette section, et dans cette section seulement, E désigne un espace préhilbertien.

Définition 24.2.11

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors

$$E = F \oplus F^\perp.$$

De plus, $F^\perp$ est l'unique supplémentaire de F orthogonal à F ; on l'appelle le *supplémentaire orthogonal* de F.

Définition 24.2.12

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On appelle *projecteur orthogonal* sur F, le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.

Proposition 24.2.13

Soit p un projecteur orthogonal. Alors

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Proposition 24.2.14

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, $(e_1, \ldots, e_r)$ une base orthonormée de F et p le projecteur orthogonal sur F. Alors

$$\forall x \in E, \quad p(x) = \sum_{k=1}^{r} \langle e_k | x \rangle e_k.$$

Remarques

⇨ Si la base $(e_1, \ldots, e_r)$ de F est orthogonale, alors

$$\forall x \in E, \quad p(x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle e_k | x \rangle}{\|e_k\|^2} e_k.$$

De plus, si q est le projecteur sur $F^\perp$ parallèlement à F, alors $p + q = \mathrm{Id}$ donc

$$\forall x \in E, \quad q(x) = x - \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle e_k | x \rangle}{\|e_k\|^2} e_k.$$

⇨ En particulier, si E est un espace euclidien, u est un vecteur non nul de E et p est le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(u)^{\perp}$, alors

$$\forall x \in E, \quad p(x) = x - \frac{\langle u|x\rangle}{\|u\|^2} u.$$

Exercice 8

⇨ Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F d'équation

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0. \end{cases}$$

Définition 24.2.15

Soit A une partie non vide de E et $x \in E$. On définit *la distance de x à A*, que l'on note $\mathrm{d}(x, A)$, par

$$\mathrm{d}(x, A) \coloneqq \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Proposition 24.2.16

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. Alors, la borne inférieure

$$\mathrm{d}(x, F) = \inf_{f \in F} \|x - f\|$$

est un minimum qui est atteint en un unique point. Ce point est le projeté orthogonal de x sur F.

Exercice 9

⇨ Montrer que la borne inférieure

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left[\mathrm{e}^x - (ax+b)\right]^2 \mathrm{d}x$$

est atteinte en un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que l'on calculera.

24.2.4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Dans la suite de ce chapitre, E désigne de nouveau un espace euclidien.

Proposition 24.2.17: Algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors il existe une base orthogonale $(f_1, \ldots, f_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $(f_1, \ldots, f_k)$ est une base orthogonale de $E_k \coloneqq \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.

Remarques

⇨ Une telle base est donnée par l'algorithme d'*orthogonalisation de Gram-Schmidt.*
- On pose $f_1 \coloneqq e_1$. La famille (f_1) est alors une base orthogonale de E_1.
- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'on a construit une base orthogonale $(f_1, \ldots, f_k)$ de E_k. On définit p_{k+1} comme le projeté orthogonal de e_{k+1} sur E_k. Puisque $(f_1, \ldots, f_k)$ est une base orthogonale de E_k, on a

$$p_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle f_i|e_{k+1}\rangle}{\|f_i\|^2} f_i.$$

On note $f_{k+1} \coloneqq e_{k+1} - p_{k+1}$ le projeté orthogonal de e_{k+1} sur $E_k^{\perp}$. On a alors

$$f_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle f_i|e_{k+1}\rangle}{\|f_i\|^2} f_i.$$

On a ainsi construit une base orthogonale $(f_1, \ldots, f_{k+1})$ de E_{k+1}.

La base orthogonale $(f_1, \ldots, f_n)$ ainsi construite est solution de notre problème.

⇨ Dans la proposition précédente, il n'y a pas unicité d'une telle base $(f_1, \ldots, f_n)$. Cependant, une famille $(g_1, \ldots, g_n)$ est une autre solution de notre problème si et seulement si il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^*$ tels que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad g_k = \lambda_k f_k.$$

⇨ L'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt peut s'utiliser pour une famille $(e_1, \dots, e_n)$ quelconque d'un espace euclidien de dimension n.
— Si l'un des vecteurs f_k est nul, alors $e_k \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$ et l'algorithme s'arrête.
— Sinon, l'algorithme construit une base orthogonale de E tout en prouvant la liberté de $(e_1, \dots, e_n)$.

Exercice 10

⇨ On pose $E \coloneqq \mathbb{R}_n[X]$, que l'on munit du produit scalaire

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P | Q \rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer qu'il existe une unique base orthogonale de E, formée de polynômes $P_0, \dots, P_n$ de coefficients dominants égaux à 1, tels que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \deg P_k = k.$$

Calculer cette base pour $n = 3$.

Proposition 24.2.18: Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors il existe une base orthonormée $(g_1, \dots, g_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $(g_1, \dots, g_k)$ est une base orthonormée de $E_k \coloneqq \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Remarques

⇨ Si l'on souhaite obtenir une telle base, il suffit de normer les vecteurs de la famille $(f_1, \dots, f_n)$ obtenue par l'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt en posant

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad g_k = \frac{1}{\|f_k\|} f_k.$$

On dit qu'on a obtenu la base $(g_1, \dots, g_n)$ par l'algorithme d'*orthonormalisation de Gram-Schmidt*.

⇨ Dans la proposition précédente, il n'y a pas unicité d'une telle base $(g_1, \dots, g_n)$. Cependant, une famille $(h_1, \dots, h_n)$ est une autre solution de notre problème si et seulement si il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad h_k = \varepsilon_k g_k.$$

⇨ Pour avoir l'unicité, il suffit de rajouter la condition

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \langle e_k | g_k \rangle > 0.$$

L'unique famille solution de ce problème est la famille obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exercice 11

⇨ Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, orthonormaliser la famille

$$e_1 \coloneqq (1, -2, 2), \qquad e_2 \coloneqq (-1, 0, -1), \qquad e_3 \coloneqq (5, -3, 7).$$

24.2.5 Dual

Proposition 24.2.19

Pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un unique $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle a | x \rangle.$$

24.3 Exercices

Produit scalaire

Produit scalaire

Exercice 1 : Produit scalaire

On pose
$$E := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0 \quad \text{et} \quad P(1) = 0\}.$$
On définit l'application $\langle .|. \rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par
$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P|Q \rangle := -\int_0^1 P''(x)Q(x)\,\mathrm{d}x.$$
Montrer que $\langle .|. \rangle$ définit un produit scalaire.

Norme

Exercice 2 : Intégrales

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\left|\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\int_0^1 \frac{f^2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \left|\int_0^1 \frac{\sqrt{t}f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{2}\left(\int_0^1 \frac{f^2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$
Déterminer dans chacun des deux cas à quelle condition sur f l'inégalité est une égalité.

Exercice 3 : Exercice

Soit (u_n) une suite positive telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que
$$\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$$
converge.

Exercice 4 : Mines

On définit, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$$\langle A|B \rangle := \operatorname{tr}\left(A^\top B\right).$$

1. Montrer que $\langle .|. \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|.$$

Notion d'orthogonalité

Exercice 5 : Vecteurs orthogonaux

Soit E un espace préhilbertien et $x, y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x + \lambda y\| \geqslant \|x\|.$$

Exercice 6 : Une base orthonormale

Soit E un espace euclidien, et $(e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs unitaires tels que
$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle e_i|x \rangle^2.$$
Notons qu'on ne suppose pas que E est de dimension n.

1. Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une famille orthogonale.
2. Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale.

Espace euclidien

Supplémentaire orthogonal

Exercice 7 : Orthogonal et somme

Soit E un espace euclidien et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que l'orthogonal de $F + G$ et l'intersection des orthogonaux de F et G sont égaux.
2. Montrer que l'orthogonal de l'intersection de F et G et la somme des orthogonaux de F et de G sont égaux.

Base orthonormée

Projecteur orthogonal

Exercice 8 : Projecteur orthogonal

Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|\,.$$

Exercice 9 : Calcul d'une projection orthogonale

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$.

1. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$
Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations
$$\begin{cases} x_1 \ \ + x_2 \ \ + x_3 \ \ + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$
Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur à F.

Exercice 10 : Rang d'un projecteur orthogonal

Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien E.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\|^2 = \langle p(x)|x\rangle$.
2. Montrer que pour toute base orthonormée $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \dots, e_n)$ de E
$$\sum_{k=1}^{n} \|p(e_k)\|^2 = \operatorname{rg}(p).$$

Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exercice 11 : Orthonormalisation

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Montrer que les vecteurs

$$e_1 \coloneqq (1,0,1), \quad e_2 \coloneqq (1,0,2) \quad \text{et} \quad e_3 \coloneqq (1,1,1)$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

Exercice 12 : Une distance

Calculer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left[x^2 - (ax+b)\right]^2 \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 13 : Sur les polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. On pose $E \coloneqq \mathbb{R}_n[X]$ et on définit l'application $\langle .|. \rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P|Q\rangle \coloneqq \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k) Q^{(k)}(a_k).$$

1. Montrer que $\langle .|. \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On suppose dans cette question que $n = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$. Déterminer une base orthonormée de E.

Exercice 14 : Racines des polynômes orthogonaux

Soit $E := \mathbb{R}_n[X]$, muni de la forme

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P|Q\rangle := \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle .|.\rangle$ est un produit scalaire.
2. Montrer que E admet une base orthonormée $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ telle que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \deg P_k = k.$$

3. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k admet exactement k racines sur $]-1, 1[$.

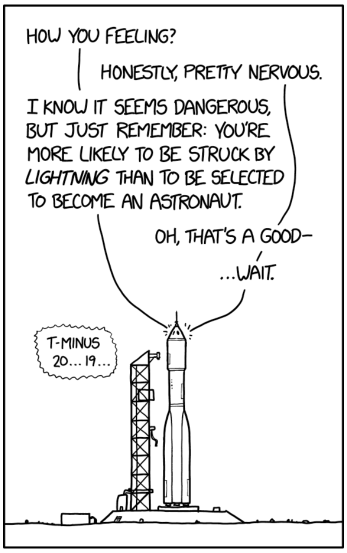
Dual

Chapitre 25

Espérance, variance

« Je ne crois aux statistiques que lorsque je les ai moi-même falsifiées. »

— Winston Churchill (1874–1965)



25.1 Espérance, variance

25.1.1 Espérance

Définition 25.1.1

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. On appelle *espérance* de X le réel

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x).$$

Remarques

⇨ Dans cette formule, on peut remplacer $X(\Omega)$ par une partie finie E' de E telle que $X(\Omega) \subset E'$.

⇨ L'espérance de X ne dépend que de la loi suivie par X.

⇨ Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est un évènement, alors $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

Exercice 1

⇨ On lance n fois une pièce équilibrée. On s'intéresse à la première apparition de pile. On note X la variable aléatoire égale à k si le premier pile a lieu au k-ième lancer et on convient que $X = 0$ si aucun lancer n'amène pile. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Proposition 25.1.2

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Alors

$$\mathbb{E}(X) \coloneqq \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Proposition 25.1.3

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles. Alors, quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

Exercices 2

⇨ On lance deux dés à 6 faces. Calculer l'espérance de leur somme.

⇨ Le chat Speed se fait chaque jour les griffes, soit sur le canapé soit sur les rideaux. Il ne se fait jamais les griffes deux jours de suite sur le canapé. S'il se fait les griffes sur les rideaux un jour donné, alors il choisira le lendemain le canapé avec une probabilité $1/3$. Vous devez vous occuper de Speed pendant $m + 1$ jours. Le premier jour, jour d'indice 0, il attaque les rideaux. Pour tout $n \in [\![0, m]\!]$, on définit la variable aléatoire X_n égale au nombre de jours où le chat a fait ses griffes sur les rideaux parmi les jours d'indices 0 à n. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

⇨ Soit $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer la formule dite du crible

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

En déduire que si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties d'un ensemble fini E

$$\operatorname{Card}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Proposition 25.1.4

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles.

— Si $X \geqslant 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
— Si $X \leqslant Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.
— On a $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$.

Proposition 25.1.5

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

— Si X est une variable aléatoire constante égale à a, alors $\mathbb{E}(X) = a$.
— S'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $X \sim \mathcal{U}([\![a, b]\!])$, alors $\mathbb{E}(X) = (a + b)/2$.
— S'il existe $p \in [0, 1]$ tel que $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{E}(X) = p$.
— S'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$ tels que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbb{E}(X) = np$.

Exercices 3

⇨ On dispose de n fléchettes. À chaque lancer, on a une probabilité de $1/10$ de tirer dans le mille. On suppose les lancers indépendants et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fléchettes placées dans le mille.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer la probabilité de mettre au plus 1 fléchette dans le mille.
3. Calculer l'espérance de X.

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_n := [\![1, n]\!]$ et on munit $\Omega_n := \mathcal{F}(I_n, I_n)$ de la probabilité uniforme. On note X_n la variable aléatoire sur Ω_n égale au cardinal de l'image d'un élément de Ω_n. Déterminer l'espérance de X_n puis en donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$.

Définition 25.1.6

On dit qu'une variable aléatoire réelle $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est centrée lorsque

$$\mathbb{E}(X) = 0.$$

Remarque

⇨ Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire, alors $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

Proposition 25.1.7: Formule de transfert

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $f : E \to \mathbb{R}$. Alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Remarque

⇨ Dans cette formule, on peut remplacer $X(\Omega)$ par une partie finie E' de E telle que $X(\Omega) \subset E'$.

Exercice 4

⇨ Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![-2, 2]\!]$. Déterminer l'espérance de X^2 en utilisant la définition de l'espérance, puis la formule de transfert.

Proposition 25.1.8

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles indépendantes. Alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Plus généralement, soit $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i).$$

Exercices 5

⇨ Dans le quadrillage $[\![0, n]\!] \times [\![0, p]\!]$, on place uniformément et de manière indépendante un point A sur l'axe des abscisses et un point B sur l'axe des ordonnées. Quelle est, en moyenne, l'aire du triangle OAB ?

⇨ On effectue $p \in \mathbb{N}^*$ tirages avec remise dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. On note $X_1, \ldots, X_p$ les résultats des tirages successifs et on pose $Y := \max(X_1, \ldots, X_p)$.

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $\mathbb{P}(Y \leqslant k)$. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.
2. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(Y)$ lorsqu'à p fixé, n tend vers $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(Y)$ lorsqu'à n fixé, p tend vers $+\infty$.

25.1.2 Variance

Définition 25.1.9

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle respectivement *variance* et *écart-type* de X les réels

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2\right) \qquad \text{et} \qquad \sigma(X) := \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Remarque

⇨ La variance et l'écart-type de X ne dépendent que de la loi suivie par X.

Proposition 25.1.10: Formule de König-Huygens

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Alors

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Remarque

⇨ On calcule souvent la variance de X en utilisant la formule d'Huygens ou en passant par $\mathbb{E}(X(X-1))$ qui est parfois plus commode à calculer que $\mathbb{E}(X^2)$. On utilise alors la relation

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Exercice 6

⇨ Soit X une variable aléatoire réelle. Quelle valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ minimise $\mathbb{E}((X-\lambda)^2)$? Que vaut ce minimum ?

Proposition 25.1.11

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Alors, quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X) \qquad \text{et} \qquad \sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X).$$

Proposition 25.1.12

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

— Si X est une variable aléatoire constante égale à $a \in \mathbb{R}$, alors $\mathbb{V}(X) = 0$.
— Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leqslant b$. Si $X \sim \mathcal{U}([\![a, b]\!])$, alors $\mathbb{V}(X) = (n^2-1)/12$ où $n := \mathrm{Card}([\![a, b]\!]) = b - a + 1$.
— S'il existe $p \in [0, 1]$ tel que $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{V}(X) = pq$.
— S'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$ tels que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbb{V}(X) = npq$.

Remarque

⇨ Dans les formules donnant les variances d'une loi de Bernoulli et d'une loi binomiale, on a posé $q := 1 - p$.

Proposition 25.1.13

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Alors $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si il existe un évènement A de probabilité 1 tel que

$$\forall \omega \in A, \quad X(\omega) = \mathbb{E}(X).$$

Remarque

⇨ Autrement dit, la variance d'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est nulle si et seulement si X est constante sur un évènement de probabilité 1. Un tel évènement est dit « *presque sûr* ».

Définition 25.1.14

On dit qu'une variable aléatoire réelle $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est réduite lorsque

$$\mathbb{V}(X) = 1.$$

Remarque

⇨ Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle de variance non nulle, alors

$$\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est centrée réduite.

25.2 Couple de variables aléatoires

25.2.1 Loi conjointe

Définition 25.2.1

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires. On définit la variable aléatoire $Z := (X, Y)$ par

$$\begin{array}{rccl} Z: & \Omega & \longrightarrow & E \times F \\ & \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)). \end{array}$$

Remarque

⇨ On a $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Cependant, l'inclusion peut être stricte. Par exemple, Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et $Z := (X, X)$, alors $Z(\Omega) = \{(k, k) : k \in [\![1, n]\!]\}$ tandis que $X(\Omega) \times X(\Omega) = [\![1, n]\!]^2$.

Définition 25.2.2

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires.
- On appelle *loi conjointe* du couple (X, Y) la loi de $Z := (X, Y)$.
- On appelle *première loi marginale* de (X, Y) la loi de X et *seconde loi marginale* de (X, Y) la loi de Y.

Remarques

⇨ La loi conjointe de (X, Y) est caractérisée par sa distribution de probabilités $(\mathbb{P}(Z = z))_{z \in Z(\Omega)}$. Étant donné que $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$, cette distribution est donnée par

$$(\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}.$$

⇨ Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires. On note $X(\Omega) := \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) := \{y_1, \ldots, y_m\}$. Alors

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = x_i) &= \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \\ \forall j \in [\![1, m]\!], \quad \mathbb{P}(Y = y_j) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \end{aligned}$$

En particulier, les lois marginales se déduisent de la loi conjointe. Par contre, la connaissance des lois marginales ne permet pas d'en déduire la loi conjointe. Par exemple, si on considère l'expérience qui consiste à jouer deux fois de suite à pile ou face, modélisée par $\Omega := \{P, F\}^2$ muni de la loi uniforme, et que $X_1, X_2 : \Omega \to \{P, F\}$ sont les variables aléatoires donnant les résultats respectifs des deux lancers, alors (X_1, X_2) et (X_1, X_1) ont les mêmes lois marginales, mais n'ont pas la même loi conjointe.

Exercice 7

⇨ On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer successivement et sans remise deux boules dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On note X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire qui vaut R si la première (respectivement deuxième) boule tirée est rouge, et N sinon.
1. Déterminer la loi du couple $Y := (X_1, X_2)$, puis ses lois marginales.
2. Même question si le tirage se fait avec remise.

Définition 25.2.3

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini E et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un évènement de probabilité non nulle. On appelle *loi de X conditionnée par l'évènement B* la probabilité

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_{X|B}: & \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0, 1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A|B). \end{array}$$

Remarques

⇨ En pratique, lorsqu'il nous sera demandé de déterminer la loi d'une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ conditionnée par l'évènement B, on commencera par déterminer un ensemble fini E' tel que $X(\Omega) \subset E'$ et on calculera $\mathbb{P}(X = x|B)$ pour tout $x \in E'$.

⇨ Si $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ sont deux variables aléatoires et $y \in F$ est tel que $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, il est courant de considérer la loi de X conditionnée par l'évènement $(Y = y)$.

25.2.2 Covariance

Définition 25.2.4

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles. On appelle *covariance* de X et de Y et on note $\mathrm{Cov}(X, Y)$ le réel

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]\,[Y - \mathbb{E}(Y)]\right).$$

Lorsque $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, on dit que X et Y sont *décorrélées* et on note $X \perp Y$.

Remarque

⇨ Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire, alors

$$\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X).$$

Proposition 25.2.5

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles. Alors

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Proposition 25.2.6

Soit $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires réelles.

— Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(aX + bY, Z) &= a\mathrm{Cov}(X, Z) + b\mathrm{Cov}(Y, Z)\\ \mathrm{Cov}(X, aY + bZ) &= a\mathrm{Cov}(X, Y) + b\mathrm{Cov}(X, Z).\end{aligned}$$

— De plus

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X).$$

— Enfin

$$\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X) \geqslant 0.$$

Autrement dit, la covariance est une forme bilinéaire symétrique positive sur l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

Remarques

⇨ Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle et $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathrm{Cov}(a, X) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Cov}(X, a) = 0.$$

⇨ La covariance est presque un produit scalaire. La seule propriété qui lui manque pour en être un est la propriété de séparation. En effet, si $X : \Omega \to \mathbb{R}$, alors $\mathrm{Cov}(X, X) = 0$ si et seulement si X est constante sur un évènement de probabilité 1.

⇨ En particulier, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous dit que si $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux variables aléatoires réelles, alors

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y).$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et un évènement A de probabilité 1 tel que

$$[\forall \omega \in A, \quad Y(\omega) = \alpha X(\omega) + \beta] \qquad \text{ou} \qquad [\forall \omega \in A, \quad X(\omega) = \alpha Y(\omega) + \beta].$$

⇨ Si $\sigma(X) > 0$ et $\sigma(Y) > 0$, le réel

$$\mathrm{Cor}(X, Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)},$$

appelé *coefficient de corrélation*, est dans $[-1, 1]$. De plus, $\mathrm{Cor}(X, Y) = 1$ si et seulement si il existe $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ et un évènement A de probabilité 1 tel que

$$\forall \omega \in A, \quad Y(\omega) = \alpha X(\omega) + \beta.$$

De même $\mathrm{Cor}(X, Y) = -1$ si et seulement si il existe $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ et un évènement A de probabilité 1 tel que

$$\forall \omega \in A, \quad Y(\omega) = -\alpha X(\omega) + \beta.$$

Proposition 25.2.7

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles. Si X et Y sont indépendantes, alors elles sont décorrélées.

Remarque

⇨ La réciproque de la proposition précédente est fausse. Il est possible que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ sans que X et Y soient indépendantes. Prenons par exemple l'exemple d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[\![-1, 1]\!]$. Alors $\mathrm{Cov}(X, X^2) = 0$. Pourtant, X et X^2 ne sont pas indépendantes.

Proposition 25.2.8

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires. Alors

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y).$$

Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sont des variables aléatoires, alors

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Proposition 25.2.9

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes, alors

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i).$$

Remarque

⇨ Si $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}.$$

Exercice 8

⇨ Les *méthodes probabilistes* permettent de prouver certains résultats mathématiques dont l'énoncé ne fait pas apparaître des probabilités.

1. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Montrer qu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \leqslant \mathbb{E}(X)$.
2. Soit $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs de norme 1. Montrer qu'il existe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| \leqslant \sqrt{n}.$$

25.3 Vers les grands nombres

Proposition 25.3.1: Inégalité de Markov

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Alors, quel que soit $a > 0$

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

Remarque

⇨ Cette inégalité a le mérite de pouvoir être appliquée sans aucune hypothèse sur la loi de la variable aléatoire. Elle est très générale mais assez mauvaise ! Évidemment, cette inégalité n'a aucun intérêt si $a \leqslant \mathbb{E}(|X|)$.

Exercice 9

⇨ Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire positive, majorée par M. Montrer que

$$\forall a \geqslant 0, \quad \mathbb{E}(X) \leqslant a + M\mathbb{P}(X \geqslant a).$$

Proposition 25.3.2: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Alors, quel que soit $a > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

Remarque

⇨ On se donne $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi d'espérance α et de variance σ^2. On pose

$$M_n \coloneqq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Alors

$$\mathbb{E}(M_n) = \alpha \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

En particulier, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, quel que soit $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(|M_n - \alpha| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Toute information de ce type est appelée *loi des grands nombres*. Les lois des grands nombres sont fondamentales car elles justifient l'approche fréquentiste que l'on a des probabilités.

Exercice 10

⇨ Un parti politique effectue un sondage pour évaluer son image dans l'opinion. La proportion de la population qui lui est favorable est $p \in [0, 1]$. On interroge un échantillon de n personnes. La réponse de la k-ième personne sondée est représentée par la variable aléatoire X_k qui vaut 1 si la personne est favorable au parti et 0 sinon. Chaque variable X_k suit donc une loi de Bernoulli de paramètre p et on suppose que $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes. La variable aléatoire

$$M_n \coloneqq \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

est utilisée comme un estimateur de p.

1. Montrer que quel que soit $\varepsilon > 0$
$$\mathbb{P}(|M_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$
2. Soit $\alpha \in]0, 1]$. Combien de personnes doit-on interroger pour obtenir une approximation de p à ε près avec une probabilité supérieure à $1 - \alpha$? Faites une application numérique pour $\varepsilon = 0.02$ et $\alpha = 0.1$.

25.4 Exercices

Espérance, variance

Espérance

Exercice 1 : Espérance d'une différence

Soit $n \geqslant 1$. Soit X et Y deux variables aléatoires de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et indépendantes. Déterminer la loi et l'espérance de $Z := X - Y$.

Exercice 2 : Nombre de points fixes d'une permutation

L'ensemble S_n des permutations de $[\![1, n]\!]$ est muni de la probabilité uniforme. On effectue un tirage aléatoire d'une permutation. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si k est fixe par la permutation et 0 sinon. On note X la variable aléatoire égale au nombre de points fixes de la permutation. Exprimer X en fonction des X_k et en déduire l'espérance de X.

Exercice 3 : Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne. On note X le numéro de la boule tirée. Déterminer la loi de X puis son espérance.

Exercice 4 : Les vaches

On considère une population de 2^n vaches susceptibles, avec la probabilité p, d'être porteuses d'un virus donné. On dispose d'un test détectant de façon certaine ce virus dans le lait des vaches. On fixe $0 \leqslant k \leqslant n$. On sépare les vaches en 2^{n-k} groupes de 2^k vaches. On mélange leur lait, on fait un test sur chacun des mélanges, puis on effectue un test sur chacune des vaches des groupes contaminés. On note Y le nombre de groupes malades et X le nombre total de tests effectués.

1. Exprimer X en fonction de Y, k et n.
2. Déterminer la probabilité qu'un groupe donné soit malade.
3. Donner la loi de Y et son espérance.
4. En déduire l'espérance de X.
5. On suppose $n = 10$ et $p = 0.01$. Déterminer la meilleure valeur de k.

Exercice 5 : La puce

Une puce se déplace (uniquement en avant) sur une bande numérotée par les entiers naturels et commence à la case 0. À chaque étape, elle fait un bond d'une case avec la probabilité p et de deux cases avec la probabilité $q = 1 - p$. On note X_n le numéro de la case où se trouve la puce après n bonds et Y_n le nombre de bonds d'une case effectués après n bonds.

1. Déterminer la loi de Y_n.
2. Exprimer X_n en fonction de Y_n.
3. En déduire l'espérance de X_n.

Exercice 6 : Exercice

Soit $X_1, ..., X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose

$$T := \min\{j \in [\![2, n+1]\!] \mid X_j \in \{X_1, ..., X_{j-1}\}\}.$$

1. Vérifier que T est bien défini.
2. (a) Écrire une fonction Python qui prend $(X_1, ..., X_{n+1})$ en arguments et qui renvoie T.
   (b) On choisit $n = 1000$. Écrire une fonction qui prend N en argument et qui renvoie la moyenne de T au bout de N essais.
3. (a) Quelles sont les valeurs que peut prendre T ? Déterminer la loi de T.
   (b) Montrer que $\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T > k)$ et en déduire que

$$\mathbb{E}(T) = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

(c) En admettant que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\mathrm{e}^n$$
donner un équivalent de $\mathbb{E}(T)$.

Exercice 7 : Exercice

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire aléatoirement k boules en une seule prise. On note X la variable aléatoire donnant le numéro de la plus petite boule tirée. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 8 : Exercice

Un questionnaire comporte 20 questions. Pour chaque question, k réponses sont possibles dont une seule est bonne. Chaque bonne réponse rapporte 1 point. Un candidat répond au hasard à toutes les questions.

1. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de points obtenus par le candidat à ce questionnaire. Déterminer la loi de X.
2. À chaque question, si le candidat s'est trompé, il a droit à une seconde chance et peut choisir une autre réponse parmi celles qui restent. Il gagne alors $1/2$ point en cas de bonne réponse. Soit Y le nombre de $1/2$ points obtenus, déterminer la loi de Y.
3. Déterminer k pour que le candidat obtienne en moyenne une note de 5 sur 20.

Exercice 9 : Exercice

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, m]\!]$ et $(X_1, \ldots, X_m)$ des variables aléatoires à valeurs entières indépendantes entre elles et de N et suivant toutes la même loi. On pose pour tout $j \in [\![1, m]\!]$
$$S_j := \sum_{i=1}^{j} X_i.$$
On pose enfin
$$Z := \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

1. Déterminer l'espérance de Z.
2. On tire un entier N au hasard et uniformément dans $[\![1, n]\!]$ puis on jette N fois une pièce équilibrée. Calculer l'espérance du nombre de piles obtenus.

Variance

Exercice 10 : Exercice

On considère 5 jetons numérotés de 1 à 5.

1. On tire simultanément 2 jetons parmi les 5 et on note X la plus petite valeur. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. On tire successivement et avec remise 2 jetons parmi les 5 et on note Y la plus petite valeur. Déterminer la loi de Y et son espérance.

Couple de variables aléatoires

Loi conjointe

Exercice 11 : Exercice

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un même espace probabilisé fini. On suppose que X et Y sont symétriques, c'est-à-dire que X et $-X$ (respectivement Y et $-Y$) ont même loi.

1. Montrer que (X, Y) et $(X, -Y)$ ont même loi, puis que
$$\mathbb{P}(X^2 = Y^2) = 2\mathbb{P}(X = Y) - \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0).$$
2. Montrer que $\mathbb{P}(X + Y \geqslant 0) = \mathbb{P}(X + Y \leqslant 0)$.

Covariance

Exercice 12 : Exercice

On lance deux fois un dé équilibré à 6 faces et on note D_1 et D_2 les deux résultats. On pose $S \coloneqq D_1 + D_2$ puis X_1 (resp. X_2) le reste de la division euclidienne de S par 2 (resp. 5).

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2) (est-elle uniforme ?) et ses lois marginales.
2. Calculer $\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2)$. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Vers les grands nombres

Exercice 13 : Marche aléatoire

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi : $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = 1/2$. On pose $S_n \coloneqq X_1 + \cdots + X_n$. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Majorer
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right).$$
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tS_n}\right) = \mathrm{ch}^n\, t$.
3. Montrer que, pour tout $t > 0$, $\mathrm{ch}(t) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$.
4. Montrer que, pour tout $t > 0$
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(\frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon\right).$$
5. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right).$$

Chapitre 26

Déterminants

26.1 Déterminant

26.1.1 Forme n-linéaire alternée

Définition 26.1.1

Soit $E_1, \dots, E_n$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit qu'une application $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ est *n-linéaire* lorsqu'elle est linéaire par rapport à chacune des variables, c'est-à-dire lorsque quel que soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n$, on a

$$\forall x, y \in E_i, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \varphi\left(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x + \mu y, x_{i+1}, \dots, x_n\right) =$$

$$\lambda\varphi\left(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n\right) + \mu\varphi\left(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n\right).$$

Si $F = \mathbb{K}$, on dit que φ *est une forme n-lineaire.*

Remarques

- Lorsque $n = 2$, on parle d'application *bilinéaire.*
- L'ensemble des applications n-linéaires de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F.
- Si $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ est n-linéaire, $i \in [\![1, n]\!]$ et $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n$, alors $\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$.
- On dit qu'une application φ est une *forme n-linéaire sur E* lorsque c'est une application n-linéaire de E^n dans $\mathbb{K}$.

Exemples

- Si X est un ensemble, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) \times \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) \\ & (f, g) & \longmapsto & fg \end{array}$$

  est bilinéaire.

⇨ Si E, F, G sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ & (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

est bilinéaire. De manière similaire, si $r, q, p \in \mathbb{N}$, l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K}) \\ & (A,B) & \longmapsto & AB \end{array}$$

est bilinéaire.

⇨ Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E. Alors

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \varphi_k(x_k) \end{array}$$

est une forme n-linéaire sur E.

⇨ Dans le plan euclidien, le produit scalaire est bilinéaire. Dans l'espace euclidien orienté, le produit scalaire et le produit vectoriel sont bilinéaires.

Définition 26.1.2

On dit qu'une forme φ, n-linéaire sur E, est *alternée* lorsqu'elle est nulle sur toute famille de vecteurs dont au moins deux sont égaux.

Remarques

⇨ Autrement dit, la forme n-linéaire $\varphi: E^n \to \mathbb{K}$ est alternée lorsque

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, \quad \forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad [i \neq j \quad \text{et} \quad x_i = x_j] \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

⇨ L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est noté $\Lambda_n(E)$. C'est un sous-espace vectoriel de l'espace des formes n-linéaires sur E.

Proposition 26.1.3

Soit φ une forme n-linéaire alternée sur E. Alors, on ne change pas la valeur de $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ en ajoutant à l'une de ses variables une combinaison linéaire des autres.

Remarque

⇨ En particulier, si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Proposition 26.1.4

Soit φ une forme n-linéaire alternée sur E. Alors

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \quad \varphi\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right) = \epsilon(\sigma)\varphi(x_1, \dots, x_n).$$

On dit que φ est *antisymétrique*.

Remarque

⇨ Une forme n-linéaire alternée est donc antisymétrique. Réciproquement, si $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, les formes antisymétriques sont alternées.

Proposition 26.1.5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et φ une forme n-linéaire alternée sur E. Alors

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} e^\star_{\sigma(k)}(x_k)\right) \varphi(e_1, \dots, e_n).$$

Remarque

⇨ En particulier, si φ et ψ sont deux formes n-linéaires alternées sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n qui prennent la même valeur sur une base de E, alors $\varphi = \psi$.

Théorème 26.1.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors, il existe une unique forme n-linéaire alternée φ sur E telle que $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Proposition 26.1.7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors $\Lambda_n(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

26.1.2 Déterminant d'une famille de n vecteurs

Définition 26.1.8

Si $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on appelle *déterminant relativement à la base* $\mathcal{B}$, et on note $\det_{\mathcal{B}}$, l'unique forme n-linéaire alternée sur E telle que $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E, on appelle *déterminant de la famille* $(x_1, \dots, x_n)$ *relativement à la base* $\mathcal{B}$ le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque

⇨ On en déduit que si $\mathcal{B}$ est une base de E, $x_1, \dots, x_n \in E$ et $A \coloneqq \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$, alors

$$\det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Proposition 26.1.9

Soit $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' \coloneqq (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. Alors

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, \quad \det{}_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det{}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Remarque

⇨ En particulier, si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont des bases de E

$$\det{}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \det{}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det{}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'').$$

Proposition 26.1.10

Soit $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

— Alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si

$$\det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

— Autrement dit, $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si

$$\det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

26.1.3 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 26.1.11

Si $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique scalaire, appelé *déterminant de* f et noté $\det f$, tel que pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, \quad \det{}_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

En particulier, si $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E

$$\det f = \det{}_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Exercice 1

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et s une symétrie de E. On note p la dimension de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$. Montrer que $\det s = (-1)^p$.

Proposition 26.1.12

— $\det \mathrm{Id}_E = 1$
— Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
$$\det(\lambda f) = \lambda^n \det f.$$
— Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, alors
$$\det(g \circ f) = \det g \cdot \det f.$$

Exercice 2

⇨ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}$ si et seulement si n est pair.

Proposition 26.1.13

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est un isomorphisme si et seulement si
$$\det f \neq 0.$$
De plus, si tel est le cas
$$\det f^{-1} = \frac{1}{\det f}.$$

Remarque

⇨ On en déduit que l'application
$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathrm{GL}(E) & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \\ f & \longmapsto & \det f \end{array}$$
est un morphisme de groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ dans $(\mathbb{K}^*, \times)$.

26.1.4 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 26.1.14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *déterminant de* A et on note $\det A$ le déterminant des vecteurs colonnes de A relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Remarques

⇨ Le déterminant est donc une forme n-linéaire alternée par rapport aux colonnes de la matrice.

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors
$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$
Cependant, cette formule comporte une somme de $n!$ termes. Il est donc déconseillé de l'utiliser pour un calcul effectif de déterminant.

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, son déterminant est noté
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Proposition 26.1.15

Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
— Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E, alors
$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det\left[\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)\right].$$
— Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors
$$\det f = \det\left[\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\right].$$

Proposition 26.1.16

— $\det I_n = 1$
— Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$
— Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Remarque

⇨ Il n'existe aucune formule permettant de calculer $\det(A+B)$ en fonction de $\det A$ et de $\det B$. En particulier, toute formule du type $\det(A+B) = \det A + \det B$ est fausse.

Proposition 26.1.17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si
$$\det A \neq 0.$$
De plus, si tel est le cas
$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}.$$

Remarque

⇨ On en déduit que l'application
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \\ & A & \longmapsto & \det A \end{array}$$
est un morphisme de groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ dans $(\mathbb{K}^*, \times)$.

Proposition 26.1.18

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors
$$\det A^\top = \det A.$$

Remarque

⇨ On en déduit que le déterminant est une forme n-linéaire alternée par rapport aux lignes de la matrice.

Exercice 3

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que $\det A = 0$.

26.2 Calcul de déterminant

26.2.1 Méthode du pivot

Proposition 26.2.1

Soit la matrice
$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).$$
Alors $\det A = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$.

Remarques

⇨ Le déterminant de la matrice de taille nulle est 1.

⇨ Si $a \in \mathbb{K}$, le déterminant de la matrice à une ligne et une colonne (a) est a.

Exercice 4

⇨ Soit $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Calculer le rang de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par
$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad a_{i,j} := \cos(\theta_i + \theta_j).$$

Proposition 26.2.2

Soit T une matrice triangulaire supérieure

$$T \coloneqq \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors

$$\det T = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Remarque

⇨ En particulier, le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.

Proposition 26.2.3

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\det A = \lambda \det B.$$

Proposition 26.2.4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ne modifient pas les déterminants.
- Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $C_i \leftarrow \lambda C_i$ multiplient les déterminants par λ.
- Les opérations élémentaires $L_i \leftrightarrow L_j$ et $C_i \leftrightarrow C_j$ multiplient les déterminants par -1.

Remarques

⇨ Plus généralement, si à une colonne, on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes, on ne change pas le déterminant. De même, si à une ligne, on ajoute une combinaison linéaire des autres lignes, on ne change pas non plus le déterminant.

⇨ Toute permutation des colonnes multiplie le déterminant par la signature de cette permutation. De même, toute permutation des lignes multiplie le déterminant par la signature de cette permutation.

Exercice 5

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a+b & 2a & 2a \\ 2b & a+b & 2a \\ 2b & 2b & a+b \end{vmatrix}$$

26.2.2 Développement par rapport à une colonne

Définition 26.2.5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- On appelle *mineur* d'indice $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice A.
- On appelle *cofacteur* d'indice $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, et on note $A_{i,j}$, le scalaire $A_{i,j} := (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Remarque

⇨ On retiendra que la matrice des $(-1)^{i+j}$ comporte des 1 sur la diagonale et qu'on passe de ± 1 à son opposé lorsqu'on change de ligne ou de colonne.

Proposition 26.2.6: Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}\\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\Delta_{i,j}.\end{aligned}$$

- Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}\\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\Delta_{i,j}.\end{aligned}$$

Exercices 6

⇨ Soit $u, v \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -u & v & 0\\ -2 & 0 & 2v\\ 0 & -1 & u\end{pmatrix}$$

⇨ Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels la matrice suivante est inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & (0)\\ 1 & 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 & 1\\ (0) & & & 1 & 1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Proposition 26.2.7: Déterminant de Vandermonde

On appelle Vandermonde de la famille $(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ le déterminant

$$V(x_0,\dots,x_n) := \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ \vdots & & & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}$$

On a

$$V(x_0,\dots,x_n) = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i).$$

Remarque

⇨ Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, $n+1$ éléments deux à deux distincts et $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$. Soit $P \coloneqq a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}_n[X]$. Alors

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(x_k) = y_k$$

si et seulement si

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n. \end{cases}$$

Le déterminant de la matrice de ce système est un Vandermonde qui est non nul car les x_k sont deux à deux distincts. On retrouve le fait que ce système est de Cramer et donc qu'il admet une unique solution, résultat au cœur de la définition des polynômes interpolateurs de Lagrange.

26.2.3 Comatrice

Définition 26.2.8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *comatrice* de A et on note $\operatorname{Com} A$ la matrice des cofacteurs de A

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad [\operatorname{Com} A]_{i,j} \coloneqq (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$

Proposition 26.2.9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$A(\operatorname{Com} A)^\top = (\operatorname{Com} A)^\top A = (\det A) I_n.$$

En particulier, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{Com} A)^\top.$$

Remarque

⇨ La matrice

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

est inversible si et seulement si $\det A = ad - cb$ est non nul. De plus, si tel est le cas

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Cependant, on évitera d'utiliser une telle formule en pratique.

Exercice 7

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que son inverse est à coefficients entiers si et seulement si $\det A \in \{-1, 1\}$.

26.3 Exercices

Déterminant

Forme n-linéaire alternée

Exercice 1 : Exercice ENS

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $d \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{A}_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E.

Déterminant d'une famille de n vecteurs

Exercice 2 : Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in E$

$$\sum_{k=1}^{n} \det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{k-1}, f(x_k), x_{k+1}, \ldots, x_n) = \operatorname{tr}(f) \det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 3 : Déterminant de la transposition

Soit φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même qui à la matrice M associe sa transposée. Calculer le déterminant de φ.

Déterminant d'une matrice carrée

Calcul de déterminant

Méthode du pivot

Exercice 4 : Calcul de déterminant

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par les coefficients

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad a_{i,j} := \sin(a_i + a_j).$$

Exercice 5 : Calculs de déterminants

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$. Calculer et factoriser les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 6 : Calculs de déterminants

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Calculer et factoriser les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ bcd & acd & abd & abc \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & b & ac \\ 1 & b & c & bd \\ 1 & c & d & ac \\ 1 & d & a & bd \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 7 : Calcul de déterminant

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cos(a_1) & \cos(a_2) & \cdots & \cos(a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos((n-1)a_1) & \cos((n-1)a_2) & \cdots & \cos((n-1)a_n) \end{vmatrix}$$

Exercice 8 : Matrice circulante

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. On pose
$$M := \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que $\det J \neq 0$.
   (b) Calculer MJ et en déduire $\det M$.
2. Mêmes questions avec la *matrice circulante*
$$M := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J := \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$
   pour $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ en posant $\omega := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

Exercice 9 : Calculs de déterminants

Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 + b_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & \cdots & \cdots & a_n & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

Exercice 10 : Calcul de déterminant

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$. On définit la matrice $A_{n,p}$ de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ par

$$A_{n,p} := \begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{p} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \cdots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p}{1} & \binom{n+p}{2} & \cdots & \binom{n+p}{p} \end{pmatrix}$$

Calculer $\det A_{n,p}$.

Développement par rapport à une colonne

Exercice 11 : Matrice tridiagonale

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 + x^2 & x & & & (0) \\ x & 1 + x^2 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & x & 1 + x^2 & x \\ (0) & & & x & 1 + x^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 12 : Calcul de rang

Résoudre le système linéaire dont la matrice A est définie par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad a_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } |i-j| \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quel est son rang ?

Comatrice

Exercice 13 : Comatrice du produit

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que les matrices $A - XI_n$ et $B - XI_n$ sont inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X))$.
2. Montrer que $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B)$.

Chapitre 27

Fonctions de deux variables

27.1 Limite, continuité

27.1.1 Notion d'ouvert

Proposition 27.1.1

On note $\|.\|$ la norme dérivant du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$. On rappelle que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad & \|x\| \geqslant 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad & \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = (0,0) \\ \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad & \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad & \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad & \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\| \end{aligned}$$

Proposition 27.1.2

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad & |x_1| \leqslant \|(x_1,x_2)\| \quad \text{et} \quad |x_2| \leqslant \|(x_1,x_2)\| \\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad & \|(x_1,x_2)\| \leqslant |x_1| + |x_2| \end{aligned}$$

Définition 27.1.3

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

— On appelle *boule ouverte* de centre x_0 et de rayon r l'ensemble

$$B_O(x_0, r) \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|x - x_0\| < r \right\}.$$

— On appelle *boule fermée* de centre x_0 et de rayon r l'ensemble

$$B_F(x_0, r) \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|x - x_0\| \leqslant r \right\}.$$

Définition 27.1.4

On dit qu'une partie $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ est un *ouvert* lorsque

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists \eta > 0, \quad B_F(x, \eta) \subset \mathcal{U}.$$

Proposition 27.1.5

- $\varnothing$ et $\mathbb{R}^2$ sont des ouverts.
- Une union d'ouverts est un ouvert.
- Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Proposition 27.1.6

- Les boules ouvertes sont des ouverts.
- Si $ax + by + c = 0$ est l'équation d'une droite, le demi-plan d'équation

$$ax + by + c > 0$$

  est un ouvert.
- Si on enlève un nombre fini de points à un ouvert, il reste ouvert.

Exercice 1

⇨ Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_O\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$$

n'est pas un ouvert.

Définition 27.1.7

Soit $\mathcal{U}$ une partie de $\mathbb{R}^2$ et $a \in \mathbb{R}^2$. On dit que a est *adhérent* à $\mathcal{U}$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B_F(a, \varepsilon) \cap \mathcal{U} \neq \varnothing.$$

Exercice 2

⇨ Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Montrer que l'ensemble des points adhérents à la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r est la boule fermée de même centre et de même rayon.

Définition 27.1.8

On appelle *fonction réelle de deux variables* toute fonction définie sur une partie ouverte $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

27.1.2 Limite

Définition 27.1.9

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^2$ un point adhérent à $\mathcal{U}$.

- Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ *tend* vers l lorsque x tend vers a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

- On dit que $f(x)$ *tend* vers $+\infty$ lorsque x tend vers a lorsque

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant m.$$

- On dit que $f(x)$ *tend* vers $-\infty$ lorsque x tend vers a lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant M.$$

Remarque

⇨ Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$x \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} x_0, \qquad y \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} y_0 \quad \text{et} \quad \|(x,y)\| \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} \|(x_0,y_0)\|\,.$$

Proposition 27.1.10

Soit f et $g : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^2$ un point adhérent à $\mathcal{U}$. On suppose que $f(x)$ tend vers $l_1 \in \mathbb{R}$ et $g(x)$ tend vers $l_2 \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a. Alors

— Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda l_1 + \mu l_2.$$

— On a

$$f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_1 l_2.$$

— Si $l_2 \neq 0$, alors il existe une boule de centre a sur laquelle g ne s'annule pas. De plus

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{l_1}{l_2}.$$

Proposition 27.1.11

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^2$ un point adhérent à $\mathcal{U}$ et $g : \mathcal{D}_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{D}_g$. On suppose que

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_f \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad g(y) \xrightarrow[y\to l_f]{} l_g \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Alors

$$g\left(f(x)\right) \xrightarrow[x\to a]{} l_g.$$

Proposition 27.1.12

Soit f, g et $h : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^2$ un point adhérent à $\mathcal{U}$.

— On suppose que

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

et que $f(x)$ et $h(x)$ admettent la même limite finie $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a. Alors

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l.$$

— On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad |f(x) - l| \leqslant g(x).$$

et que $g(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers a. Alors

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l.$$

— On suppose que

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad f(x) \leqslant g(x).$$

— Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.
— Si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.

Remarque

⇨ Si il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\varphi(r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall r \geqslant 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |f(a_1 + r\cos\theta, a_2 + r\sin\theta) - l| \leqslant \varphi(r)$$

alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$.

Exercice 3

⇨ Soit f la fonction définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) \coloneqq \frac{x^2 y}{x^2+y^2}.$$

Montrer que f admet une limite en $(0,0)$.

27.1.3 Continuité

Définition 27.1.13

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est *continue* en $x_0 \in \mathcal{U}$ lorsque

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0).$$

Remarques

⇨ On dit qu'une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue lorsqu'elle est continue en tout point de $\mathcal{U}$.

⇨ Les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

sont continues.

Proposition 27.1.14

Soit f et $g : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $x_0 \in \mathcal{U}$. Alors

— Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est continue en x_0.

— fg est continue en x_0.

— Si $g(x_0) \neq 0$, il existe une boule de centre x_0 sur laquelle g ne s'annule pas et f/g est continue en x_0.

Proposition 27.1.15

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{V} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Si f est continue en $x_0 \in \mathcal{U}$ et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

27.1.4 Application partielle

Définition 27.1.16

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $x \coloneqq (x_1, x_2) \in \mathcal{U}$. On définit les fonctions réelles d'une variable réelle f_{p_1} et f_{p_2} par

$$f_{p_1}(t) \coloneqq f(t, x_2) \quad \text{et} \quad f_{p_2}(t) \coloneqq f(x_1, t).$$

f_{p_1} et f_{p_2} sont appelées *applications partielles* de f au point $x = (x_1, x_2)$.

Exercice 4

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \coloneqq \frac{(2-y)\cos(xy)}{1+x^2}.$$

Déterminer les applications partielles de f en $(0,0)$.

Proposition 27.1.17

— Si $f(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $a \coloneqq (a_1, a_2)$, $f_{p_1}(t)$ tend vers l lorsque t tend vers a_1 et $f_{p_2}(t)$ tend vers l lorsque t tend vers a_2.

— Si f est continue en $x \coloneqq (x_1, x_2)$, f_{p_1} est continue en x_1 et f_{p_2} est continue en x_2.

Remarque

⇨ Nous verrons que les réciproques de ces théorèmes sont fausses. Par exemple, f_{p_1} peut être continue en x_1 et f_{p_2} peut être continue en x_2 sans que f soit continue en (x_1, x_2).

Exercice 5

⇨ Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

n'a pas de limite en $(0,0)$.

27.1.5 Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Définition 27.1.18

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Les fonctions f_1 et $f_2 : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x)).$$

sont appelées *fonctions coordonnées* de f.

Remarque

⇨ On étend les notions de limite et de continuité aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ en remplaçant les valeurs absolues par des normes dans les définitions données plus haut. Par exemple, si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}^2$ est un point adhérent à $\mathcal{U}$ et $l \in \mathbb{R}^2$, on dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - l\| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 27.1.19

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
- Si a est un point adhérent à $\mathcal{U}$ et $l := (l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$ alors $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a si et seulement si
$$f_1(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 \quad \text{et} \quad f_2(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_2.$$
- Si $x_0 \in \mathcal{U}$, f est continue en x_0 si et seulement si f_1 et f_2 le sont.

Proposition 27.1.20

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $g : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ avec $p, q, r \in [\![1, 2]\!]$. On suppose que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$.
- Soit $a \in \mathbb{R}^p$ un point adhérent à $\mathcal{U}$. Si $f(x)$ tend vers $b \in \mathbb{R}^q$ lorsque x tend vers a et $g(y)$ tend vers l lorsque y tend vers b, alors
$$g(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$
- Soit $x_0 \in \mathcal{U}$. Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Remarque

⇨ Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à $\mathcal{U}$ en lequel f admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $g : I \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, b est une borne de I et $g(t)$ tend vers a lorsque t tend vers b, alors

$$f(g(t)) \xrightarrow[t \to b]{} l.$$

On peut ainsi, en choisissant différentes fonctions g, se faire une idée de la limite éventuelle de f en a, ou prouver que f n'admet pas de limite en a.

Exercices 6

⇨ Soit f la fonction définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) := \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Étudier la limite éventuelle de f en $(0,0)$.

⇨ Soit f la fonction définie sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$ par

$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \quad f(x,y) \coloneqq x^y.$$

Étudier la limite éventuelle de f en $(0,0)$.

27.2 Dérivation

27.2.1 Dérivée partielle

Définition 27.2.1

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $x \coloneqq (x_1, x_2) \in \mathcal{U}$.

— On dit que f admet *une dérivée partielle par rapport à la première variable* en x lorsque

$$\frac{f(x_1+t, x_2) - f(x_1, x_2)}{t}$$

admet une limite finie lorsque t tend vers 0. Si tel est le cas, cette limite est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x).$$

— On dit que f admet *une dérivée partielle par rapport à la seconde variable* en x lorsque

$$\frac{f(x_1, x_2+t) - f(x_1, x_2)}{t}$$

admet une limite finie lorsque t tend vers 0. Si tel est le cas, cette limite est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x).$$

Remarque

⇨ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles en tout point par rapport à la première et à la seconde variable, $x \coloneqq (x_1, x_2)$ et f_{p_1}, $f_{p_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions partielles définies par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{p_1}(t) \coloneqq f(t, x_2) \qquad \text{et} \qquad f_{p_2}(t) \coloneqq (x_1, t).$$

Alors f_{p_1} et f_{p_2} sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'_{p_1}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2) \qquad \text{et} \qquad f'_{p_2}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, t).$$

Définition 27.2.2

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{U}$ et $h \in \mathbb{R}^2$. On dit que f admet une *dérivée en x selon le vecteur h* lorsque

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

admet une limite finie lorsque t tend vers 0. Si tel est le cas, cette limite est notée

$$\mathrm{D}f_x(h).$$

Remarques

⇨ Si $e_1 \coloneqq (1,0)$, f admet une dérivée en x selon le vecteur e_1 si et seulement si elle admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en x. De plus, si tel est le cas

$$\mathrm{D}f_x(e_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x).$$

De même, f admet une dérivée en x selon le vecteur $e_2 \coloneqq (0,1)$ si et seulement si elle est admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable en x.

⇨ Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Alors f admet une dérivée en tout $x \in \mathcal{U}$ selon le vecteur nul et $\mathrm{D}f_x(0) = 0$. De plus, si f admet une dérivée en x selon le vecteur $h \in \mathbb{R}^2$ alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, elle admet une dérivée en x selon le vecteur λh et

$$\mathrm{D}f_x(\lambda h) = \lambda \mathrm{D}f_x(h).$$

Exercice 7

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ selon tout vecteur mais n'est pas continue en $(0,0)$.

Définition 27.2.3

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de *classe* $\mathcal{C}^1$ lorsque

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

sont définies et continues sur $\mathcal{U}$.

Remarques

⇨ Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, les applications partielles sont de classe $\mathcal{C}^1$.

⇨ Les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 27.2.4

Soit f et $g : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

— Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall i \in [\![1,2]\!], \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i}(x) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}(x).$$

— fg est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall i \in [\![1,2]\!], \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) + f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x).$$

— Si g ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$, f/g est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall i \in [\![1,2]\!], \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_i}(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) - f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)}{g(x)^2}.$$

Proposition 27.2.5

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{V} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall i \in [\![1,2]\!], \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(x) = g'(f(x)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Exercice 8

⇨ Trouver l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0.$$

⇨ Déterminer l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+y.$$

27.2.2 Développement limité, gradient

Définition 27.2.6

Soit $f:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction définie en $(0,0)$. On dit que $f(h)$ est *négligeable* devant $\|h\|$ en $(0,0)$ lorsque

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\eta>0,\quad \forall h\in\mathcal{U},\quad \|h\|\leqslant\eta\Longrightarrow|f(h)|\leqslant\varepsilon\,\|h\|\,.$$

Si tel est le cas, on note

$$f(h)=\underset{h\to(0,0)}{\mathrm{o}}(\|h\|)\,.$$

Proposition 27.2.7

Soit $f:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $x\in\mathcal{U}$. Alors, en notant $h=(h_1,h_2)$

$$f(x+h)=f(x)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)h_2+\underset{h\to(0,0)}{\mathrm{o}}(\|h\|)\,.$$

Remarque

⇨ Si $f:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $(x_0,y_0)\in\mathcal{U}$ alors, le plan d'équation

$$z=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

est appelé *plan tangent* en (x_0,y_0) à la surface d'équation $z=f(x,y)$.

Proposition 27.2.8

Soit $f:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f est continue.

Proposition 27.2.9

Soit $f:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $x\in\mathcal{U}$. Alors f admet une dérivée en x selon tout vecteur $h:=(h_1,h_2)$ et

$$\mathrm{D}f_x(h)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)h_2.$$

Autrement dit, $\mathrm{D}f_x$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y):=\frac{xy}{1+x^2}.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $\mathrm{D}f_{(x,y)}(h_1,h_2)$.

Définition 27.2.10

Soit $f:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $x\in\mathcal{U}$. On appelle *gradient* de f en x l'unique vecteur $\nabla f(x)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall h\in\mathbb{R}^2,\quad \mathrm{D}f_x(h)=\langle\nabla f(x)|h\rangle\,.$$

Autrement dit

$$\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right).$$

Remarques

- ⇨ Le symbole ∇ est un delta majuscule inversé. Il se prononce « nabla » en référence au nom grec désignant une harpe phénicienne.
- ⇨ Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $u_\theta := (\cos\theta, \sin\theta)$. Alors, d'après Cauchy-Schwarz

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{D}f_x(u_\theta) = \langle \nabla f(x) | u_\theta \rangle \leqslant \|\nabla f(x)\| \, \|u_\theta\| = \|\nabla f(x)\|$$

cette inégalité étant une égalité si et seulement si $\nabla f(x)$ et u_θ sont positivement liés. On en déduit que $\nabla f(x)$ donne la direction dans laquelle f croît le plus vite.

27.2.3 Dérivation des fonctions composées

Proposition 27.2.11

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{V} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad [\nabla (g \circ f)](x) = g'(f(x)) \nabla f(x).$$

On écrit aussi, de manière abusive

$$\nabla (g \circ f) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f} \nabla f.$$

Exercice 10

⇨ Calculer ∇f, où f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) := \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Proposition 27.2.12

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathcal{U}, \quad (g \circ f)'(t) &= \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t)) f_1'(t) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(f(t)) f_2'(t) \\ &= \langle \nabla g(f(t)) | f'(t) \rangle \end{aligned}$$

On écrit aussi, de manière abusive

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(g(f_1, f_2))}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial g}{\partial f_1} \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial g}{\partial f_2} \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t} \\ &= \left\langle \nabla g \middle| \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \right\rangle \end{aligned}$$

Exercice 11

⇨ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) := f\left(t^2, t^3\right).$$

Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $\varphi'(t)$.

Proposition 27.2.13

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $M : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathcal{U}$. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in I, \quad f(M(t)) = c.$$

Alors, pour tout $t \in I$, $M'(t)$ est orthogonal au gradient de f en $M(t)$.

Remarque

⇨ Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on appelle *ligne de niveau* de hauteur $c \in \mathbb{R}$ l'ensemble

$$\mathcal{L}_c := \{(x,y) \in \mathcal{U} \mid f(x,y) = c\}.$$

La proposition précédente nous assure que le gradient de f est orthogonal à ses lignes de niveau.

Proposition 27.2.14

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial x_1}(x) = \dfrac{\partial g}{\partial y_1}(f(x)) \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \dfrac{\partial g}{\partial y_2}(f(x)) \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) \\ \dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial x_2}(x) = \dfrac{\partial g}{\partial y_1}(f(x)) \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) + \dfrac{\partial g}{\partial y_2}(f(x)) \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{cases}$$

On écrit aussi, de manière abusive

$$\frac{\partial (g(f_1, f_2))}{\partial x_1} = \frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial (g(f_1, f_2))}{\partial x_2} = \frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}.$$

Exercices 12

⇨ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que la fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x, y) := f(2xy, x)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.

⇨ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$(E) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

1. Montrer que l'application
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \longmapsto & (au - bv, bu + av) \end{array}$$
est bijective et calculer φ^{-1}.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par
$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad g(u, v) := f(au - bv, bu + av).$$
Montrer que f est solution de (E) si et seulement si
$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 0.$$
3. Conclure.

27.2.4 Extrémum d'une fonction de deux variables

Définition 27.2.15

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{U}$. On dit que

— f présente un *maximum global* en x_0 lorsque
$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

— f présente un *maximum local* en x_0 lorsque
$$\exists r > 0, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \|x - x_0\| \leqslant r \Longrightarrow f(x) \leqslant f(x_0).$$

— f présente un *minimum global* en x_0 lorsque
$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

— f présente un *minimum local* en x_0 lorsque
$$\exists r > 0, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \|x - x_0\| \leqslant r \Longrightarrow f(x) \geqslant f(x_0).$$

Remarques

- Un extrémum global est un extrémum local, la réciproque étant fausse en général.
- Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admet un minimum local en $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, alors les fonctions partielles

$$f_{p_1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t, x_2) \end{array} \qquad \text{et} \qquad f_{p_2} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(x_1, t) \end{array}$$

  admettent un minimum local, respectivement en x_1 et x_2. Cependant, la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2.$$

- Plus généralement, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admet un minimul local en $x_0 \in \mathbb{R}^2$ alors, quel que soit $h \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) \coloneqq f(x_0 + th)$$

  admet un minimum local en 0.

Définition 27.2.16

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que $x \in \mathcal{U}$ est un point *critique* de f lorsque

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 0.$$

Proposition 27.2.17

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert $\mathcal{U}$. Si f présente un extrémum local en x_0 alors x_0 est un point critique pour f.

Remarques

- Les extrémums locaux d'une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ sont donc à chercher parmi les points critiques de f.
- La réciproque est fausse. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \coloneqq x^2 - y^2$$

  admet $(0, 0)$ pour point critique alors qu'elle ne présente pas d'extrémum local en $(0, 0)$.

Exercice 13

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \coloneqq -x^2 - 6xy + 9y^2 + 18x - 18y + 1.$$

  Déterminer les extrémums éventuels de f.

27.3 Exercices

Limite, continuité

Notion d'ouvert

Limite

Exercice 1 : Calcul de limites

Déterminer les limites, si elles existent, des fonctions suivantes en $(0,0)$.

$$f(x,y) \coloneqq (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), \qquad f(x,y) \coloneqq \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) \coloneqq \frac{|x+y|}{x^2+y^2},$$

$$f(x,y) \coloneqq \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) \coloneqq \frac{x^2+y^2-1}{x}\sin x, \qquad f(x,y) \coloneqq x^y.$$

Continuité

Exercice 2 : Fonction définie par morceaux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2 > 1, \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x^2+y^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 : L'image d'un convexe

Soit f une fonction continue sur un convexe P de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $f(P)$ est un intervalle.

Application partielle

Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Dérivation

Dérivée partielle

Exercice 4 : Dérivées partielles et continuité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f admet une dérivée selon tout vecteur en $(0,0)$ mais n'est pas continue en 0.

Exercice 5 : Régularité d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. f admet-elle des dérivées partielles au point $(0,0)$?
2. f est-elle continue en $(0,0)$?
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Développement limité, gradient

Exercice 6 : Calcul

Soit $f : (x,y) \mapsto xy^2$.

1. Déterminer la dérivée de f au point $a \coloneqq (-1,3)$ selon le vecteur $h \coloneqq (2,-3)$.
2. Écrire le développement limité de f à l'ordre 1 en a.

Dérivation des fonctions composées

Exercice 7 : Calcul de dérivées

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées ou dérivées partielles des fonctions suivantes

$$g_1(x,y) \coloneqq f(y,x), \qquad g_2(x) \coloneqq f(x,x),$$
$$g_3(x,y) \coloneqq f(y, f(x,x)), \qquad g_4(x) \coloneqq f(x, f(x,x)).$$

Exercice 8 : Équation aux dérivées partielles

On pose $\mathcal{U} \coloneqq \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = 0 \quad \text{et} \quad x \leqslant 0\right\}$. On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$(E) \qquad \forall (x,y) \in \mathcal{U}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

1. On pose $\mathcal{V} \coloneqq \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi, \pi\right[$ et on définit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

   Montrer que φ est une bijection.
2. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la fonction $g : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (r,\theta) \in \mathcal{V}, \quad g(r,\theta) \coloneqq f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

   Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Extrémum d'une fonction de deux variables

Chapitre 28

Familles sommables

« Divergent series are the invention of the devil, and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever. »

— Niels Abel (1802–1829)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k = -\frac{1}{12}$$

— Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

28.1 Famille sommable

Les séries nous ont permis de donner un sens, lorsque c'est possible, à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Cependant, de nombreux problèmes arrivent lorsque l'on souhaite sommer des familles $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ indexées par deux entiers. Il serait naturel de définir une telle somme, lorsque les séries en jeu sont convergentes, par

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}.$$

Mais on trouve rapidement des exemples pour lesquels

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$$

ont toutes deux un sens et des valeurs différentes. Par exemple, si on définit la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ par

$$\forall i,j \in \mathbb{N}, \quad u_{i,j} \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si } i = j+1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

les séries doubles définies plus haut ont toutes deux un sens, mais la première est égale à 1 tandis que la seconde vaut 0.

Contrairement à ce qui se passe dans le cas des sommes finies, il arrive donc que la « somme » des éléments d'une famille infinie dépende de l'ordre de sommation. L'objet de la théorie des *familles sommables* est d'avoir un cadre dans lequel la somme de ces familles ne dépend pas de cet ordre.

28.1.1 Famille sommable de réels positifs

Définition 28.1.1

On pose $[0, +\infty] := [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

— On étend la définition de $+$ sur $[0, +\infty]$ en posant

$$\forall x \in [0, +\infty], \qquad \begin{aligned} x + (+\infty) &:= +\infty \\ (+\infty) + x &:= +\infty \end{aligned}$$

On vérifie que $+$ est associative et commutative sur $[0, +\infty]$ et que 0 est élément neutre.

— On étend la définition de $\times$ en posant

$$\forall x \in]0, +\infty], \qquad \begin{aligned} x \times (+\infty) &:= +\infty \\ (+\infty) \times x &:= +\infty \end{aligned}$$

On pose enfin $0 \times (+\infty) := 0$ et $(+\infty) \times 0 := 0$. On vérifie que $\times$ est associative et commutative sur $[0, +\infty]$ et que 1 est élément neutre. Enfin, $\times$ est distributive par rapport à $+$ sur $[0, +\infty]$.

— On étend la définition de $\leqslant$ sur $[0, +\infty]$ en posant

$$\forall x \in [0, +\infty], \quad x \leqslant +\infty.$$

Muni de $\leqslant$, $[0, +\infty]$ est un ensemble totalement ordonné.

Remarques

⇨ Excepté $+\infty$, tous les éléments de $[0, +\infty]$ sont réguliers pour $+$. Excepté 0 et $+\infty$, tous les éléments de $[0, +\infty]$ sont réguliers pour $\times$.

⇨ La relation d'ordre $\leqslant$ reste compatible avec l'addition et la multiplication : il est toujours possible d'ajouter et de multiplier entre elles des inégalités puisque ces dernières sont positives.

Définition 28.1.2

Soit A une partie de $[0, +\infty]$. On dit que A admet une *borne supérieure dans* $[0, +\infty]$ lorsque l'ensemble des majorants de A dans $[0, +\infty]$ admet un plus petit élément. Si tel est le cas, on le note $\overline{\sup}\, A$.

Proposition 28.1.3

Toute partie de $[0, +\infty]$ admet une borne supérieure dans $[0, +\infty]$.

Remarques

⇨ Soit A une partie de $[0, +\infty]$. Si $+\infty \in A$, alors $\overline{\sup}\, A = +\infty$. Sinon, A est une partie de $[0, +\infty[$ et
- — Si A est vide, alors $\overline{\sup}\, A = 0$.
- — Si A n'est pas majorée, alors $\overline{\sup}\, A = +\infty$.
- — Sinon, A est non vide majorée. Elle admet donc une borne supérieure $\sup A$ dans $\mathbb{R}$ et $\overline{\sup}\, A = \sup A$.

⇨ Soit A une partie de $[0, +\infty]$.
- — Si B est une partie de A, alors $\overline{\sup}\, B \leqslant \overline{\sup}\, A$.
- — Si $x \in [0, +\infty]$, on définit $x + A$ par
$$x + A := \{x + a : a \in A\}.$$
Alors, si A est non vide, $\overline{\sup}\,(x + A) = x + \overline{\sup}\, A$.
- — Si $\lambda \in [0, +\infty]$, on définit λA par
$$\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}.$$
Alors, $\overline{\sup}\,(\lambda A) = \lambda \overline{\sup}\, A$.

Définition 28.1.4

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. On appelle *somme des* u_i pour $i \in I$ et on note $\sum_{i \in I} u_i$ la borne supérieure de

$$A := \left\{ \sum_{i \in K} u_i : K \text{ est une partie finie de } I \right\}$$

dans $[0, +\infty]$.

Remarque

⇨ Si I est fini, la somme que l'on vient de définir n'est autre que la somme $\sum_{i\in I} u_i$ définie de manière classique.

Exercice 1

⇨ Montrer que

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{(i+j)^2} = +\infty.$$

Définition 28.1.5

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ est *sommable* lorsque

$$\sum_{i\in I} u_i < +\infty.$$

Remarque

⇨ Si l'un des x_i est égal à $+\infty$, alors

$$\sum_{i\in I} u_i = +\infty.$$

En particulier, tous les éléments d'une famille sommable sont réels.

Proposition 28.1.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive. Alors, la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est convergente. De plus, si tel est le cas

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Remarque

⇨ Si la série à termes positifs $\sum u_n$ diverge, alors

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = +\infty.$$

C'est pourquoi, certains auteurs se permettent d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 28.1.7

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ et J une partie de I. Alors

$$\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Remarque

⇨ En particulier, si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in J}$ est sommable.

Proposition 28.1.8

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $[0, +\infty]$ et $\lambda, \mu \in [0, +\infty]$. Alors

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i.$$

Proposition 28.1.9

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $[0,+\infty]$ telles que

$$\forall i \in I, \quad u_i \leqslant v_i.$$

Alors

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i.$$

Remarque

⇨ En particulier, si $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

Proposition 28.1.10

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$ et $\sigma : J \to I$ une bijection. Alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} u_{\sigma(j)}.$$

Proposition 28.1.11: Théorème de sommation par paquets

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$. Si $(I_j)_{j\in J}$ est une partition de I, alors

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i.$$

Remarque

⇨ En particulier, si $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$ et $I_1, I_2 \in \mathcal{P}(I)$ sont tels que $I = I_1 \sqcup I_2$, alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I_1} u_i + \sum_{i\in I_2} u_i.$$

Exercice 2

⇨ Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la famille

$$\left(\frac{pq}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$$

est-elle sommable ?

Proposition 28.1.12: Théorème de Fubini

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$. Alors

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}.$$

Proposition 28.1.13

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles d'éléments de $[0,+\infty]$. Alors

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j = \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right).$$

Exercices 3

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la famille

$$\left(\mathrm{e}^{-(ap+bq)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$$

est sommable et calculer sa somme.

⇨ On considère la fonction ζ de Riemann définie par

$$\zeta(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}.$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel la somme ci-dessus est finie.

1. Montrer que le domaine de définition de ζ est $]1, +\infty[$.
2. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 2} (\zeta(n) - 1) = 1.$$

28.1.2 Famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$

Définition 28.1.14

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est *sommable* lorsque la famille des réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Remarques

⇨ L'ensemble des familles sommables indexées par I est noté $\ell^1(I, \mathbb{K})$ ou $\ell^1(I)$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.

⇨ Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable et J est une partie de I, alors $(u_i)_{i\in J}$ est sommable.

Exercices 4

⇨ Montrer que la famille

$$\left(\frac{\sin(p+q)}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$$

est sommable.

⇨ Montrer que la famille

$$\left(z^{ij}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$$

est sommable si et seulement si $|z| < 1$.

Définition 28.1.15

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on définit respectivement la *partie positive* x^+ et la *partie négative* x^- de x par

$$x^+ := \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad x^- := \begin{cases} |x| & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Proposition 28.1.16

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$x = x^+ - x^-, \qquad |x| = x^+ + x^-, \qquad 0 \leqslant x^+ \leqslant |x| \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant x^- \leqslant |x|.$$

Définition 28.1.17

— Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels sommable. Alors, les familles $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables et on définit

$$\sum_{i\in I} u_i := \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-.$$

— Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes sommable. En décomposant $u_i = a_i + \mathrm{i}b_i$ en sa partie réelle et sa partie imaginaire, les familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont sommables et on définit

$$\sum_{i\in I} u_i := \sum_{i\in I} a_i + \mathrm{i}\sum_{i\in I} b_i.$$

Proposition 28.1.18

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors, la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente. De plus, si tel est le cas

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Proposition 28.1.19

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$ et $l \in \mathbb{K}$. Alors

$$\sum_{i\in I} u_i = l$$

si et seulement si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie K de I telle que pour toute partie finie L de I telle que $K \subset L$, on a

$$\left|\sum_{i\in L} u_i - l\right| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque

⇨ La définition « historique » d'une famille sommable est la suivante : on dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est sommable lorsqu'il existe $l \in \mathbb{K}$ tel que quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie K de I telle que pour toute partie finie L de I telle que $K \subset L$, on a

$$\left|\sum_{i\in L} u_i - l\right| \leqslant \varepsilon.$$

Si c'est le cas, l est unique, et est appelé somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$. La proposition précédente nous montre donc que si une famille est sommable pour le sens donné dans ce cours, alors elle est sommable pour le sens « historique ». Réciproquement, on peut montrer que si une famille est sommable pour le sens « historique », elle est sommable pour le sens donné dans ce cours. Cela montre l'équivalence des deux approches.

Proposition 28.1.20

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i.$$

Remarque

⇨ Attention, il est possible que $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ soit sommable sans que $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ le soient. Dans ce cas, il est bien sur interdit d'écrire

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$$

puisque l'expression à droite de l'égalité n'a aucun sens.

Proposition 28.1.21

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles réelles sommables telles que

$$\forall i \in I, \quad u_i \leqslant v_i.$$

Alors

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i.$$

Proposition 28.1.22

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|.$$

Proposition 28.1.23

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\sigma : J \to I$ une bijection. Alors $(u_{\sigma(j)})_{j\in J}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} u_{\sigma(j)}.$$

Remarques

- Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors, quel que soit la bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}.$$
- Cette propriété est fausse pour les séries semi-convergentes. En effet, le théorème de réarrangement de Riemann montre que si $\sum u_n$ est une série réelle semi-convergente, alors quel que soit $l \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = l.$$

Proposition 28.1.24: Théorème de sommation par paquets

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$. Si $(I_j)_{j\in J}$ est une partition de I, alors pour tout $j \in J$ la famille $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable. De plus, la famille $(\sum_{i\in I_j} u_i)_{j\in J}$ est sommable et

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i.$$

Proposition 28.1.25: Théorème de Fubini

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors, pour tout $j \in J$ la famille $(u_{i,j})_{i\in I}$ est sommable et pour tout $i \in I$, la famille $(u_{i,j})_{j\in J}$ est sommable. De plus, les familles $(\sum_{i\in I} u_{i,j})_{j\in J}$ et $(\sum_{j\in J} u_{i,j})_{i\in I}$ sont sommables et

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}.$$

Remarque

- Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors
$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} &= \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} u_{i,j} = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} u_{i,j}\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}.\end{aligned}$$

Exercice 5

- Montrer que la famille
$$\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}\right)_{k\in\mathbb{N}^*, n>k}$$
est sommable et calculer sa somme.

Proposition 28.1.26

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la famille $(u_i v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j = \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right).$$

Définition 28.1.27

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On appelle *produit de Cauchy* de ces suites la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad w_n := \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Proposition 28.1.28

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Alors, leur produit de Cauchy est absolument convergent et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Exercice 6

⇨ L'objet de cet exercice est de donner une définition « moderne » de l'exponentielle.

1. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, montrer que la série
$$\sum \frac{z^n}{n!}$$
est absolument convergente ; on note $\exp(z)$ sa somme.
2. Montrer que
$$\forall a,b\in\mathbb{C},\quad \exp(a+b)=\exp(a)\exp(b).$$

28.2 Exercices

Famille sommable

Famille sommable de réels positifs

Exercice 1 : Exercice

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{k\geqslant n}\frac{1}{k^\alpha}, \qquad \sum_{m\in\mathbb{N}^*}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(m+n)^\alpha}.$$

Famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$

Exercice 2 : Exercice

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$L_k \coloneqq \prod_{i=0}^{k-1}(X-i).$$

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, la famille
$$\left(\frac{P(n)}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
est sommable.
2. Calculer
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{L_k(n)}{n!}$$
pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. En déduire
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n^4}{n!}.$$

Exercice 3 : Exercice

1. Prouver la sommabilité et calculer
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\geqslant n}\frac{1}{k!}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{k\geqslant n}\frac{(-1)^k}{k^3}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n\sum_{k\geqslant n}\frac{1}{k^3}.$$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Prouver la sommabilité et calculer
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}.$$

Exercice 4 : Exercice

À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur $a, b, z \in \mathbb{C}$ les familles suivantes sont-elles sommables ?

$$\left(\frac{z^p}{q!}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}, \qquad \left(\frac{a^p b^q}{p!q!}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}, \qquad \left(\frac{q^p z^p}{p!q!}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}, \qquad \left(\binom{p+q}{p}z^{p+q}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}.$$

Exercice 5 : Exercice

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle
$$F_n \coloneqq \frac{1}{X(X+1)\cdots(X+n)}.$$
2. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \mathrm{e}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$